MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

69. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS †

69. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1958

Unveranderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 69. Bandes

Seite

BAER, R., Sylowturmgruppen 229

BAKER, I. N., Zusammensetzungen ganzer Funktionen 121

CHEN, Y. M., Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants 105

CHEN, Y. M., On a maximal theorem of Hardy and Littlewood and theorems concerning Fourier constants 418

CRAMPE, S., Angeordnete projektive Ebenen 435

DEMBOWSKI, P., Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen 59

HARTMANN, P., On Isometries and on a Theorem of Liouville 202

HOOLEY, C., On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product 211

JACOBS, K., Konjunkturschwankungen Markoffscher n-Personen-Prozesse mit monomialer Regelung 247

KLEE jr., V. L., Extremal structure of convex sets. II 90

KRABBE, G. L., Convolution Operators which are not of Scalar Type 346

LANG, W.-D., Über die Äquivalenz von diskreten und kontinuierlichen Cesàro-Verfahren bei Funktionen vom Exponentialtyp 280

LEPTIN, H., Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume 40

MACROBERT, T. M., Integrals Involving E-Funktions 234

MORITA, K., On Algebras for which Every Faithful Representation is its Own Second Commutator 429

NARAIN, R., On a Generalized Laplace Transform 228

NASTOLD, H.-J., Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. I 366

NEUMANN, B. H., Ascending Verbal and Frattini Series 164

PUPPE, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I 299

PUPPE, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. II 395

RAMANUJAN, M. S., On Products of Summability Methods 423

RIBENBOIM, P., Corps maximaux et complets par des valuations de Krull 466

RIEGER, G. J., Verallgemeinerung der Selbergschen Formel auf Idealklassen mod f in algebraischen Zahlkörpern 183

SCHMIEDEN, C., und D. LAUGWITZ, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung . . 1

SHUKLA, H. S., On certain transformations of nearly-poised basic bilateral hypergeometric series of the type ${}_M\Psi_M$ 195

Seite

Suschowk, D., Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale 363

Thron, W. J., On Parabolic Convergence Regions for Continued Fractions 173

Weier, J., Über Transformationen von Mannigfaltigkeiten der Dimensionsdifferenz 2 271

Wielandt, H., Eine Distributivitätseigenschaft konjugierter Untergruppen 345

Wielandt, H., Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen 463

Wittich, H., Über die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsumme 237

Zaremba, S. K., Note on the Central Limit Theorem 295

Zaubek, O., Über einige mit dem Zwischenwertsatz verwandte Entwicklungen . . . 351

SCHMIEDEN, C., u. D. LAUGWITZ
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 1–39 (1958)

Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung

Von
CURT SCHMIEDEN und DETLEF LAUGWITZ

Inhaltsübersicht

Kapitel I. Grundlegung des Zahlbegriffs 4
§ 1. Définition der Ω-rationalen Zahlen als Limites rationaler Zahlfolgen 4
§ 2. Anordnungsbeziehungen 5
§ 3. Größenordnung 7
§ 4. Endliche Zahlen und reelle Zahlklassen 10
§ 5. Begriff und Eigenschaften des Grenzwerts 12
§ 6. Bemerkungen über eine mögliche Erweiterung 16
Bezeichnungen
Kapitel II. Anfangsgründe der Analysis 19
§ 1. Der Funktionsbegriff 19
§ 2. Differentiation 24
§ 3. Integration 26
§ 4. Zwischenwertsatz und Mittelwertsätze 29
Kapitel III. Einige Beispiele und Anwendungen 30
§ 1. Die elementaren Funktionen 30
§ 2. δ-Funktionen 32
§ 3. Potenzreihen, insbesondere ihr Verhalten an der Konvergenzgrenze 35
§ 4. Bedingt-konvergente Reihen 37

Einleitung. Der Begriff der Cantor-Dedekindschen reellen Zahlen und damit die gesamte heutige Analysis beruhen auf der Festsetzung, daß zwei Folgen rationaler Zahlen der gleiche Grenzwert zuzuschreiben ist, wenn ihre Glieder sich schließlich um weniger als ε unterscheiden, wobei ε eine beliebige positive rationale Zahl ist. Äquivalent ist die Dedekindsche Auffassung: Jeder „Schnitt" im Bereich der rationalen Zahlen wird von genau einer reellen Zahl erzeugt.

Man wird zugeben können, daß in dieser Festsetzung ein Element der Willkür liegt. Betrachten wir einen Schnitt, d.h. eine Aufteilung der rationalen Zahlen auf zwei Klassen, so daß jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse, so motiviert DEDEKIND bekanntlich aus der „Stetigkeit" der Zahlgeraden das Postulat der Existenz einer beide Klassen trennenden „reellen" Zahl. Daß es zu jedem Schnitt nur eine einzige solche trennende Zahl gibt, ist eine weitere, bei DEDEKIND nicht motivierte Annahme.

Hier soll nun wenigstens in den Grundzügen gezeigt werden, daß eine nicht Dedekindsche Analysis tatsächlich möglich ist, welche auf einem Zahlbegriff aufbaut, für den das Dedekindsche Postulat (jedem Schnitt entspricht eine und nur eine reelle Zahl) nicht gilt; dann ist natürlich auch die eingangs genannte äquivalente Cantorsche Fassung nicht erfüllt. Es dürfen also zwei

Folgen rationaler Zahlen, die in der gewohnten Analysis den gleichen reellen Limes haben, hier verschiedene Grenzwerte besitzen. Die radikalste Möglichkeit ist offenbar die, zu postulieren, daß die Limites verschiedener Folgen stets ebenfalls verschieden sind; diese Annahme werden wir hier zugrunde legen.

Läßt man CANTORs Definition der Äquivalenz von Zahlfolgen fallen, so scheint es unvernünftig, das in der Formulierung gleichartige Konvergenzprinzip von CAUCHY zur Aussonderung der „konvergenten" Folgen unter allen möglichen Folgen beizubehalten. Vielmehr kann man versuchen, auch für bisher divergente Folgen Limites einzuführen. Wieder wollen wir die am weitesten gehende Festsetzung zugrunde legen und überhaupt jeder beliebigen Folge von rationalen Zahlen einen Limes zuschreiben.

In Kapitel I wird das Rechnen mit diesen Limites untersucht. Die elementaren Rechenoperationen und die Größer-Beziehung lassen sich in naheliegender Weise erklären, und es zeigt sich, daß der Zahlbereich unendlich große Zahlen enthält, d.h. solche, die größer sind als jede natürliche Zahl. Entsprechend gibt es unendlich kleine, positive Zahlen. Der Zahlbereich erweist sich nun zwar als ein Ring, er enthält jedoch Nullteiler und ist nicht totalgeordnet (vermöge der Größer-Relation). Diese beiden Tatsachen, die zunächst als störend erscheinen mögen, haben ihren Grund darin, daß wir zur Definition unserer Zahlen beliebige Folgen rationaler Zahlen zugelassen haben. Man könnte versuchen, durch geeignete Einschränkung der zulässigen Folgen zu einem totalgeordneten Körper zu kommen. Dies ist aber aus zwei Gründen nicht empfehlenswert. Einmal verursachen nämlich Nullteiler und Unvergleichbarkeit mancher Elementpaare beweistechnisch hier keinerlei Schwierigkeiten; vielmehr würde jede zusätzliche, einschränkende Eigenschaft der definierenden Folgen die Beweise nur komplizieren. Und zweitens ist es sehr zweckmäßig, wenn für jede Folge ein Limes definiert ist, weil manche Divergenzschwierigkeiten dadurch wegfallen.

Im Kapitel II werden die Grundlagen der Analysis entwickelt, die wir in der vorliegenden Arbeit bis zu den Hauptsätzen der Differential- und Integralrechnung führen, die etwa in einer Vorlesung für erste Semester gebracht werden. Im Kapitel III werden einige spezielle Beispiele und Anwendungen diskutiert.

Es ist bemerkenswert, daß sich nicht etwa nur ein Neuaufbau oder eine bloße Modifikation der gewohnten Analysis ergibt, sondern daß diese Analysis hier echt erweitert wird. In welchem Sinne das gilt, wird im einzelnen auszuführen sein. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß wir in Kapitel III, § 2 Funktionen behandeln werden, die die Eigenschaften von DIRACs δ-Funktion haben, und die sich hier ohne Erweiterung des Funktionsbegriffs einführen und auch ohne neue Begriffe behandeln lassen, da die Begriffe der Stetigkeit, Differentiation und Integration auch auf solche Funktionen anwendbar sind, die in unendlich kleinen Intervallen unendlich große Schwankungen ausführen. Auch die Multiplikation derartiger Funktionen verursacht — im Gegensatz zu den Verhältnissen in der Distributionstheorie — hier keine Schwierigkeiten.

Andere Gesichtspunkte, auf die wir hier besonders hinweisen wollen, sind die durchgängige Vertauschbarkeit von Grenzprozessen und die Möglichkeit, alle unendlichen Reihen (auch wenn sie im üblichen Sinne nur bedingt konvergieren) beliebig umzuordnen. Dazu sei auf Kapitel I, § 5 und III, § 4 verwiesen.

Einige historische Bemerkungen dürften nicht überflüssig sein. Seit die Entwicklung der Mathematik der Erfindung der Infinitesimalrechnung zustrebte, spielten unendlich kleine Zahlen eine Rolle in den Diskussionen der Mathematiker. Selbst nach der Umgehung der Schwierigkeiten des Infinitesimalen im 19. Jahrhundert wurden immer wieder Versuche unternommen, eine befriedigende Auffassung des Unendlichkleinen zu finden. Hierher gehören besonders Überlegungen von P. DU BOIS-REYMOND. Einen neuen Anstoß gab auch VERONESES Buch „Grundlagen der Geometrie", in dem nicht-archimedische Streckenvergleichung untersucht wurde. Im Anschluß daran entwickelten T. LEVI-CIVITA und H. HAHN nicht-archimedische Größensysteme[1]). HILBERTs Beispiel einer nicht-archimedischen Geometrie ist bekannt. Ein unpräziser Versuch zur Begründung des Infinitesimalen in der Analysis wurde von K. GEISSLER unternommen[2]). Inzwischen sind nicht-archimedische Körper seit den Arbeiten von ARTIN, SCHREIER und BAER[3]) viel untersucht worden, ohne daß man sie in Beziehung zur Analysis gebracht hätte. Eine solche Beziehung scheint zunächst auch tatsächlich ausgeschlossen, weil die Analysis konkrete Begriffsbildungen erfordert, d.h. solche, die sich im Einzelfall durch Rückgriff auf die natürlichen Zahlen herstellen lassen. H. WEYL[4]) hat das folgende Prinzip als Fazit der historischen Entwicklung des Problems der arithmetischen Fixierung der einzelnen Stelle des Kontinuums formuliert: „Objekt der Zahlentheorie sind die einzelnen natürlichen Zahlen, Objekt der Kontinuumslehre die möglichen Mengen (oder die unendlichen Folgen) natürlicher Zahlen". An einem hierher gehörigen Beispiel erläutert: Es genügt nicht, unendlich große Zahlen zum rationalen Zahlkörper zu adjungieren, so daß man mit den Elementen des neuen Bereichs die rationalen Operationen ausführen kann. Vielmehr muß darüberhinaus noch feststehen, in welcher Weise (etwa als Limes einer bestimmten Folge) jedes Element von den rationalen Zahlen her erzeugt werden kann. Und ferner müssen die neuen Zahlen so beschaffen sein, daß es möglich ist, mit ihrer Hilfe die Analysis aufzubauen;

[1]) BOIS-REYMOND, P. DU: Die allgemeine Funktionentheorie. I. Tübingen 1882. — VERONESE, G.: Fondamenti di geometria, Padua 1891; deutsch: Grundzüge der Geometrie. Leipzig 1894. — LEVI-CIVITA, T.: Sugli infiniti ed infinitesimi attuali. Atti R. Istituto Veneto (7) **4**, 1765–1815 (1905). — HAHN, H.: Über die nicht-archimedischen Größensysteme. Wiener Ber. **116**, 601–655 (1907). — Vorher hat sich schon B. BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851, (auch Philos. Bibl. Bd. 99) mit der Problematik des Rechnens mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen auseinandergesetzt.

[2]) J.-Ber. DMV. **13** (1904); daselbst auch eine Diskussion mit F. BERNSTEIN u. a.

[3]) ARTIN, E., u. O. SCHREIER: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Hamb. Abh. **5**, 85–99 (1926). — BAER, R.: Über nicht-archimedisch geordnete Körper. Sitzgsber. Heidelb. **8**. Abh., 3–13 (1927).

[4]) WEYL, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, p. 33. 1928.

es müssen sich z. B. unendlich kleine Zahlen zu endlichen aufsummieren lassen können, man braucht also Summen, bei denen eine oder beide Grenzen unendlich große „ganze" Zahlen sind.

Für diejenigen Leser, die schnell zu den Anwendungsbeispielen (Kap. III) kommen wollen, haben wir im Anschluß an Kapitel I die Bezeichnungen kurz zusammengefaßt. Es genügt, von gelegentlichen Rückverweisen abgesehen, die beiden ersten Paragraphen des Kapitels I zu lesen, um einen Zugang zu den beiden folgenden Kapiteln zu haben.

Kapitel I. Grundlegung des Zahlbegriffs

§ 1. Definition der Ω-rationalen Zahlen als Limites rationaler Zahlfolgen

Wir betrachten Folgen a_Ω von rationalen Zahlen (a_n) $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Wir sagen, die Folge (a_n) habe den *Limes* a_Ω und bezeichnen a_Ω als *Ω-rationale Zahl* oder kürzer als *Ω-Zahl*[5]). Die Folge (a_n) heißt die *definierende Folge* oder die *Komponentenfolge* von a_Ω, die einzelnen Glieder der definierenden Folge heißen *Komponenten* von a_Ω. Es ist zweckmäßig, die folgende Konvention einzuführen: Falls die Folge (a_n) durch einen expliziten Ausdruck irgendeiner Art gegeben ist, so bezeichnen wir oft (wenn dadurch keine Mißverständnisse zu befürchten sind) die durch die Folge definierte Ω-Zahl a_Ω durch denselben expliziten Ausdruck, in dem die Unbestimmte n durch das Symbol Ω ersetzt wird. Zum Beispiel soll die Folge (n) die Ω-Zahl Ω definieren, die Folge (n^{-1}) die Ω-Zahl Ω^{-1}, die Folge (n^n) die Ω-Zahl Ω^Ω, die Folge $(-1)^n$ die Ω-Zahl $(-1)^\Omega$. Wir schreiben auch

$$a_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} a_n$$

(a_Ω ist Limes für $n = \Omega$ der Folge a_n).

Wir definieren:

$$a_\Omega = b_\Omega, \quad \text{wenn} \quad a_n = b_n \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n.$$
$$a_\Omega + b_\Omega = c_\Omega, \quad \text{wenn} \quad a_n + b_n = c_n \quad \text{für alle } n;$$

ebenso werden Subtraktion, Multiplikation und Division komponentenweise erklärt. Dabei ist die Division offenbar dann und nur dann erklärt, wenn jede Komponente des Nenners von 0 verschieden ist. Die Bezeichnungen für die elementaren Rechenoperationen ordnen sich unserer Bezeichnungskonvention unter.

Die Ω-Zahlen bilden einen kommutativen Ring mit Einselement, der aber Nullteiler enthält und also jedenfalls kein Körper ist: Ist $a_n = 1$ für gerade n, $a_n = 0$ für ungerade n, $b_n = 0$ für gerade n, $b_n = 1$ für ungerade n, so gilt für

[5]) a_Ω kann also aufgefaßt werden als neue Bezeichnung für die Folge (a_n). Doch legen wir Wert darauf, daß man a_Ω als eine Zahl (eines neuen Typs) ansieht. Unser Vorgehen ist in dieser Hinsicht nicht verschieden von der üblichen Auffassung, nach der gewisse Klassen von rationalen Zahlfolgen als neue Zahlen eingeführt werden.

die dadurch definierten Ω-Zahlen $a_\Omega \cdot b_\Omega = 0$, ohne daß einer der beiden Faktoren gleich 0 wäre[6]).

Die Nullteiler lassen sich offensichtlich durch eine einfache Eigenschaft ihrer Komponentenfolgen kennzeichnen:

Eine Ω-Zahl a_Ω ist dann und nur dann Nullteiler, wenn die Komponentenfolge (a_n) mindestens eine 0 enthält.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, daß der Ring der Ω-Zahlen ein *Quotientenring* ist: *man kann durch jeden Nicht-Nullteiler dividieren.*

Eine Ω-Zahl heiße *ganz*, wenn jede ihrer Komponenten ganzrational ist. Die ganzen Zahlen bilden wieder einen Ring mit Nullteilern. Es ist leicht zu sehen, daß *jede Ω-rationale Zahl Quotient zweier ganzer Ω-Zahlen* ist, wobei die Komponenten des Nenners als natürliche Zahlen angenommen werden können.

Wir wollen jetzt noch eine Klasse von Ω-Zahlen ausführlicher behandeln, die in den Anwendungen eine besonders wichtige Rolle spielt, da die meisten in konkreten Fragestellungen auftretenden Zahlen zu dieser Klasse gehören. Wir wollen eine Ω-Zahl *quasirational* nennen, wenn sie sich durch endlich viele rationale Operationen $(+, -, \cdot\ :)$ und „quasirationale" Operationen Σ, Π aus 1 und Ω herstellen läßt. Dabei ist der Gebrauch der Zeichen Σ und Π in der folgenden Weise erklärt:

$$\sum_{\nu=g_\Omega}^{h_\Omega} f_{\Omega,\nu} \quad \text{bzw.} \quad \prod_{\nu=g_\Omega}^{h_\Omega} f_{\Omega,\nu} \quad (g_\Omega, h_\Omega \text{ ganz};\ g_n \leq h_n)$$

sind diejenigen Ω-Zahlen, deren Komponentenfolgen sind

$$\sum_{\nu=g_n}^{h_n} f_{n,\nu} \quad \text{bzw.} \quad \prod_{\nu=g_n}^{h_n} f_{n,\nu}.$$

Offenbar sind die folgenden Ω-Zahlen quasirational:

$$\left(1+\frac{1}{\Omega}\right)^\Omega = \prod_{\nu=1}^{\Omega}\left(1+\frac{1}{\Omega}\right); \quad \sum_{\nu=0}^{\Omega}\frac{1}{\nu!}; \quad \sum_{\nu=1}^{\Omega^\Omega}\frac{(-1)^\nu}{\nu}.$$

§ 2. Anordnungsbeziehungen

Die Größer-Beziehung im Körper der rationalen Zahlen (dem Komponentenkörper) gibt Veranlassung zu entsprechenden Begriffsbildungen für die Ω-Zahlen selbst. Es ist zweckmäßig, mehrere voneinander geringfügig verschiedene Anordnungsbeziehungen für Ω-Zahlen einzuführen. Wir erklären zunächst jeweils die Positivität oder die ihr entsprechende Eigenschaft.

Die stärkste mögliche Forderung in dieser Richtung ist offenbar:

Definition. *Eine Ω-Zahl a_Ω heiße positiv, $a_\Omega > 0$, wenn jede Komponente a_n positiv ist.*

[6]) Der Ring der Ω-Zahlen enthält einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Unterring, wenn der konstanten Folge $a_n = a$ die rationale Zahl a als Limes (für $n = \Omega$) zugeordnet wird.

Eine schwächere Relation ist die folgende:

Definition. *Eine Ω-Zahl a_Ω heiße schwach positiv, wenn schließlich alle Komponenten positiv sind; wir schreiben* $a_\Omega \gtrdot 0$.

(Die öfter zu verwendende Bezeichnung „schließlich für alle Komponenten" bedeutet: Für alle Komponenten mit Indizes $n > N$ für irgendeine, von der Zahl a_Ω abhängige natürliche Zahl N.)

Es sei sogleich bemerkt, daß wie im Falle der Positivität zu jeder von den rationalen Zahlen auf die Ω-Zahlen übertragenen Relation die entsprechende „schwache" Relation gehört, bei der die definierende Forderung nur jeweils schließlich erfüllt zu sein braucht. Wir werden darauf im folgenden nicht immer ausdrücklich einzugehen brauchen und wollen jetzt schon bemerken, daß wir die schwache Relation jeweils durch einen Punkt unter dem Relationszeichen kennzeichnen wollen. Um ein einfaches und auch wichtiges Beispiel zu betrachten, wollen wir kurz die schwache Gleichheit untersuchen: $a_\Omega \doteq b_\Omega$, wenn schließlich alle Komponenten gleich sind. Diese Relation ist, wie man leicht nachprüft, eine Äquivalenzrelation. Bezeichnet man alle Zahlen, deren Komponenten schließlich gleich 0 sind, als Nullzahlen, so gilt: Zwei Zahlen sind dann und nur dann schwach gleich, wenn ihre Differenz eine Nullzahl ist.

Aus der Positivität und der schwachen Positivität ergeben sich naheliegende Erklärungen für die Beziehungen *„größer"* und *„schwach größer"*:

Definition. $a_\Omega > b_\Omega$, *wenn* $a_\Omega - b_\Omega > 0$. *(Wir schreiben dann auch* $b_\Omega < a_\Omega$.*)*

$a_\Omega \dot{>} b_\Omega$, *wenn* $a_\Omega - b_\Omega \gtrdot 0$. (Wir schreiben dann auch $b_\Omega \dot{<} a_\Omega$.)

Beide Relationen sind transitiv und gehen für rationale Zahlen in die übliche Größer-Beziehung über. Es darf dem Leser überlassen bleiben, zu zeigen, daß Verträglichkeit beider Anordnungsbeziehungen mit der Ringstruktur vorliegt. Dies gilt auch für die folgende Relation *„Größer-gleich"*, welche sich ebenfalls mittels der Anordnung der rationalen Zahlen einführen läßt:

Definition: $a_\Omega \geq b_\Omega$ *(a_Ω größer-gleich b_Ω), wenn a_n größer oder gleich b_n für alle Komponenten (entsprechend für* $a_\Omega \dot{\geq} b_\Omega$: *... schließlich für alle Komponenten).*

Wir weisen darauf hin, daß aus der Gültigkeit der Relation $a_\Omega \geq b_\Omega$ nicht zu folgen braucht, daß a_Ω entweder größer oder gleich b_Ω sei. Die Relation ist deshalb mit „größer-gleich" und nicht mit „größer oder gleich" zu bezeichnen.

Von je zwei rationalen Zahlen ist stets die eine größer als die andere, falls nicht beide gleich sind. Für Ω-Zahlen gilt diese totale Ordnung nicht: Die Ω-Zahl $(-1)^\Omega$ ist weder gleich 0 noch kleiner oder größer als 0; für dieses Zahlenpaar gilt nicht einmal eine der schwächeren Relationen $\dot{>}$, $\geq$, $\dot{\geq}$. Dieses Fehlen einer totalen Ordnung liegt natürlich daran, daß wir hier zunächst allen Folgen Grenzwerte zugeordnet haben. Später werden wir auch

Untermengen der Menge der Ω-Zahlen untersuchen, die vermöge einer geeigneten Relation totalgeordnet sind.

Jeder Ω-Zahl a_Ω kann man einer zweite, ihren *absoluten Betrag* $|a_\Omega|$, zuordnen, deren Komponenten die absoluten Beträge $|a_n|$ der Komponenten a_n sind. Es gilt offenbar stets $|a_\Omega| \geqq 0$. Ist für eine Ω-Zahl a_Ω sogar $|a_\Omega| > 0$, so sagen wir, die Ω-Zahl a_Ω liege entfernt von 0. Zwei Zahlen mögen *entfernt voneinander gelegen* heißen (in Zeichen $a_\Omega \# b_\Omega$), wenn ihre Differenz entfernt von 0 liegt. Nach dem in § 1 angegebenen Kriterium für Nullteiler haben wir:

Eine Zahl liegt dann und nur dann entfernt von 0, wenn sie von 0 verschieden und kein Nullteiler ist.

Es mag nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, daß es zu je zwei Ω-Zahlen a_Ω und b_Ω eine weitere, c_Ω, gibt, welche von keiner der beiden entfernt liegt. Man definiere c_Ω durch die Komponentenfolge $c_{2n-1} = a_{2n-1}$, $c_{2n} = b_{2n}$.

§ 3. Größenordnung

Die Zahl Ω hat die folgende Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl N gilt $\Omega \geqq N$. Es gibt also keine natürliche Zahl, die (schwach) größer wäre als Ω. *Im Ring der Ω-Zahlen gilt das archimedische Axiom in der üblichen Form also nicht*, dieser Ring ist nicht-archimedisch; einen das archimedische Axiom ersetzenden Sachverhalt werden wir sogleich kennenlernen. Zunächst wollen wir verabreden, daß Zahlen, die (wie Ω) von den natürlichen Zahlen her unerreichbar sind, „*unendlich groß*" heißen sollen:

Definition. *Die Ω-Zahl a_Ω heißt unendlich groß, wenn für jede natürliche Zahl N gilt $a_\Omega \geqq N$.*

Und entsprechend:

Definition. *Eine Ω-Zahl a_Ω heißt unendlich klein (oder infinitesimal), wenn für jede natürliche Zahl N gilt $|a_\Omega| \leqq \frac{1}{N}$.*

Den angekündigten Ersatz für das archimedische Postulat bildet der folgende Satz:

Zu je zwei positiven Ω-Zahlen a_Ω, b_Ω existiert eine positive ganze Ω-Zahl N_Ω mit $N_\Omega a_\Omega > b_\Omega$.

Beweis. Die Komponenten N_n werden so bestimmt, daß $N_n a_n > b_n$. Dabei wird also ausgenützt, daß die rationalen Zahlen archimedisch angeordnet sind.

Wir kommen jetzt zur Definition von Größenordnungsbeziehungen, durch welche sowohl im Unendlichgroßen als auch im Infinitesimalen verschiedene, relativ zueinander wiederum unendlich große bzw. unendlich kleine Bezirke angebbar werden.

Definition, *Es seien zwei Ω-Zahlen $a_\Omega \geqq 0$, $b_\Omega \geqq 0$ gegeben. Dann heißt a_Ω relativ unendlich groß gegen b_Ω, $a_\Omega \gg b_\Omega$, (oder auch b_Ω relativ unendlich klein gegen a_Ω, $b_\Omega \ll a_\Omega$) wenn $a_\Omega \geqq N \cdot b_\Omega$ für jede natürliche Zahl N.*

Für von 0 entfernt gelegene Zahlen kann noch eine andere Relation erklärt werden:

Definition. *Sind a_Ω, b_Ω zwei (nicht notwendig schwach positive) Ω-Zahlen mit $a_\Omega \neq 0$, $b_\Omega \neq 0$, so heißen a_Ω und b_Ω von gleicher Größenordnung, $a_\Omega \sim b_\Omega$, wenn der Quotient a_n/b_n schließlich zwischen festen positiven rationalen Schranken liegt.*

Es lassen sich sofort einige einfache Folgerungen ziehen, deren naheliegende Beweise wir dem Leser überlassen dürfen.

1. Jede der drei Relationen $a_\Omega \gg b_\Omega$, $a_\Omega \sim b_\Omega$, $a_\Omega \ll b_\Omega$ schließt jede andere aus. Zwischen zwei Ω-Zahlen besteht höchstens eine der drei Beziehungen $\gg$, $\sim$, $\ll$. Es gibt Beispiele, für die keine der drei Relationen erfüllt ist: $a_\Omega = 1$, $b_\Omega = 1 + \Omega\left(1 + (-1)^\Omega\right)$.

2. Die Relationen sind mit der algebraischen Struktur des Ringes verträglich. Wir erwähnen einige leicht zu beweisende Regeln der Kürze halber nur für den Fall, daß alle auftretenden Ω-Zahlen *positiv* sind, obwohl einige der Regeln, wie der Leser selbst bemerken wird, auch allgemeiner gelten.

$a_\Omega \sim b_\Omega$ ist eine *Äquivalenzrelation*; die Klassen heißen *Größenordnungen*.

Aus $a_\Omega \sim b_\Omega$ folgt $1/a_\Omega \sim 1/b_\Omega$. — Aus $a_\Omega \sim b_\Omega$, $a'_\Omega \sim b'_\Omega$ folgen $a_\Omega + a'_\Omega \sim b_\Omega + b'_\Omega$ und $a_\Omega \cdot a'_\Omega \sim b_\Omega \cdot b'_\Omega$.

Zu jeder (positiven) Ω-Zahl a_Ω gibt es (positive) Ω-Zahlen a'_Ω bzw. a''_Ω, welche relativ unendlich groß bzw. relativ unendlich klein gegen a_Ω sind. (Man setze etwa $a'_\Omega = \Omega \cdot a_\Omega$, $a''_\Omega = \omega \cdot a_\Omega$ mit $\omega = 1/\Omega$). Eine Nullzahl ist relativ unendlich klein gegen jede positive Ω-Zahl. (Die Nullzahlen können also als absolut unendlich klein bezeichnet werden.)

Aus $a_\Omega \gg a'_\Omega$, $b_\Omega \gtrsim b'_\Omega$ (oder statt dessen $b_\Omega \sim b'_\Omega$) folgt $a_\Omega \cdot b_\Omega \gg a'_\Omega \cdot b'_\Omega$.

Weitere Regeln überlegt man ebenso einfach; es ist jedoch unnötig, hier mehr als die angegebenen Beispiele aufzuweisen, da man in jedem Fall durch Rückgang auf die Definitionen über die Größenbeziehungen entscheiden kann.

Zur Bezeichnungsweise ist noch zu bemerken, daß $\gg$ eigentlich als eine „schwache" Relation durch $\gtrsim$ bezeichnet werden müßte. Da die entsprechende starke Relation keine Rolle spielt, lassen wir der Einfachheit halber den Punkt weg.

Die Relation $\gg$ gibt Veranlassung zur Einführung einer für das Spätere wichtigen Relation:

Definition. *Zwei Ω-Zahlen heißen von gleicher Größe (nicht zu verwechseln mit Größenordnung), wenn ihre Differenz, absolut genommen, relativ unendlich klein gegen den Absolutbetrag der ersten von ihnen ist:*

$$a_\Omega \approx b_\Omega, \quad \text{wenn} \quad |a_\Omega - b_\Omega| \ll |a_\Omega|.$$

Wir beweisen nun zunächst, daß die damit eingeführte Relation eine Äquivalenzrelation ist; die zugehörigen Äquivalenzklassen wollen wir als „*Größen*" bezeichnen.

Trivialerweise gilt $x_\Omega \approx x_\Omega$ für jede Ω-Zahl x_Ω. Als nächstes ist zu zeigen, daß aus $x_\Omega \approx y_\Omega$ folgt $y_\Omega \approx x_\Omega$. Es ist also vorausgesetzt

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n+1} |x_N| \quad \text{für} \quad N \geq N(n),$$

und somit folgt

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n+1} |x_N| \leq \frac{1}{n+1} |y_N| + \frac{1}{n+1} |x_N - y_N|,$$

also

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n} |y_N| \quad \text{für} \quad N \geq N(n),$$

d.h. $|x_\Omega - y_\Omega| \ll |y_\Omega|$ oder, wie behauptet, $y_\Omega \approx x_\Omega$.

Schließlich ist noch die Transitivität der Relation $\approx$ zu beweisen; es gelte sowohl $x_\Omega \approx y_\Omega$ als auch $y_\Omega \approx z_\Omega$. Für $N \geq N'(n)$ gilt dann (unter Benutzung des bereits Bewiesenen)

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{2n+1} |y_N| \quad \text{und} \quad |y_N - z_N| \leq \frac{1}{2n+1} |y_N|.$$

Daraus folgt

$$|x_N - z_N| \leq |x_N - y_N| + |y_N - z_N| \leq \frac{2}{2n+1} |y_N|$$

$$\leq \frac{2}{2n+1} \{|x_N| + |x_N - y_N|\} \leq \frac{2}{2n+1} \left\{|x_N| + \frac{1}{2n} |x_N|\right\}.$$

(Die letzte Ungleichung ergibt sich wie im Beweis der Symmetrie der Relation.) Mithin gilt $|x_N - z_N| \leq \frac{1}{n} |x_N|$ oder tatsächlich $x_\Omega \approx z_\Omega$.

Es ist zu beachten, daß aus $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$ im allgemeinen nicht folgt $x_\Omega + y_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega$, wie man am Beispiel $x_\Omega = 1$, $x'_\Omega = 1 + \omega$, $y_\Omega = y'_\Omega = -1$ sieht. Sind aber die Komponenten aller auftretenden Ω-Zahlen schließlich nicht negativ, d.h. gilt $x_\Omega \gneqq 0$ usw., so folgt tatsächlich:

Sind die Komponenten von x_Ω, x'_Ω, y_Ω, y'_Ω schließlich nicht negativ und gelten die Beziehungen $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$, so gilt auch

$$x_\Omega + y_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $x_\Omega + y_\Omega \approx x_\Omega + y'_\Omega$:

$$|(x_\Omega + y_\Omega) - (x_\Omega + y'_\Omega)| = |y_\Omega - y'_\Omega| \ll |y_\Omega|,$$

da nach Voraussetzung $y_\Omega \approx y'_\Omega$. Nun gilt aber schließlich $x_N \geq 0$, also $y_N \leq x_N + y_N$, so daß erst recht

$$|(x_\Omega + y_\Omega) - (x_\Omega + y'_\Omega)| \ll |x_\Omega + y_\Omega|, \quad \text{d.h. aber} \quad x_\Omega + y_\Omega \approx x_\Omega + y'_\Omega.$$

Ebenso beweist man, daß $x_\Omega + y'_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega$, und aus beidem zusammen folgt die Behauptung.

Korollar: *Das Entsprechende gilt, wenn alle beteiligten Ω-Zahlen schließlich nicht positive Komponenten haben.*

Während also die Addition von Größenklassen nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen möglich ist, hat man für die Multiplikation ohne Einschränkung:

Aus $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$ *folgt* $x_\Omega y_\Omega \approx x'_\Omega y'_\Omega$.

Beweis. Wir beweisen als erstes wieder $x_\Omega y_\Omega \approx x_\Omega y'_\Omega$: $|x_\Omega y_\Omega - x_\Omega y'_\Omega| = |x_\Omega| \cdot |y_\Omega - y'_\Omega|$. Nach Voraussetzung ($y_\Omega \approx y'_\Omega$) folgt daraus aber für $N \geq N(n)$

$$|x_N y_N - x_N y'_N| = |x_N| \cdot |y_N - y'_N| \leq \frac{1}{n} |x_N| \cdot |y_N| = \frac{1}{n} |x_N \cdot y_N|,$$

also $x_\Omega y_\Omega \approx x_\Omega y'_\Omega$. Ebenso beweist man $x_\Omega y'_\Omega \approx x'_\Omega y'_\Omega$, woraus wieder wegen der Transitivität der Relation $\approx$ die Behauptung folgt.

Diese beiden Bemerkungen erlauben es, das Produkt und unter gewissen Bedingungen auch die Summe zweier Größenklassen durch die Größenklassen des Produktes bzw. der Summe von Repräsentanten zu erklären.

§ 4. Endliche Zahlen und reelle Zahlklassen

Unter den Größenordnungsklassen spielt eine eine ausgezeichnete Rolle, nämlich die Klasse, in der die rationalen Zahlen liegen. Die Ω-Zahlen dieser Klasse bezeichnen wir als endliche Zahlen. Sie spielen noch nicht die Rolle der reellen Zahlen der gewöhnlichen Analysis; um zu einer solchen Zahl zu kommen, müssen wir nämlich noch zusätzlich verlangen, daß die endliche Zahl mit den rationalen Zahlen vergleichbar sei; genauer wird definiert:

Definition der reellen Ω-Zahlen.

Eine Ω-rationale Zahl r_Ω heißt reelle Ω-rationale Zahl, wenn folgendes gilt:

a) Es gibt zwei rationale Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 so daß

$$\varrho_1 \lesssim r_\Omega \lesssim \varrho_2;$$

b) Ist r' eine beliebige rationale Zahl, so gilt stets mindestens eine der folgenden drei Beziehungen

$$r' \gtrsim r_\Omega \quad \text{oder} \quad |r' - r_\Omega| \ll 1 \quad \text{oder} \quad r' \lesssim r_\Omega.$$

(Es darf also vorkommen, daß z.B. die zweite und eine der beiden anderen Beziehungen erfüllt sind, wie es für $r_\Omega = \omega$ und $r' = 0$ zutrifft.)

Eine *reelle Zahlklasse* (nicht „Ω-Zahl") oder ausführlicher *Dedekindsche reelle Zahlklasse* ist eine Klasse von reellen Ω-rationalen Zahlen, deren Differenzen unendlich klein sind.

Offenbar sind die so definierten Dedekindschen reellen Zahlklassen tatsächlich identisch mit den in üblicher Weise definierten reellen Zahlen, die als Klassen der definierenden Folgen der Ω-Zahlen aufgefaßt werden können.

Es ist nämlich leicht zu sehen, daß die „Nullfolgen" der üblichen Analysis umkehrbar eindeutig den Komponentenfolgen der unendlich kleinen Zahlen entsprechen, da eine „Nullfolge" hier als Limes für $n = \Omega$ eine unendlich kleine Zahl hat und umgekehrt eine unendlich kleine Zahl eine Komponentenfolge

besitzt, die im üblichen Sinne eine „Nullfolge" ist, wie direkt aus der Definition der unendlich kleinen Zahlen folgt.

Es ist ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß wir damit keineswegs das Dedekindsche Axiom (oder ein dazu äquivalentes) einführen und damit im wesentlichen zur üblichen Analysis kämen. Vielmehr bleiben wir dabei, daß mit Ω-Zahlen und nicht mit Klassen zu rechnen ist. Die Einführung der Dedekindschen reellen Zahlklassen soll nur zwei Zwecken dienen. Einmal wird dadurch ein Vergleich von Ergebnissen der Ω-Analysis mit solchen der gewohnten Analysis ermöglicht; und zum andern ist es gelegentlich zweckmäßig, den Begriff der reellen Zahlklasse zur Hand zu haben, weil er für viele Gesichtspunkte wesentlich ist, unter anderem deswegen, weil die reellen Zahlklassen einen vollgeordneten Körper bilden.

Es ist oft zweckmäßig, reelle Zahlklassen durch geeignete Repräsentanten zu bezeichnen, z. B. die Klasse der unendlich kleinen Zahlen mit 0 usw. Um diese Bezeichnungsweise unmißverständlich durchführen zu können, wollen wir die folgende Äquivalenzrelation einführen: $a_\Omega \cong b_\Omega$ („a_Ω endlich-gleich b_Ω"), wenn die Differenz unendlich klein ist. Es ist ferner zweckmäßig, das Zeichen $\cong$ auch für die Zugehörigkeit einer Ω-Zahl zu einer reellen Zahlklasse zu verwenden. Zum Beispiel gilt also

$$1 + \omega(-1)^\Omega \cong 1 \qquad \left(\omega = \frac{1}{\Omega}\right)$$

(Endlich-Gleichheit zweier Ω-Zahlen); und bezeichnet man etwa die reelle Zahlklasse, in der die reelle Ω-Zahl $(1+\omega)^\Omega$ liegt, mit dem Buchstaben e, so ist also für die Zugehörigkeit der Zahl zur Klasse e zu schreiben

$$(1 + \omega)^\Omega \cong e.$$

Hier darf nicht das Gleichheitszeichen stehen, weil Gleichheit nur für gleichartige Größen, etwa Zahlen, erklärt ist, während das Zeichen $\cong$ kraft unserer ausdrücklichen Festsetzung auch für die Zugehörigkeit zu einer Klasse steht, im Beispiel also für $(1+\omega)^\Omega \in e$.

Zur Bezeichnungsweise ist weiter zu bemerken, daß die Größer-Relation zwischen reellen Zahlklassen wie üblich durch das Zeichen $>$ angegeben werden soll. Dies ist sinnvoll, weil zu je zwei reellen Zahlklassen a, b Elemente $a_\Omega \cong a$, $b_\Omega \cong b$ gefunden werden können, so daß entweder $a_\Omega < b_\Omega$ oder $a_\Omega > b_\Omega$. Es ist aber zu beachten, daß dies nicht für je zwei beliebige Repräsentanten gelten wird. Im allgemeinen muß das Zeichen $>$ beim Übergang zu Repräsentanten durch das Zeichen $\dot{>}$ ersetzt werden:

$$e > \frac{5}{2} \quad \text{(für die Klassen), aber}$$

$$(1 + \omega)^\Omega \dot{>} \frac{5}{2} \quad \text{(für ein Paar von Repräsentanten).}$$

Aus dieser Bemerkung kann man entnehmen, daß hier im allgemeinen die Relation $\dot{>}$ der Relation $>$ der gewohnten Analysis entsprechen wird. Daß wir daneben auch die stärkere Relation $>$ in der Ω-Analysis benötigen, wird sich schon im nächsten Abschnitt zeigen.

§ 5. Der Begriff des Grenzwertes einer Folge von Ω-Zahlen

Ist jeder natürlichen Zahl p eine Ω-Zahl $a_\Omega^{(p)}$ zugeordnet, so sprechen wir von einer Folge vom Ω-Zahlen. Ebenso kann man Doppelfolgen $a^{(p,q)}$ definieren.

Definition des Grenzwerts einer Folge von Ω-Zahlen.

Sei $a_\Omega^{(p)}$ eine Folge von Ω-Zahlen und sei g_Ω eine unendlich große positive ganze Ω-Zahl; dann definieren wir eine Ω-Zahl

$$\operatorname*{Lim}_{p=g_\Omega} a_\Omega^{(p)} = a_\Omega^{(g_\Omega)} = b_\Omega$$

dadurch, daß ihre definierende Folge (Komponentenfolge), wie es schon die Bezeichnung angibt, gegeben ist durch

$$b_n = a_n^{(g_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Diese Ω-Zahl heißt der Limes oder Grenzwert der Folge für die unendlich große positive ganze Ω-Zahl g_Ω.

Man beachte, daß g_Ω wirklich (stark) positiv sein muß und daß nicht etwa $g_\Omega \dot{>} 0$ ausreicht. Denn um die Komponenten des Grenzwerts bilden zu können, müssen alle g_n positive ganze Zahlen sein. Dies ist das am Ende des vorigen Abschnitts angekündigte Beispiel dafür, daß hier gelegentlich auch die stärkere Relation $>$ benötigt wird, während — wie wir dort sahen — es in vielen Fällen auf die Relation $\dot{>}$ ankommt.

Man kann diese Definition des Limes speziell anwenden auf den Fall, daß die einzelnen Glieder der Folge sämtlich rationale Zahlen sind, also gar nicht von Ω abhängen:

$$a_\Omega^{(p)} = a_p, \quad a_p \text{ rationale Zahl.}$$

Dann ergibt

$$\operatorname*{Lim}_{p=\Omega} a_\Omega^{(p)} = a_\Omega$$

gerade diejenige Ω-Zahl, deren definierende Folge a_n ist. Die Definition des Grenzwerts verallgemeinert also die in § 1 gegebene Definition der Ω-rationalen Zahlen. Es ist aber bemerkenswert, daß jeder Limes einer Folge von Ω-rationalen Zahlen wieder eine Ω-rationale Zahl ist.

Zu jeder Ω-Zahl gehören nun aber auch noch weitere Ω-Zahlen, die durch die Limites der Komponentenfolge von Ω für unendlich große positive ganze Ω-Zahlen gegeben sind. Das Verhältnis der Ω-Zahl a_Ω zu den mit ihr auf diese Weise verknüpften Ω-Zahlen a_{g_Ω} erläutert in einem speziellen, besonders wichtigen Fall der folgende Satz, der zugleich eine Motivation für die Bezeichnung „Grenzwert" liefert:

Hauptsatz über reelle Zahlklassen.

Wenn $\operatorname*{Lim}_{p=\Omega} a^{(p)} \cong r$ (r eine reelle Zahlklasse), so gilt

$$\operatorname*{Lim}_{p=g_\Omega} a^{(p)} \cong r$$

für jede unendlich große positive ganze Ω-Zahl g_Ω.

Beweis. Die Voraussetzung, daß $r \cong a^{(\Omega)}$ eine reelle Zahlklasse sei, bedeutet nach Definition: Zu jeder rationalen Zahl ϱ steht fest, welche der drei Relationen

$$r \lesssim \varrho, \quad r \cong \varrho, \quad r \gtrsim \varrho$$

gilt, und mindestens eine von ihnen ist wirklich erfüllt. Betrachten wir etwa das Kleiner-Zeichen; es gelte also

$$a^{(\Omega)} \lesssim \varrho.$$

Dies heißt nach Definition: Es gibt ein N_0, so daß für $n \geq N_0$ gilt $a^{(n)} < \varrho$. Andererseits gibt es, weil g_Ω unendlich groß ist, ein N_1 (welches von N_0 abhängen darf) so, daß $g_n > N_0$ für $n \geq N_1$. Daher hat man für $n > N_2 = \mathrm{Max}\,(N_0, N_1)$:

$$a^{(g_n)} < \varrho,$$

also $a^{(g_\Omega)} \lesssim \varrho$. Ebenso verläuft die Argumentation für $\gtrsim$ anstelle von $\lesssim$. Mithin liegt $a^{(g_\Omega)}$ zwischen den gleichen rationalen Schranken wie $a^{(\Omega)}$. Das bedeutet für reelles $a^{(\Omega)}$, daß $a^{(g_\Omega)}$ in die gleiche reelle Zahlklasse fällt, was zu beweisen war.

Aus dem Beweis folgt übrigens noch etwas mehr: Man kann z. B. genauso schließen, daß aus $a_\Omega \gtrsim \varrho$ für eine rationale Zahl ϱ folgt $a_{g_\Omega} \gtrsim \varrho$ für alle unendlich großen ganzen positiven g_Ω; ist also a_Ω unendlich groß, so auch a_{g_Ω}.

Dieser *Hauptsatz über reelle Zahlklassen* hängt übrigens eng mit dem Satz der gewohnten Analysis zusammen, nach dem jede unendliche Teilfolge einer Cauchy-konvergenten Folge ebenfalls konvergiert und den gleichen Grenzwert (im gewohnten Sinne) hat.

Sei nun $a_\Omega^{(p,q)}$ eine Doppelfolge von Ω-Zahlen, so daß also für jedes feste p bzw. q eine Folge von Ω-Zahlen mit laufendem Index q bzw. p vorliegt, und seien g_Ω und h_Ω zwei nicht notwendig verschiedene unendlich große positive ganze Ω-Zahlen. Dann kann man bilden

$$\operatorname*{Lim}_{p=g_\Omega} a_\Omega^{(p,q)} = b_\Omega^{(q)} = a_\Omega^{(g_\Omega, q)}$$

für jedes feste q, und anschließend

$$\operatorname*{Lim}_{q=h_\Omega} b_\Omega^{(q)} = b_\Omega^{(h_\Omega)} = a_\Omega^{(g_\Omega, h_\Omega)}.$$

Man erhält nach diesem doppelten Grenzübergang also diejenige Ω-Zahl $a_\Omega^{(g_\Omega, h_\Omega)}$, deren Komponenten durch $a_n^{(g_n, h_n)}$ gegeben sind. Die gleiche Ω-Zahl erhält man aber offenbar auch, wenn man zunächst den Grenzübergang $q = h_\Omega$ und anschließend den Grenzübergang $p = g_\Omega$ ausführt.

Das Ergebnis zweier Grenzübergänge ist von der Reihenfolge ihrer Ausführung unabhängig. Die Reihenfolge von Grenzübergängen ist vertauschbar.

Es ist nötig, einige Worte über den Unterschied des hier eingeführten Limesbegriffs zu dem der üblichen Analysis zu sagen. In unserem Aufbau hat jede Folge von Ω-Zahlen für jede beliebige unendlich große positive ganze

Ω-Zahl einen Grenzwert. Dadurch werden auch solchen Folgen Grenzwerte zugeordnet, die nach der üblichen Analysis divergieren. Dies hat den Vorteil, daß man sich im Verlauf einer Rechnung nicht um Konvergenzbeweise zu kümmern braucht, sondern erst das Endergebnis daraufhin zu prüfen hat, ob es in eine reelle Zahlklasse fällt (falls diese Tatsache im speziellen Fall überhaupt interessiert). Andererseits wird der Grenzwert im allgemeinen explizit von der Grenze abhängen; allerdings ist nach dem Hauptsatz sicher, daß alle Grenzwerte in dieselbe reelle Zahlklasse fallen, sobald die definierende rationale Zahlfolge im üblichen Sinne CAUCHY-konvergent ist, und daß diese Limesklasse mit dem Grenzwert der Folge (im üblichen Sinne genommen) der Einordnung in die rationalen Zahlen nach übereinstimmt. Das sichert die Übereinstimmung der hier vorgeschlagenen Analysis mit den Ergebnissen der üblichen Analysis in den Fällen, in denen beide anwendbar sind.

Dem scheint zunächst zu widersprechen, daß hier die Reihenfolge von Grenzübergängen stets vertauschbar ist, was in der üblichen Analysis ja nicht zutrifft. Wir diskutieren dazu zunächst als ein ganz einfaches Beispiel die Doppelfolge von rationalen Zahlen

$$a^{(p,q)} = \frac{1}{1+\frac{p}{q}},$$

für die in der üblichen Analysis gilt:

$$\lim_{q\to\infty}\lim_{p\to\infty} a^{(p,q)} = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} a^{(p,q)} = 1.$$

Bei uns gilt hingegen (natürlich unabhängig von der Reihenfolge)

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{p=g_\Omega\\ q=h_\Omega}} a^{(p,q)} = \frac{1}{1+\frac{g_\Omega}{h_\Omega}}.$$

Wir wollen das Ergebnis der gewohnten Analysis von unserem Standpunkt interpretieren. Führt man zunächst den Grenzübergang $p = g_\Omega$ (entsprechend $p \to \infty$) aus, so ergibt sich

$$\frac{1}{1+\frac{g_\Omega}{q}}$$

also für jedes endliche $q = 1, 2, 3, \ldots$ eine unendlich kleine Zahl. Man kann nun sagen, daß die gewohnte Analysis diese unendlich kleine Zahl durch einen anderen Repräsentanten derselben Zahlklasse, nämlich durch 0, ersetzt, so daß sich dann beim zweiten Grenzübergang natürlich 0 ergibt. Bei uns ist es unstatthaft, im Verlaufe einer Rechnung zu anderen Repräsentanten überzugehen, und daher ist es möglich, daß eine Folge von unendlich kleinen Zahlen (wie hier im Beispiel) zu einem endlichen Grenzwert führt. Das Ergebnis der gewohnten Analysis kann aber bei uns jederzeit reproduziert werden. Soll etwa $p \to \infty$ zuerst ausgeführt werden, so setze man voraus $g_\Omega \gg h_\Omega$; dann erhält man einen Grenzwert, der in die Klasse fällt, die durch den Grenzwert der üblichen Analysis gegeben ist. Man verliert also auch hier nichts gegen-

über der gewohnten Analysis, gewinnt aber den Vorteil, daß man sich im Verlauf einer Rechnung keine Gedanken über die Vertauschbarkeit einer Reihenfolge von Grenzübergängen zu machen braucht; ist das Endergebnis eine reelle Zahl, so ist nach dem Hauptsatz deren Klasse insofern unabhängig von der speziellen Wahl der unendlich großen Grenzen, als Ω durch irgendeine andere unendlich große ganze positive Ω-Zahl ersetzt werden darf.

Zum Hauptsatz ist noch zu bemerken, daß es wesentlich ist, vorauszusetzen, der Limes für Ω falle in eine reelle Zahlklasse, um folgern zu können, daß alle Limites in die gleiche Klasse fallen. Es gilt im allgemeinen nicht, daß dafür schon genügt, der Limes für irgendeine (von Ω verschiedene) unendlich große positive ganze Ω-Zahl sei reell. Dies sieht man am Beispiel der Folge $a_n = (-1)^n$: Deren Limes für die Zahl 2Ω ist reell, und zwar gleich 1, doch der Limes für $n = \Omega$ ist nicht reell.

Weitere, interessantere Beispiele zur Vertauschbarkeit von Grenzprozessen werden später gegeben werden.

Wichtige Beispiele für Folgen werden durch die bereits früher eingeführten unendlichen Summen und Produkte geliefert. Nach dem Hauptsatz ist wiederum klar, daß jede unendliche Summe (ebenso jedes Produkt), welche auch nach der gewohnten Analysis konvergiert, hier eine reelle Zahl aus der entsprechenden Klasse liefert. Es ist aber zu bemerken, daß hier auch solche Ausdrücke einen Sinn haben, die gemäß der gewohnten Analysis divergieren, und daß mit ihnen gerechnet werden darf. Dadurch ist es z.B. möglich, mit „divergenten" Reihen so zu rechnen, wie es noch bis zu EULERs Zeit üblich war. Wir geben nur das einfachste und bekannteste Beispiel von BERNOULLI an: Die Gleichung

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)} = 1$$

kann man nach einem Ansatz von BERNOULLI so beweisen:

$$\sum_{p=1}^{\Omega} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \sum_{p=1}^{\Omega} \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{\Omega+1} \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{\Omega+1}.$$

Also gilt die behauptete Gleichung, und zwar nach dem Hauptsatz unabhängig von der oberen Grenze.

Zwei Abkürzungen, die sich nach der Bezeichnungskonvention aus § 1 fast von selbst verstehen, seien noch ausdrücklich eingeführt. Produkte mit lauter gleichen Faktoren schreiben wir als Potenzen:

$$\prod_{p=1}^{g_\Omega} a_\Omega = a_\Omega^{g_\Omega} \quad (g_\Omega \geq 1).$$

Für die Produkte

$$\prod_{p=1}^{g_\Omega} p \quad (g_\Omega \geq 1)$$

schreiben wir kurz $g_\Omega!$ (Fakultät).

Nach der Einführung des Grenzwertbegriffs wird nun auch ersichtlich, aus welchem Grunde die (starke) Gleichheit ($=$) der schwachen Relation ($\doteq$) vorzuziehen ist. Betrachten wir dazu als Beispiel die Doppelfolge

$$\delta_{m\,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$a_n = \delta_{\Omega\,n} \doteq 0 \qquad \text{für jedes } n$$

$$b_m = \delta_{m\,\Omega} \doteq 0 \qquad \text{für jedes } m,$$

aber

$$\lim_{n=\Omega} a_n = \lim_{m=\Omega} b_m = \delta_{\Omega\,\Omega} = 1.$$

Wollte man also Limesprozesse für „schwache" Gleichungen vornehmen, so würde dies zu unvernünftigen Folgerungen führen, da aus $a_n \doteq 0$ für jedes n nicht geschlossen werden kann $a_\Omega \doteq 0$; im Beispiel $a_n \doteq \delta_{\Omega\,n}$ ergibt sich sogar $a_\Omega = 1$. Diese Vorkommnisse werden vermieden, wenn man in allen Überlegungen, in die Grenzübergänge eingehen, die starke Gleichheit verwendet. Im Beispiel: $a_n = \delta_{\Omega\,n}$ ist nicht stark gleich 0. Außerdem ergibt sich, wie wir sahen, für die starke Gleichheit zusätzlich die Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Grenzübergängen, die für die schwache Gleichheit natürlich nicht gilt, wie man auch aus dem Beispiel ablesen kann.

Andererseits ist es für das Endergebnis einer Rechnung gewöhnlich unwesentlich, ob schwache oder starke Gleichheit gilt, so daß man — wenn dies eine Vereinfachung bedeutet — dann oft zu einer dem erhaltenen Ergebnis schwach gleichen Ω-Zahl übergehen kann. Ein solcher Übergang ist oft bei Anordnungsbeziehungen ($\dot{>}$, $\dot{<}$) unwesentlich, da er nur die Addition einer Nullzahl bedeutet, d.h. einer Zahl, deren sämtliche Komponenten schließlich 0 sind.

§ 6. Bemerkungen über eine mögliche Erweiterung

Wir haben gesehen, daß jeder reellen Zahl der gewohnten Analysis hier eine ganze Klasse von Ω-rationalen Zahlen entspricht. Es gibt aber beispielsweise keine Ω-rationale Zahl, deren Quadrat gleich zwei wäre (denn gäbe es eine solche Ω-Zahl, so müßte für jede ihrer rationalen Komponenten gelten, daß ihr Quadrat gleich 2 ist, was unmöglich ist). Allerdings kann man zeigen, daß es zu jedem beliebigen positiven ε_Ω eine Ω-rationale Zahl gibt, deren Quadrat von 2, absolut genommen, um weniger als ε_Ω verschieden ist. Dies reicht für alle praktischen Zwecke sicher aus, und da man sehr einfach überlegen kann, daß entsprechendes z.B. für alle algebraischen Zahlen gilt, darf man mit diesem Sachverhalt im Hinblick auf die Einfachheit des Aufbaus des Zahlsystems wohl zufrieden sein. Tatsächlich soll die vorliegende Arbeit auch gerade zeigen, daß man durch diese Approximation mit beliebiger unendlich kleiner Genauigkeit einen befriedigenden Aufbau der Analysis erhält, der gewisse Mängel der üblichen Analysis vermeidet. Die folgenden

Bemerkungen sind daher für das Verständnis des Nachfolgenden nicht erforderlich, sie dienen nur der begrifflichen Abrundung.

Wir wollen versuchen, den Ring der Ω-Zahlen so zu erweitern, daß der erweiterte Bereich z. B. auch die algebraischen Zahlen nicht nur mit beliebig unendlich kleiner Genauigkeit, sondern exakt enthält. Dazu bieten sich zwei Wege an.

Die erste Möglichkeit ist, bereits den zugrunde gelegten Komponentenring (der bei den Ω-rationalen Zahlen der Körper der rationalen Zahlen ist) weiter zu wählen. Man kann zeigen, worauf an einer anderen Stelle ausführlicher einzugehen sein wird, daß der Prozeß, der uns zu den Ω-rationalen Zahlen führte, allgemein auf teilgeordnete Ringe mit einem ausgezeichneten Unterring von „ganzen" Zahlen angewendet werden kann. Geht man etwa vom Körper der algebraischen oder der Dedekind-Cantorschen reellen Zahlen aus, so erhält man auf diese Weise Ringe von „Ω-algebraischen" oder „Ω-reellen" Zahlen, die den Ring der Ω-Zahlen, aber auch den Körper der reell-algebraischen Zahlen als Unterringe enthalten. Bei der Gelegenheit sei übrigens darauf hingewiesen, daß der Prozeß, der zu den Ω-rationalen Zahlen führte, iteriert werden kann.

Eine andere, ebenfalls interessante Erweiterungsmöglichkeit ergibt sich aus der folgenden Modifikation des Cantorschen Fundamentalfolgenverfahrens. Zunächst wird definiert:

Definition. *Ist jeder positiven ganzen Ω-Zahl n_Ω eine Ω-rationale Zahl $x_\Omega^{(n_\Omega)}$ zugeordnet, so daß zu jedem positiven ε_Ω eine ganze Ω-Zahl N_Ω existiert mit*

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - x_\Omega^{(n'_\Omega)}| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad n_\Omega, n'_\Omega > N_\Omega(\varepsilon_\Omega)$$

so heißt diese Zuordnung eine C-Folge.

Gibt es eine Ω-rationale Zahl x_Ω, so daß

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - x_\Omega| < \varepsilon_\Omega$$

für alle $n_\Omega > \overline{N}_\Omega$, so kann man diese Ω-rationale Zahl x_Ω als *Limes für $n_\Omega \to \infty$ der C-Folge $x_\Omega^{(n_\Omega)}$* bezeichnen. Man zeigt leicht, daß eine C-Folge höchstens einen Limes für $n_\Omega \to \infty$ besitzen kann. Umgekehrt gilt, daß jede Ω-rationale Zahl in trivialer Weise Limes einer C-Folge ist. Es gibt aber C-Folgen, z. B.

$$x_\Omega^{(n_\Omega)} = \left(1 + \frac{1}{n_\Omega}\right)^{n_\Omega}$$

die keine Ω-rationale Zahl als Limes für $n_\Omega \to \infty$ besitzen. Nennt man zwei C-Folgen $x_\Omega^{(n_\Omega)}$ und $y_\Omega^{(n_\Omega)}$ äquivalent, wenn zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine ganze Ω-Zahl N_Ω existiert mit

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - y_\Omega^{(n_\Omega)}| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad n_\Omega > N_\Omega,$$

so kann man den Ring der Ω-Zahlen erweitern zum Ring der Klassen äquivalenter Fundamentalfolgen. In diesem Ring, in dem nun auch ein Element $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}^2 = 2$ existiert, konvergiert jede Fundamentalfolge (C-Folge). Er enthält außerdem einen zum Körper der Cantor-Dedekindschen reellen Zahlen

isomorphen Unterring. (Um das letztere zu sehen, gehe man folgendermaßen vor: Sei in der gewohnten Analysis $r_n \to r$, r_n rational, r reell, so setze man $r_\Omega^{(n_\Omega)} = \operatorname{Lim}_{n=n_\Omega} r_n$. Dann gilt $\lim_{n_\Omega \to \infty} r_\Omega^{(n_\Omega)} = r$.)

Der Limesbegriff für $n_\Omega \to \infty$ teilt mit dem Limesbegriff der gewohnten Analysis dessen Nachteile z.B. im Hinblick auf die Möglichkeit der Nichtvertauschbarkeit von Reihenfolgen bei derartigen Grenzübergängen. Wir werden daher beim Aufbau der Analysis von diesem Grenzwertbegriff keinen Gebrauch machen, sondern uns auf Grenzprozesse $n = g_\Omega$ beschränken und demgemäß auch nur die Ω-rationalen Zahlen verwenden, nicht aber diesen eben erhaltenen Oberring der Klassen von C-Folgen. Dies wird ausreichen, weil dann schon alle Größen bis auf beliebig unendlich kleine Fehler bestimmt sind, was den Bedürfnissen der Anwendungen sicher entspricht.

Bezeichnungen

Gleichheit:

$a_\Omega = b_\Omega$, wenn $a_n = b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$

Anordnung:

$a_\Omega > b_\Omega$, wenn $a_n > b_n$ für alle n

$a_\Omega \geqq b_\Omega$, wenn $a_n \geqq b_n$ für alle n.

Entfernt liegen:

$a_\Omega \# b_\Omega$, wenn $a_n - b_n \neq 0$ für alle n.

Schwache Relation:

$a_\Omega \dot{R} b_\Omega$ wenn $a_n R b_n$ schließlich für alle n

(R eine zweistellige Relation zwischen rationalen Zahlen).

Absoluter Betrag:

$a_\Omega = |b_\Omega|$ wenn $a_n = |b_n|$ für alle n.

Relativ unendlich groß (klein):

$$a_\Omega \gg b_\Omega \quad (b_\Omega \ll a_\Omega)$$

wenn $a_\Omega \dot{\geqq} N \cdot b_\Omega$ für alle $N = 1, 2, 3, \ldots$

Unendlich große (unendlich kleine oder infinitesimale) Zahlen:

$$a_\Omega \gg 1 \quad (|a_\Omega| \ll 1).$$

Gleiche Größenordnung:

$$a_\Omega \sim b_\Omega \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{N} \dot{\leq} \frac{a_\Omega}{b_\Omega} \dot{\leq} N$$

für eine natürliche Zahl N und wenn $b_\Omega \# 0$.

Gleiche Größe:

$$a_\Omega \approx b_\Omega \quad \text{wenn} \quad |a_\Omega - b_\Omega| \ll |a_\Omega|.$$

Endlich-Gleichheit (Gleichheit bis auf unendlich kleinen Fehler):

$$a_\Omega \cong b_\Omega \quad \text{wenn} \quad |a_\Omega - b_\Omega| \ll 1$$

Limes für $n = N_\Omega$:

$$\lim_{n=N_\Omega} a_\Omega^{(n)} = a_\Omega^{(N_\Omega)}$$

mit Komponentenfolge $a_n^{(N_n)}$.

Kapitel II. Anfangsgründe der Analysis

§ 1. Der Funktionsbegriff

Eine *Funktion* $f(x)$ ist eine Abbildung

$$f: D_f \to P^\Omega$$

einer Untermenge D_f (des Definitionsbereichs) des Ringes P^Ω der Ω-Zahlen in diesen Ring. Beispiele für Funktionen sind alle rationalen Funktionen (mit Ω-rationalen Koeffizienten), wobei der Definitionsbereich genau aus denjenigen Ω-rationalen Zahlen besteht, für die der Nenner kein Nullteiler ist, ferner die Funktionen

$$\bar{e}(x) = \sum_{\nu=0}^{\Omega} \frac{x^\nu}{\nu!} \quad \text{und} \quad e(x) = \left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega.$$

Weitere wichtige Beispiele sind die Funktionen $f(x) = x^g$ (g eine ganze positive Ω-Zahl).

Die wichtigsten Funktionen gehören einer spezielleren Klasse an. Um sie zu definieren, geben wir zunächst die folgende

Definition. *Eine Menge von Ω-rationalen Zahlen heißt normal, wenn mit x_Ω auch die Komponenten x_n zu der Menge gehören.*

Die wichtigsten Beispiele von normalen Mengen sind die Intervalle mit rationalen Grenzen: Die Menge der x_Ω mit $a \leq x_\Omega \leq b$ ist offensichtlich normal, ebenso die der x_Ω mit $a < x_\Omega < b$ (a, b in beiden Fällen rational). Normale Mengen sind auch die Intervalle $0 < x_\Omega < \Omega$ und $-\Omega \leq x_\Omega \leq \Omega$.

Definition. *Die Funktion $f(x)$ heißt auf der Untermenge M ihres Definitionsbereichs normal (oder kurz eine normale Funktion), wenn*

a) M eine normale Menge ist,

b) $f(x_\Omega) = \lim_{n=\Omega} f(x_n)$ für jedes $x_\Omega \in M$.

Eine normale Funktion ist also schon dann völlig festgelegt, wenn ihre Werte für die rationalen Zahlen aus M gegeben sind. Alle zu Beginn dieses Abschnitts angegebenen Beispiele von Funktionen sind normale Funktionen auf gewissen normalen Mengen ihrer Definitionsbereiche.

Den Begriff der Stetigkeit einer Funktion erklären wir in folgender Weise:

Definition. *Eine Funktion $f(x)$ heißt im Punkte $x = x_\Omega$ ihres Definitionsbereichs stetig, wenn es zu jeder positiven Ω-Zahl ε_Ω eine positive Ω-Zahl $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$*

gibt, so daß $|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$ *wenn nur* x'_Ω *ebenfalls zum Definitionsbereich gehört und* $|x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$. $f(x)$ *heißt auf einer normalen Untermenge I des Definitionsbereiches gleichmäßig stetig, wenn sich dort* δ_Ω *unabhängig von* x_Ω *wählen läßt.*

Satz 1. *Es sei* $f(x)$ *eine auf der normalen Menge I normale Funktion, die auf den rationalen Punkten von I stetig im engeren Sinne sei (d.h. für jedes rationale* $x \in I$ *gilt: Zu jedem rationalen positiven* ε *existiert ein rationales positives* $\delta(\varepsilon)$ *so daß* $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ *für alle rationalen* $x' \in I$ *mit* $|x - x'| < \delta$*). Dann ist die Funktion in allen Punkten von I stetig.*

(Stetige Fortsetzung einer im engeren Sinne stetigen Funktion.)

Beweis. Es sei $x_\Omega \in I$ und $\varepsilon_\Omega > 0$, x_n und ε_n seien die zugehörigen Komponentenfolgen, so daß also alle x_n zu I gehörige rationale Zahlen sind. Nach Voraussetzung gibt es daher für jedes n positive rationale Zahlen $\delta_n(\varepsilon_n)$ (die zunächst von x_n abhängen dürfen), so daß

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon_n,$$

wenn $x'_n \in I$ rational ist und $|x_n - x'_n| < \delta_n$. Definiert man die Ω-Zahl $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ durch die so gewonnenen Komponenten $\delta_n(\varepsilon_n)$, so gilt tatsächlich: Es ist $|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$, wenn $|x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$. Um das zu sehen, wähle man die x'_n als Komponenten der Ω-Zahl x'_Ω.

Als nächstes beweisen wir den Satz von der Stetigkeit der Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen, welcher in der gewohnten Analysis kein ebenso einfaches Analogon besitzt.

Satz 2. *Sei I eine normale Menge von* Ω*-Zahlen, und sei* $f_n(x)$ *für jedes* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *eine Funktion, die für rationale* $x \in I$ *rationale Werte habe, auf I normal und stetig (im engeren Sinne) sei (auf I gleichmäßig stetig sei). Definiert man dann auf I eine Funktion* $f(x)$ *durch*

$$f(x_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} f_n(x_n)$$

so gilt:

$f(x)$ *ist in jedem Punkte von I stetig (auf I gleichmäßig stetig).*

Beweis. Wir führen den Beweis hier für die eingeklammerte Behauptung; für den anderen Teil der Behauptung verläuft der Beweis entsprechend. Es gilt also nach Voraussetzung für jedes n:

Zu jedem rationalen $\varepsilon_n > 0$ gibt es ein rationales $\delta^{(n)}(\varepsilon_n) > 0$ mit

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n$$

wenn die rationalen Zahlen

$$x_n, x'_n \in I \quad \text{und} \quad |x_n - x'_n| < \delta^{(n)}(\varepsilon_n).$$

Nun wähle man ein beliebiges positives Ω-rationales ε_Ω, dessen rationale Komponenten ε_n seien. Damit gilt

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |x_n - x'_n| < \delta^{(n)}(\varepsilon_n)$$

9212 – 69

also, da dies für alle n gilt:

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < \delta^{(\Omega)}(\varepsilon_\Omega)$$

wo $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ die Komponenten $\delta^{(n)}(\varepsilon_n)$ hat. Da alle diese Komponenten positiv sind, ist $d^{(\Omega)}(\varepsilon_\Omega) > 0$. Damit ist der Beweis beendet.

Man sieht, daß sich der Beweis deswegen durchführen läßt, weil hier (im Unterschied zur gewohnten Analysis) der Limes (für $n = \Omega$) einer Folge positiver Ω-Zahlen stets wieder positiv ist. Um sich ein anschauliches Bild von den Verhältnissen zu machen, betrachte man ein einfaches Beispiel einer Folge von stetigen Funktionen, deren Grenzfunktion im Sinne der gewohnten Analysis nicht stetig ist, nämlich die Folge der Funktionen x^n im Intervall $0 \leq x_\Omega \leq 1$, welches ja eine normale Menge ist. Die Grenzfunktion für $n = \Omega$ ist bei uns $f(x) = x^\Omega$. Diese Funktion ist gleich 0 für $x = 0$, gleich 1 für $x = 1$, aber unendlich klein für x_Ω mit

$$0 < x_\Omega \leq r < 1 \qquad (r \text{ rational}).$$

Instruktiv ist das Verhalten der Funktion, die nach dem Bewiesenen stetig ist, in einer infinitesimalen Umgebung von 1. Betrachten wir die Argumentwerte

$$x = 1 - \omega^\nu \xi \qquad (\xi \text{ positiv rational}, \nu \text{ ganz} \geq 0),$$

so erhalten wir

$$x^\Omega = (1 - \omega^\nu \xi)^\Omega = \left(1 - \omega(\xi \omega^{\nu-1})\right)^\Omega,$$

also

$$x^\Omega \cong 1 \quad \text{für} \quad \nu > 1,$$

aber

$$x^\Omega = e(-\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\Omega}\right)^\Omega \quad \text{für} \quad \nu = 1.$$

Für den kritischen Wert $\nu = 1$ wächst die Funktion also wie eine Exponentialfunktion an. Man beachte übrigens, daß hier ε_Ω und $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ aus der Definition der Stetigkeit tatsächlich von verschiedener Größenordnung sind.

Das hier angewendete Verfahren, durch geeignete *„unendliche Vergrößerung" eines infinitesimalen Bereichs* den Verlauf einer Funktion im Endlichen anschaulich wiederzugeben, werden wir im folgenden oft benutzen.

Wie wir später (in § 4) noch sehen werden, läßt sich nicht ohne weiteres ein Analogon des Häufungsstellensatzes von BOLZANO-WEIERSTRASS für die Ω-Zahlen beweisen oder auch nur formulieren. Bemerkenswerterweise lassen sich aber die gleichmäßige Stetigkeit und die Beschränktheit einer in einem abgeschlossenen Intervall (endlicher oder unendlicher Länge) stetigen Funktion hier ohne einen verallgemeinerten Häufungsstellensatz oder Verwandtes beweisen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Satz 3. *$f(x)$ sei eine für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ definierte und daselbst stetige, normale Funktion. Dann ist $f(x)$ in diesem Intervall gleichmäßig stetig und beschränkt durch eine positive Ω-Zahl $\overline{M}_\Omega$ ($|f(x)| \leq \overline{M}_\Omega$).*

Beweis.

a) Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit. Ist $f(x_\Omega) = f_\Omega$, so definiere man Funktionen $f_n(x_n)$ durch

$$f_n(x_n) = f_n$$

jeweils in den Intervallen $a_n \leq x_n \leq b_n$. Damit hat man im abgeschlossenen Intervall $a_n \leq x_n \leq b_n$ (rationale Endpunkte) für alle rationalen Zahlen eine rationalwertige Funktion definiert[6a]), von der jetzt gezeigt werden soll, daß sie im üblichen (engeren) Sinne stetig ist. Die Stetigkeit von $f(x)$ besagt: Zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ existiert ein (eventuell von x_Ω abhängiges) $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega) > 0$, so daß

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega).$$

Ersetzt man hierin alle Ausdrücke durch ihre rationalen Komponenten, so ergibt sich ($\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ habe die Komponenten δ_n):

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |x_n - x'_n| < \delta_n.$$

Da man ε_Ω beliebig klein vorgeben darf, kann ε_n als beliebig kleine positive rationale Zahl gewählt werden; die Funktion $f_n(x_n)$ ist also stetig (im engeren Sinne) in jedem rationalen Punkt des Intervalls $a_n \leq x_n \leq b_n$, mithin daselbst gleichmäßig stetig: Zu jedem positiven rationalen ε_n kann $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n)$ also unabhängig von x_n gewählt werden. Gibt man nun ε_Ω beliebig positiv vor und bestimmt diese $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n)$ zu den Komponenten ε_n von ε_Ω, so erfüllt $\delta_\Omega = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} \delta_n$ gleichmäßig für alle x_Ω des Intervalles $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit, was zu beweisen war.

b) Beweis der Beschränktheit. Wir können jetzt bereits von der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion Gebrauch machen. Es gibt daher eine positive Ω-Zahl δ_Ω, so daß

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < 1 \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < 2\delta_\Omega.$$

Dabei kann δ_Ω so gewählt werden, daß $N_\Omega = \dfrac{b_\Omega - a_\Omega}{\delta_\Omega}$ eine positive ganze Zahl ist. Dann ist jedenfalls für positive ganze Zahlen $0 < M_\Omega \leq N_\Omega$:

$$f(a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega) = f(a_\Omega) + \sum_{n=0}^{M_\Omega - 1} \{f(a_\Omega + (n+1)\delta_\Omega) - f(a_\Omega + n\delta_\Omega)\}$$

oder

$$|f(a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega)| \leq |f(a_\Omega)| + M_\Omega \leq |f(a_\Omega)| + N_\Omega.$$

Wir zeigen nun noch, daß zu jedem x_Ω aus unserem Intervall ein positives ganzes M_Ω existiert, so daß

$$|x_\Omega - (a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega)| \leq \delta_\Omega.$$

Denn es gibt eine positive natürliche Zahl M_n, so daß

$$|x_n - (a_n + M_n \delta_n)| \leq \delta_n.$$

[6a]) Daß f_n dadurch eindeutig definiert ist, folgt aus der Normalität der Funktion $f(x)$.

Es ist also

$$|f(x_n) - f(a_n + M_n \delta_n)| \leq 1$$

mithin

$$|f(x_\Omega)| \leq |f(a_\Omega)| + N_\Omega + 1.$$

Damit ist die Beschränktheit von $f(x_\Omega)$ im betrachteten abgeschlossenen Intervall bewiesen[7]).

Ein weiterer wichtiger Satz über stetige Funktionen in abgeschlossenen Intervallen ist in der gewohnten Analysis der Approximationssatz von WEIERSTRASS, den wir auf unsere Zahlen und Funktionen verallgemeinern wollen.

Satz 4 *(Approximationssatz). Ist $f(x)$ eine in $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ stetige, normale Funktion, so existiert zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine Funktion $g(x)$ mit*

$$|f(x_\Omega) - g(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$$

und

$$g(x_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} g_n(x_n), \quad \text{wobei} \quad g_n(x_n) \text{ in } a_n \leq x_n \leq b_n$$

definierte Polynome mit rationalen Koeffizienten sind. [*$g(x)$ ist dann übrigens ein „Polynom unendlich hohen Grades“:*

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{N_\Omega} a_\Omega^{(\nu)} x^\nu \Big].$$

Beweis. Zunächst sieht man, daß man den Beweis nur für das Intervall $0 \leq x_\Omega \leq 1$ zu führen braucht, da man von $f(x)$ zu $\varphi(\xi) = \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ übergehen kann. Dann gilt für die Bernsteinschen Approximationspolynome

$$B_{N_\Omega}(x) = \sum_{k=0}^{N_\Omega} \binom{N_\Omega}{k} x^k (1-x)^{N_\Omega - k} f\left(\frac{k}{N_\Omega}\right)$$

die Beziehung

$$|f(x) - B_{N_\Omega}(x)| \leq \tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} + \frac{M_\Omega}{2\sqrt{N_\Omega}}$$

mit

$$\tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} \leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{N_\Omega}\right) \right| \quad \left\{ \text{für} \quad \left| \frac{k}{N_\Omega} - x \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{N_\Omega}} \right\} \quad \text{und} \quad M_\Omega \geq |f(x)|.$$

(Statt $\sqrt{N_\Omega}$, $\sqrt[4]{N_\Omega}$ kann man hier etwa „unendlich benachbarte“ Ω-Zahlen verwenden, d.h. solche positive Ω-Zahlen, deren Quadrat oder Biquadrat

[7]) Wir haben im Beweis zu a) benutzt, daß jede im üblichen (engeren) Sinne in einem Intervall rationaler Zahlen (mit rationalen Endpunkten) stetige rationalwertige Funktion daselbst gleichmäßig stetig ist; dies kann man wie üblich indirekt beweisen. Dazu benötigt man den Häufungsstellensatz für rationale Zahlen in folgender Form: Jede beschränkte unendliche Menge von rationalen Zahlen enthält eine Cauchy-konvergente Teilfolge. Im Beweis zu b) könnte man auch auf die Beschränktheit solcher rationalwertiger Funktionen zurückgreifen, doch haben wir dies hier vermieden, um möglichst wenig Hilfsmittel über die bei uns nur als Spezialfälle auftretenden rationalwertigen Funktionen heranziehen zu müssen.

unendlich wenig von N_Ω abweicht.) Der Beweis von BERNSTEIN ist elementar und läßt sich mit unseren Mitteln durchführen. (Man kann ihn wörtlich etwa aus ACHIESER, Vorlesungen über Approximationstheorie, Berlin 1953, p. 30—31, übernehmen.)

Diese Polynome leisten nun bereits eine Approximation bis auf beliebig unendlich kleine Fehler:

$$|f(x) - B_{N_\Omega}(x)| < \varepsilon_\Omega$$

wenn nur N_Ω so gewählt wird, daß

$$\tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} < \frac{\varepsilon_\Omega}{2}, \qquad \frac{M_\Omega}{2\sqrt{N_\Omega}} < \frac{\varepsilon_\Omega}{2}.$$

Setzt man nun $g(x)$ gleich einem geeigneten Bernsteinschen Approximationspolynom (eventuell unendlich hohen Grades)

$$g(x) = B_{N_\Omega}(x) = \sum_{k=0}^{N_\Omega} a_\Omega^{(k)} x^k,$$

dessen Koeffizienten natürlich im allgemeinen selbst Ω-Zahlen sein werden, so gilt

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon_\Omega$$

und $g(x) = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} g_n(x_n)$

mit $g_n(x) = \sum_{k=0}^{N_n} a_n^{(k)} x^k$. [Da $g_n(x_n)$ gerade die Komponentenfolge von $g_\Omega(x_\Omega)$ ist, gehört x_n jedenfalls auch zum Definitionsbereich von g_n.] Damit ist alles gezeigt[8]).

§ 2. Differentiation

Es ist naheliegend, die Ableitung einer Funktion $f(x)$ für das Argument x mittels der Differenzenquotienten

$$f'_{\bar{\omega}}(x) = \frac{1}{\bar{\omega}} \{f(x + \bar{\omega}) - f(x)\}$$

zu genügend kleinen Zuwächsen $\bar{\omega}$ mit $|\bar{\omega}| > 0$ zu erklären; einen solchen Differenzenquotienten werden wir gelegentlich auch als *Differentialquotienten zum Differential* $dx = \bar{\omega}$ bezeichnen. Für die Anwendungen kommt man in den meisten Fällen mit solchen Differentialquotienten aus, obwohl sich diese im allgemeinen noch ändern, wenn man das Differential verändert. Daher ist es sinnvoll, auch den Begriff der Ableitung einzuführen, die — geometrisch

---

[8]) Auch diesen Satz könnte man schneller beweisen unter Berufung auf den Weierstraßschen Approximationssatz für die rationalwertigen, im engeren Sinne stetigen Funktionen $f_n(x_n)$, die im Beweis a) zu Satz 3 eingeführt wurden. [Man brauchte $g_n(x_n)$ nämlich nur als rationale Polynome mit $|g_n(x_n) - f_n(x_n)| < \varepsilon_n$ für $a_n \leq x_n \leq b_n$ zu wählen.] Prinzipiell ist es jedoch interessanter, einen direkten Beweis für alle unsere stetigen Funktionen zu geben, und zwar aus den gleichen Gründen, wie wir sie in Fußnote [7]) (S. 23) angegeben haben.

gesprochen — die Steigung der Tangente beschreibt, während die Differentialquotienten die Steigungen von Sekanten angeben, welche durch benachbarte Kurvenpunkte gehen. Während die Differentialquotienten natürlich stets existieren, wenn nur x und $x+\overline{\omega}$ dem Definitionsbereich angehören, gilt dies für die Ableitung nicht immer. Wir definieren:

Definition. *Die Funktion $f(x)$ heißt für das Argument x differenzierbar, wenn es zu jeder positiven Ω-Zahl ε_Ω eine positive Ω-Zahl δ_Ω gibt, so daß*

$$|f'_{\overline{\omega}}(x) - f'_{\widetilde{\omega}}(x)| < \varepsilon_\Omega \quad \textit{wenn nur} \quad x,\ x+\overline{\omega},\ x+\widetilde{\omega}$$

im Definitionsbereich liegen und $0<|\overline{\omega}|<\delta_\Omega$, $0<|\widetilde{\omega}|<\delta_\Omega$.

Wenn eine Ω-rationale Zahl $f'(x)$ existiert, so daß es zu jedem $\varepsilon_\Omega>0$ ein $\delta_\Omega>0$ gibt mit $|f'(x)-f'_{\overline{\omega}}(x)|<\varepsilon_\Omega$ für $|\overline{\omega}|<\delta_\Omega$, so nennen wir $f'(x)$ die *Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x.

Die *Ableitung* ist, wenn sie existiert, offenbar *eindeutig* bestimmt. — *Aus der Existenz der Ableitung folgt die Differenzierbarkeit.*

Für die Ableitung gelten die bekannten Regeln, die man ganz wie üblich beweisen kann (*Kettenregel, Produktregel* usw.). Diese Regeln gelten hier aber auch für unendlich große und unendlich kleine Werte der Ableitungen.

Es ist jedoch wichtig, sich die entsprechenden Regeln auch für Differentialquotienten zu überlegen. Wir geben als Beispiel die Kettenregel an, wobei wir voraussetzen, daß alle Argumente in den jeweiligen Definitionsbereichen liegen:

Sei $h(x)=f\big(g(x)\big)$; dann berechnet man sofort

$$h'_{\overline{\omega}}(x) = f'_{\widetilde{\omega}}\big(g(x)\big)\cdot g'_{\overline{\omega}}(x),$$

wobei

$$\widetilde{\omega} = g'_{\overline{\omega}}(x)\,\overline{\omega}.$$

Wir geben Differentialquotienten und Ableitungen für einige einfache Funktionen an:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_\Omega, & f'_{\overline{\omega}}(x) &= 0, & f'(x) &= 0,\\ f(x) &= x, & f'_{\overline{\omega}}(x) &= 1, & f'(x) &= 1,\\ f(x) &= x^2, & f'_{\overline{\omega}}(x) &= 2x+\overline{\omega}, & f'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Man zeigt, daß jede rationale Funktion in allen Stellen ihres Definitionsbereiches (d.h. mit Ausnahme von Polstellen) differenzierbar ist und die bekannte Ableitung hat. Bei einer rationalen Funktion mit rationalen Koeffizienten weichen die Werte der Differentialquotienten für unendlich kleine Differentiale dx bei reellem x unendlich wenig von den Werten der Ableitung ab, und die Ableitung ist eine rationale Zahl, wenn x rational ist.

Wie üblich zeigt man auch, daß *aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt.*

Ähnlich wie die Stetigkeit (Satz 2) überträgt sich auch die Differenzierbarkeit auf die Grenzfunktion einer Funktionenfolge:

Satz 5. *(Differenzierbarkeit der Grenzfunktion einer Folge differenzierbarer Funktionen.)*

Es sei $f(x_\Omega) = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} {}^{(n)}f(x_n)$, und ${}^{(n)}f(x_n)$ *sei an der Stelle* x_n *rationalwertig und differenzierbar im gewöhnlichen Sinne* [*und habe die Ableitung* ${}^{(n)}f'(x_n)$]. *Dann ist* $f(x_\Omega)$ *an der Stelle* x_Ω *differenzierbar* [*und hat die Ableitung*

$$f'(x_\Omega) = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} {}^{(n)}f'(x_n)\Big].$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt also für jedes n: zu vorgegebenem rationalen $\varepsilon_n > 0$ gibt es ein $\delta_n(\varepsilon_n) > 0$ so daß

$$(*) \qquad \left|{}^{(n)}f'_{\bar{\omega}^{(n)}}(x_n) - {}^{(n)}f'_{\tilde{\omega}^{(n)}}(x_n)\right| < \varepsilon_n$$

für $0 < |\bar{\omega}^{(n)}|, |\tilde{\omega}^{(n)}| < \delta_n$ ($\bar{\omega}^{(n)}, \omega^{(n)}$ rational). Sei nun ein beliebiges positives ε_Ω vorgegeben; es soll gezeigt werden: Es gibt ein positives $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ so daß für alle $\bar{\omega}_\Omega, \tilde{\omega}_\Omega$ mit $0 < |\bar{\omega}_\Omega|, |\tilde{\omega}_\Omega| < \delta_\Omega$ gilt

$$(**) \qquad \left|f'_{\bar{\omega}_\Omega}(x_\Omega) - f'_{\tilde{\omega}_\Omega}(x_\Omega)\right| < \varepsilon_\Omega.$$

definiere man

$$\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega) = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} \delta_n(\varepsilon_n).$$

Dann gelten für die Komponenten der beiden Seiten von (**) aber die Ungleichungen (*), womit die Behauptung der Differenzierbarkeit bewiesen ist.

Existieren die Ableitungen sämtlicher Näherungsfunktionen, so wiederhole man den Beweisgang mit ${}^{(n)}f'(x_n)$ anstelle von ${}^{(n)}f'_{\tilde{\omega}_n}(x_n)$, um die Grenzbeziehung für die Ableitung $f'(x_\Omega)$ zu erhalten.

Dieser Satz ergibt zusammen mit dem Approximationssatz 4: Jede stetige normale Funktion läßt sich mit beliebig unendlich kleiner Genauigkeit durch eine unendlich oft differenzierbare Funktion ersetzen.

Man beachte, daß eine differenzierbare Funktion nicht in jedem Punkte eine Ableitung besitzen muß (die „Ableitung" könnte nämlich „irrational" sein). Meistens kommt es jedoch auf relativ unendlich kleine Fehler nicht an, und man kann daher oft die Ableitung durch die Größenklasse der Differentialquotienten zu genügend kleinen Differentialen erklären. Regeln für das Rechnen mit solchen Größenklassen haben wir früher (Kapitel I, § 3) bereits hergeleitet.

§ 3. Integration

Den intuitiven Hintergrund für die Erklärung des Integrals bildet wie bei RIEMANN der Grenzwert der Inhalte von approximierenden Treppenpolygonen. Seien zwei Ω-Zahlen a_Ω, b_Ω mit $a_\Omega < b_\Omega$ als Intervallgrenzen gegeben; dann bezeichnen wir als *Unterteilung* T von der *Feinheit* $\leq \omega'$ eine Folge von

positiven Ω-Zahlen $\omega_\Omega^{(n)} \leq \omega'$, für welche gilt [9])

$$\sum_{n=1}^{g_\Omega} \omega_\Omega^{(n)} = b_\Omega - a_\Omega .$$

Die Zahlen

$$a_\Omega + \sum_{n=1}^{N_\Omega} \omega_\Omega^{(n)} \qquad (0 < N_\Omega \leq g_\Omega)$$

heißen *Teilpunkte*. Die *„Anzahl g_Ω der Teilintervalle"* hängt natürlich von der Unterteilung ab.

Es sei nun $f(x)$ eine Funktion, zu deren Definitionsbreich alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ gehören. Dann nennen wir den folgenden Ausdruck

$$^{(T)}\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{g_\Omega} f\Big(a_\Omega + \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\Omega^{(\nu)}\Big)\,\omega_\Omega^{(n)}$$

eine *Unterteilungssumme* der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ zur *Unterteilung* (T).

Definition. *Die Funktion $f(x)$ heißt über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ integrierbar, wenn alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ zu ihrem Definitionsbereich gehören, und wenn es zu jedem positiven ε_Ω ein positives δ_Ω gibt, so daß*

$$\left| {}^{(T_1)}\int_a^b f(x)\,dx - {}^{(T_2)}\int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon_\Omega$$

für je zwei Unterteilungen T_1, T_2, deren Feinheit höchstens δ_Ω ist. Gibt es eine Ω-Zahl $\mathfrak{J}$, so daß zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ ein $\delta_\Omega > 0$ existiert mit

$$\left| \mathfrak{J} - {}^{(T)}\int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon_\Omega$$

für alle Unterteilungen T, deren Feinheit höchstens δ_Ω ist, so nennen wir $\mathfrak{J}$ das Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ und schreiben

$$\mathfrak{J} = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Aus der Existenz des Integrals folgt die Integrierbarkeit. — Da Integrale mit beliebiger unendlich kleiner Genauigkeit durch Unterteilungssummen zu genügend feinen Unterteilungen ersetzt werden können, kommt man in den Anwendungen mit Unterteilungssummen aus und braucht Integrale meist nicht zu betrachten. Auch für Integrale gilt das bereits bei der Ableitung Gesagte

[9]) Dies heißt für die Komponenten: Es ist eine Doppelfolge $\omega_n^{(m)}$ von positiven rationalen Zahlen (m, n natürliche Zahlen) und eine Folge g_n von natürlichen Zahlen vorgegeben, so daß

$$\omega_\nu^{(m_\nu)} \leq \omega_\nu'$$

und $\sum_{n=1}^{g_\nu} \omega_\nu^{(n)} = b_\nu - a_\nu$ für alle natürlichen Zahlen ν.

über Ersetzung von Integralen oder Unterteilungssummen durch ihre Größenklassen.

Ein für die Anwendungen wichtiger Gesichtspunkt ist, daß die Integrationsgrenzen auch (dem Betrage nach) unendlich groß sein dürfen, was gelegentlich die Behandlung uneigentlicher Integrale ohne weitere Zusatzüberlegungen erlaubt.

Man kann in der Definition der Unterteilungssummen wie üblich auch Funktionswerte im Innern eines Teilintervalls heranziehen, anstatt den Funktionswert im rechten Endpunkt zu wählen. Auf diese ohne Schwierigkeiten zu vollziehende Erweiterung der Definition verzichten wir hier im Interesse der Kürze.

Den wichtigsten Typ von Unterteilungen bilden die *gleichmäßigen Unterteilungen:*

$$\omega_\Omega^{(n)} = \omega' \quad \text{für alle } n,$$

deren Feinheit beliebig klein gewählt werden kann. Wir schreiben in diesem Fall statt (T) auch (ω').

Die Hauptsätze über Integrale lassen sich in Formulierung und Beweis (mutatis mutandis) aus der Riemannschen Theorie übernehmen. Die Übertragung der Beweise dürfen wir in den meisten Fällen dem Leser überlassen. *Sowohl Unterteilungsssummen als auch Integrale sind lineare Funktionale der Integrandenfunktion.* Ebenso direkt ist zu sehen, daß

$$({T_1})\int_a^b f(x)\,dx + ({T_2})\int_b^c f(x)\,dx = ({T_3})\int_a^c f(x)\,dx$$

wo T_3 die durch Zusammensetzung der Unterteilungen T_1 und T_2 entstehende Unterteilung des Gesamtintervalls ist:

$$\sum_{n=1}^{g_\Omega+h_\Omega} f\Big(a_\Omega + \sum_{\nu=1}^{n}\omega_\Omega^{(\nu)}\Big)\omega_\Omega^{(n)} = \sum_{n=1}^{g_\Omega} f\Big(a_\Omega + \sum_{\nu=1}^{n}\omega_\Omega^{(\nu)}\Big)\omega_\Omega^{(n)} + \sum_{n=1}^{h_\Omega} f\Big(b_\Omega + \sum_{\nu=1}^{n}\tilde{\omega}_\Omega^{(\nu)}\Big)\tilde{\omega}_\Omega^{(n)}$$

mit

$$\tilde{\omega}_\Omega^{(n)} = \omega_\Omega^{(g_\Omega+n)} = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega}\omega_m^{(g_m+n)}.$$

Für Integrale gilt der entsprechende Satz.

Es gilt der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.* Wir wollen ihn hier der Kürze der Formulierung wegen nur für den Fall einer gleichmäßigen Unterteilung angeben:

$$F'_{\omega'}(x) = f(x) \quad \text{für} \quad F(x) = ({\omega'})\int_a^x f(x)\,dx.$$

Dies ist also eine Aussage über Differentialquotienten zum Differential $dx = \omega'$ und über Unterteilungssummen. Entsprechend gilt der Fundamentalsatz auch für Ableitungen und Integrale.

Die praktisch wichtigsten Beispiele integrierbarer Funktionen sind die stetigen Funktionen.

Satz. *Sei $f(x)$ für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig; dann ist $f(x)$ über diesem Intervall integrierbar.*

Der Beweis ergibt sich wie üblich aus der gleichmäßigen Stetigkeit (Satz 3).

§ 4. Zwischenwertsatz und Mittelwertsätze

Man wird im allgemeinen nicht erwarten können, daß eine für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ stetige Funktion $f(x)$ mit $f(a_\Omega) < 0$ und $f(b_\Omega) > 0$ an mindestens einer Ω-rationalen Zwischenstelle den Wert 0 annimmt. Dies zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^2 - 2$, $a = 0$, $b = 2$. Aber man sieht, daß man zu jedem positiven Ω-rationalen ε_Ω ein x_Ω aus dem Intervall so finden kann, daß $|f(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$. Dies soll nun allgemein für stetige Funktionen bewiesen werden.

Zuvor sei jedoch bemerkt, daß man den Zwischenwertsatz hier nicht — wie in der üblichen Analysis — mittels des Häufungsstellensatzes von Bolzano-Weierstrass beweisen kann. Dieser Häufungsstellensatz gilt hier nämlich sicher nicht ohne Modifikation, wie man schon an der Folge $a_n = 1/n$ sieht, welche keine Häufungsstelle in dem Sinne besitzt, daß fast alle Zahlen der Folge in beliebiger (auch unendlich kleiner) Umgebung dieser Stelle lägen. Erst wenn man Aussagen über verallgemeinerte Folgen macht, die jeder positiven ganzen Ω-Zahl n_Ω eine Ω-rationale Zahl a_{n_Ω} zuordnen, wird ein Häufungsstellensatz beweisbar, worauf wir hier jedoch nicht einzugehen brauchen.

Wir beweisen den Zwischenwertsatz hier mittels des Approximationssatzes (Satz 4) aus § 2.

Satz 6 *(Zwischenwertsatz). Die Funktion $f(x)$ sei für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig, und es sei*

$$f(a_\Omega) < 0 < f(b_\Omega).$$

Dann existiert zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ ein x_Ω aus dem Intervall, so daß $|f(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$.

Beweis. Es genügt, solche ε_Ω zu betrachten, für die

$$f(a_\Omega) < -\varepsilon_\Omega < 0 < \varepsilon_\Omega < f(b_\Omega).$$

Zunächst wählen wir nun gemäß Satz 4 ein Approximationspolynom $g(x)$, so daß

$$|f(x_\Omega) - g(x_\Omega)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_\Omega$$

für alle x_Ω aus dem Intervall. Ferner seien $g_n(x_n)$ die in Satz 4 bestimmten rationalen Polynome mit

$$\operatorname*{Lim}_{n=\Omega} g_n(x_n) = g(x_\Omega).$$

Nach Voraussetzung ist

$$g(a_\Omega) < -\tfrac{1}{2}\varepsilon_\Omega < 0 < \tfrac{1}{2}\varepsilon_\Omega < g(b_\Omega),$$

also

$$g_n(a_n) < -\tfrac{1}{2}\varepsilon_n < 0 < \tfrac{1}{2}\varepsilon_n < g_n(b_n).$$

Daher existiert nach dem gewöhnlichen Zwischenwertsatz für rationale Polynome eine rationale Zahl r_n mit $a_n < r_n < b_n$, so daß

$$|g_n(r_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_n.$$

Für $r_\Omega = \operatorname{Lim}_{n=\Omega} r_n$ gilt mithin $a_\Omega < r_\Omega < b_\Omega$ und $|g(r_\Omega)| < \frac{1}{2}\varepsilon_\Omega$, somit nach der Dreiecksungleichung

$$|f(r_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$$

was zu beweisen war.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Zwischenwertsatz beweist man ganz ähnlich den folgenden

Satz 7 *(Satz vom Maximum und Minimum einer stetigen Funktion). Die Funktion $f(x)$ sei für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig. Dann gibt es zu jedem positiven ε_Ω Ω-rationale Zahlen c_Ω, d_Ω aus dem Intervall mit*

$$f(c_\Omega) - \varepsilon_\Omega \leq f(x_\Omega) \leq f(d_\Omega) + \varepsilon_\Omega$$

für alle x_Ω aus dem Intervall.

Diese Sätze finden ihre Hauptanwendung beim Beweis der Mittelwertsätze, zu denen wir jetzt übergehen.

Satz 8 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien $f(x), g(x)$ in $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normale stetige Funktionen, und gelte $g(x) \geq 0$. Dann gibt es (bei fester Teilung T) zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine Stelle y_Ω des Intervalls, so daß*

$$\left| {}^{(T)}\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - f(y_\Omega) \cdot {}^{(T)}\int_a^b g(x)\, dx \right| < \varepsilon_\Omega.$$

Der Beweis verläuft unter Verwendung des Satzes vom Maximum und Minimum und des Zwischenwertsatzes wie üblich (z. B. R. COURANT, Differential- und Integralrechnung I, p. 102).

Der hier für Unterteilungssummen ausgesprochene Satz gilt in entsprechender Formulierung auch für Integrale. Als Folgerung beweist man in bekannter Weise den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* unter der Voraussetzung, daß die Ableitung oder der Differentialquotient zu vorgegebenem Differential im betrachteten Intervall existieren.

Kapitel III. Einige Beispiele und Anwendungen

§ 1. Die elementaren Funktionen

Als erste Beispiele für die in dieser Arbeit vorgeschlagene Modifikation und Erweiterung der Analysis behandeln wir die sog. elementaren Funktionen, insbesondere also die Exponentialfunktion, den Logarithmus, die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen. Es wird sich zeigen, daß diese Funktionen sogar durch eine spezielle Klasse, die der „quasirationalen" Funktionen, erhalten werden können; dabei verstehen wir unter *quasirationalen Funktionen* (ähnlich wie wir in Kap. I, § 1 die quasirationalen Zahlen definierten) solche,

deren expliziter Ausdruck sich aus 1, Ω und x allein mittels rationaler und quasirationaler Operationen $(\sum, \prod)$ herstellen läßt. Die quasirationalen Funktionen sind übrigens sämtlich stetige normale Funktionen (Anwendung von Satz 2).

Wir definieren zunächst eine Reihe von Funktionen:

(1) $$\underset{(N_\Omega)}{e}(x) = \left(1 + \frac{x}{N_\Omega}\right)^{N_\Omega},$$

(2) $$\underset{(N_\Omega)}{\bar{e}}(x) = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^n}{n!},$$

(3) $$\underset{(N_\Omega)}{\sin} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n,$$

(4) $$\underset{(N_\Omega)}{\cos} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n,$$

(5) $$\underset{(N_\Omega)}{\operatorname{arc\,tg}} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

(6) $$\begin{cases} \underset{(N_\Omega)}{\log} x = \sum_{n=\bar{\Omega}}^{N_\Omega+\bar{\Omega}} \frac{1}{n+\bar{\Omega}} = (\bar{\omega}) \int_1^x \frac{dx}{x}, \\ \left(\bar{\Omega} = \frac{N_\Omega}{x-1}, \text{ ganz}; \ \bar{\omega} = \frac{1}{\bar{\Omega}}\right). \end{cases}$$

Dabei darf N_Ω eine beliebige unendlich große positive ganze Ω-Zahl sein. Die Funktionen (1) bis (5) sind für jedes N_Ω für alle Ω-rationalen x_Ω (sogar für alle $x_\Omega = y_\Omega + i \cdot z_\Omega$, $i^2 = -1$, y_Ω, z_Ω Ω-rational) definiert, da keine Divisionen durch x auftreten. Alle sechs Funktionstypen sind quasirational. Man verifiziert sofort einfache Beziehungen wie die folgende:

$$\underset{(2^r N_\Omega+1)}{\bar{e}}(i \cdot x) = \underset{(N_\Omega)}{\cos} x + i \cdot \underset{(N_\Omega)}{\sin} x.$$

Selbstverständlich haben die definierten quasirationalen Funktionen aber nicht für alle x_Ω die Funktionaleigenschaften der Exponentialfunktion, der trigonometrischen Funktionen usw. Vom Standpunkt der gewohnten Analysis wird man die Gültigkeit solcher Beziehungen ja auch nur für denjenigen Teil des Definitionsbereiches erwarten dürfen, für den sie auch dort bewiesen werden, nämlich für $x_\Omega \sim 1$. Ehe wir zeigen, daß hier sogar mehr erreicht werden kann, wollen wir bemerken, daß die in jedem Lehrbuch der Analysis zu findenden Beweise hier z. B. ohne weiteres folgende Beziehungen ergeben:

$$\underset{(N_\Omega)}{\bar{e}}(x) \cong \underset{(N_\Omega)}{e}(x); \qquad \underset{(N_\Omega)}{e}\left(\underset{(N_\Omega)}{\log} x\right) \cong x; \qquad \underset{(N_\Omega)}{e}(x+y) \cong \underset{(N_\Omega)}{e}(x)\,\underset{(N_\Omega)}{e}(y)$$

für alle reellen Ω-rationalen x_Ω, y_Ω (d. h. für alle Ω-Zahlen, die endlich und mit allen rationalen Zahlen vergleichbar sind). Ebenso folgen die Additions-

theoreme für die trigonometrischen Funktionen und die Funktionalgleichung des Logarithmus.

Es kommen aber in allen diesen Fällen zwei für unseren Aufbau charakteristische Verschärfungen zur Geltung: Einmal kann der unendlich kleine Fehler, der in allen diesen Relationen auftritt und der oft bei Vertauschungen von Grenzprozessen wichtig wird, abgeschätzt oder genau angegeben werden, und zweitens gelten diese Relationen oft auch noch für gewisse unendliche Argumente. Wir erläutern beides am Beispiel der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung (für Differentialquotienten zu unendlich kleinen Differentialen ließen sich ähnliche Überlegungen durchführen):

$$\underset{(N_\Omega)}{e'}(x) = \underset{(N_\Omega)}{e}(x)\left(1 + \frac{x}{N_\Omega}\right)^{-1}$$

und

$$\underset{(N_\Omega)}{\bar{e}'}(x) = \underset{(N_\Omega)}{e}(x) - \frac{x^{N_\Omega}}{N_\Omega!}.$$

Man sieht also: Funktion und Ableitung stimmen bis auf einen genau angebbaren unendlich kleinen Fehler überein. Zu beliebig vorgegebenem x_Ω läßt sich stets ein N_Ω so bestimmen, daß e und e' (oder $\bar{e}$ und $\bar{e}'$) von gleicher Größe sind, d.h. daß der Unterschied relativ unendlich klein ist. Geht man also zu Größenklassen über, wie wir sie in Kapitel I, § 3 untersucht haben, so kann man für Funktionen, deren Werte Klassen sind, die Gültigkeit der Funktionaleigenschaft exakt erreichen. Weiß man also, daß für ein vorliegendes Problem nur die Größenklassen und nicht die exakten Werte der Ω-Zahlen interessieren, so kann man zu dieser anderen Art von Funktionen übergehen.

Nun können wir auch die allgemeine Potenz durch Zusammensetzung von Exponentialfunktion und Logarithmus ebenfalls durch quasirationale Funktionen bis auf beliebig unendlich kleine Fehler einführen:

$$\underset{(N_\Omega)}{a^b} = \underset{(N_\Omega)}{e}\left(b \cdot \underset{(N_\Omega)}{\log}\, a\right).$$

§ 2. δ-Funktionen

Wohl das bekannteste Beispiel, bei dem es besonders naheliegt, unendlich kleine und unendlich große Zahlen zur Beschreibung zu verwenden, bildet die sog. Diracsche δ-Funktion, die an einer Stelle unendlich groß sein soll, an allen anderen Stellen verschwindet und ein endliches Integral besitzt. Eine solche Funktion läßt sich den klassischen Begriffen nicht unterordnen, und eine strenge Begründung hat bekanntlich L. SCHWARTZ im Rahmen der in seiner Distributionstheorie gegebenen Erweiterung des Funktionsbegriffs vorgenommen. Es scheint jedoch, daß man der Bedeutung dieser Funktion in den Anwendungen besser gerecht wird, wenn man sie in der folgenden Weise mit den Mitteln der hier vorgeschlagenen Modifikation der Analysis einführt.

Definition. *Eine integrierbare Funktion $\delta(x)$ heißt δ-artig, wenn es eine positive unendlich kleine Ω-rationale Zahl r_Ω gibt, so daß*

(I) $\delta(x)$ unendlich klein ist für $|x_\Omega| > r_\Omega$, und zwar so daß

$$(T)\int_a^b \delta(x)\,dx$$

unendlich klein ist für $r_\Omega < a < b$ oder $r_\Omega < -b < -a$.

(II) $(T)\int_{-a}^{+a} \delta(x)\,dx \approx 1$ *für $a \geq r_\Omega$ und hinreichend feine Unterteilungen (T).*

Wir sagen dann, die δ-artige Funktion $\delta(x)$ habe eine *Breite* $\leq r_\Omega$.

Ein Beispiel einer δ-artigen Funktion ist

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Omega}{1+\Omega^2 x^2}, \tag{1}$$

wobei r_Ω^2 etwa relativ unendlich wenig von ω verschieden ist. Es gibt aber sehr viele wesentlich verschiedene Typen von δ-artigen Funktionen. Dies ist für praktische Zwecke von Vorteil, weil man die δ-Funktion der jeweiligen Problemstellung anpassen kann.

Ehe wir weitere wichtige Beispiele von δ-artigen Funktionen angeben und behandeln, soll bewiesen werden, daß alle δ-artigen Funktionen die wichtige *Eigenschaft* haben:

Satz 9. *Sei $\delta(x)$ eine nicht-negative δ-artige Funktion mit einer Breite $\leq r_\Omega \ll 1$ und sei $f(x)$ eine im Sinne der gewohnten Analysis in $-a \leq x \leq +a$ $(|a| > \varrho$ für ein positives rationales $\varrho)$ definierte, im üblichen Sinne stetige Funktion, die durch ein rationales M beschränkt sei. (Falls $f(x)$ nur für alle rationalen Zahlen des Intervalls definiert ist, erweitere man die Funktion durch stetige Fortsetzung — Kap. II, § 1 — auf alle Ω-rationalen Zahlen des Intervalls.) Dann gilt:*

$$(T)\int_{-a}^{+a} \delta(x)\,f(x)\,dx \cong f(0),$$

wenn die Unterteilung T hinreichend fein ist.

Beweis. Wegen der Beschränktheit von $f(x)$ sind jedenfalls die beiden Integrale

$$(T)\int_{-a}^{-r} \delta(x)\,f(x)\,dx, \qquad (T)\int_{r}^{a} \delta(x)\,f(x)\,dx \qquad (a \geq r)$$

unendlich klein (dabei ist die Teilung T so zu wählen, daß $-r$, $+r$ Teilpunkte sind). Das übrigbleibende Integral

$$(T)\int_{-r}^{+r} f(x)\,\delta(x)\,dx$$

bleibt noch zu betrachten. In diesem Intervall gilt, weil die Funktion im gewöhnlichen Sinne stetig ist und das Intervall unendlich klein ist,

$$f(x) \cong f(0).$$

Also ergibt der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 8)

$$(T)\int_{-\tau}^{+\tau} f(x)\,\delta(x)\,dx \cong f(0), \quad \text{weil} \quad \int_{-\tau}^{+\tau} \delta(x)\,dx \cong 1,$$

und daraus folgt die Behauptung.

Es ist leicht zu sehen, wie sich die Voraussetzungen in speziellen Fällen abschwächen lassen: $f(x)$ braucht nicht notwendig stetig im üblichen Sinne zu sein; es genügt, wenn $f(x)$ im Intervall $-\tau \leq x \leq +\tau$ unendlich kleine Schwankung hat. Auch die Forderung der Beschränktheit läßt sich abschwächen; es muß nur dafür gesorgt werden, daß die Integrale über die äußeren Intervalle unendlich klein sind.

Die Faltungseigenschaft kann also z. B. dann verletzt sein, wenn $f(x)$ selbst eine δ-artige Funktion von der gleichen Breite wie $\delta(x)$ ist; tatsächlich gilt für die δ-artige rationale Funktion (1), wie man leicht nachrechnet

$$\int_{-a}^{+a} \delta^2(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}\,\delta(0).$$

Man hat folgendes Erzeugungsprinzip für δ-artige Funktionen: Sei $g(x)$ eine im üblichen Sinne definierte (d.h. etwa in rationalen Punkten rationalwertige) Funktion, welche nicht-negativ sei, und deren Integral (im üblichen Sinne) von $-\infty$ bis $+\infty$ den Wert 1 habe, und die ihr Maximum im Nullpunkt annehme und von dort nach beiden Seiten monoton abfalle. Dann sind die folgenden Funktionen (für jedes unendlich große ganze positive N_Ω) δ-artig:

$$\delta(x_\Omega) = N_\Omega \cdot g(x_\Omega N_\Omega). \tag{2}$$

[Dabei ist dieser Funktionswert natürlich erklärt als Limes für $n = \Omega$ der Folge $N_n \cdot g(x_n \cdot N_n)$]

Nach diesem Prinzip erhält man aus

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$$

für $n = \Omega$ gerade die δ-artige Funktion (1) und für $n = N_\Omega$ die Funktionen

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{N_\Omega}{1 + x^2 N_\Omega^2}. \tag{3}$$

Die Glockenfunktion $g(x)$ selbst darf auch bereits Ω explizit enthalten. Dies trifft z. B. zu für die folgende „kastenförmige" Funktion

$$g(x) = \frac{c}{1 + (1 + x^2 - a^2)^\Omega} \tag{4}$$

mit $c = \frac{1}{2a}$, a rational, $|a| < 1$.

Schon aus der Definition folgt, daß das unbestimmte Integral einer δ-artigen Funktion

$$\eta(x) = \int_0^x \delta(y)\,dy$$

eine „Sprungfunktion" ist, die freilich in stetiger Weise in einer infinitesimalen Umgebung der Zahl 0 einen „Sprung" einer unendlich wenig von 1 verschiedenen Höhe ausführt. Ist die Funktion $\delta(x)$ differenzierbar, so ist die Ableitung eine „Dipolfunktion". Für die δ-Funktion (1) erhält man z. B.

$$\eta(x) \cong \frac{1}{\pi} \underset{(\Omega)}{\operatorname{arc\,tg}}\, \Omega x$$

und

$$\delta'(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{\Omega^2 x}{(1+\Omega^2 x^2)^2}.$$

Diese Dipolfunktion δ' nimmt ihre Extrema für $x = \pm \frac{1}{\Omega\sqrt{3}}$ an.

Die hier betrachteten Beispiele von δ-artigen Funktionen sind symmetrisch: $\delta(-x) = \delta(x)$. Diese Klasse von δ-artigen Funktionen ist deshalb besonders wichtig, weil ihre Ableitungsfunktionen antisymmetrischen Dipolen entsprechen.

Eine weitere für Anwendungen wichtige Klasse von δ-artigen Funktionen wird durch Systeme orthonormierter Funktionen bestimmt.

§ 3. Potenzreihen, insbesondere ihr Verhalten an der Konvergenzgrenze

Bei einigen Gelegenheiten sind uns bereits Potenzreihen (oder „Polynome unendlichen Grades") begegnet. Wir wollen diese jetzt etwas systematischer betrachten. Zuvor sei bemerkt, daß ein Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} a_\Omega^{(n)}\, x^n$$

dessen Koeffizienten $a_\Omega^{(n)}$ beliebige Ω-rationale Zahlen sein dürfen, für alle Ω-rationalen Zahlen x_Ω selbst eine Ω-rationale Zahl darstellt, also jedenfalls stets „konvergiert". Andere Fragen sind aber die nach der Änderung dieses Ausdrucks bei Veränderung der oberen Summationsgrenze, oder nach der (bis auf unendlich kleine oder relativ unendlich kleine Fehler) exakten Darstellung von Funktionen durch derartige Potenzreihen.

Als einfaches, aber schon charakteristisches Beispiel betrachten wir hier die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} x^n.$$

Diese Reihe läßt sich für alle von 1 entfernt gelegenen $x = x_\Omega$ (d. h. für solche, deren Komponenten sämtlich von 1 verschieden sind) exakt darstellen durch

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} x^n = \frac{1 - x^{N_\Omega+1}}{1-x}.$$

Daraus entnimmt man: Die geometrische Reihe ist für diejenigen x_Ω bis auf einen unendlich kleinen Fehler gleich der Funktion

$$(1-x)^{-1}, \quad \text{für die} \quad |x^{N_\Omega+1}| \ll |1-x|,$$

also jedenfalls für alle komplexen x, zu denen eine rationale Zahl r mit $0<r<1$ existiert, so daß $|x_\Omega| \leq r$. Für x mit $x_\Omega \geq r>1$ hat man hingegen, daß der Wert der geometrischen Reihe unendlich groß ist, so daß die Reihe dort die Funktion, wie auch gar nicht anders zu erwarten, sicher nicht darstellt; wir erwähnen diesen Sachverhalt hier ausdrücklich im Hinblick auf den oft anzutreffenden Einwand gegen das Rechnen mit divergenten Ausdrücken (man vergleiche dazu BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, 1851 und auch H. DINGLER, Philosophie der Logik und Arithmetik, 1931): Man sagt, wenn ein solches Rechnen möglich sei, so müsse doch gemäß der Formel für die Summation der geometrischen Reihe gelten $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1$; eine Gleichung, die natürlich keinen Sinn hat und durch unsere Gleichung

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} 2^n = -1 + 2^{N_\Omega+1}$$

zu ersetzen ist, die ein unendlich großes Zusatzglied enthält.

Interessanter ist das Verhalten der Reihe in einer infinitesimalen Umgebung der Konvergenzgrenze. Wir nehmen die unwesentliche Substitution $x \to -x$ vor und haben

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n x^n = \frac{1-(-1)^{N_\Omega+1} x^{N_\Omega+1}}{1+x}.$$

Betrachten wir nun $x = 1 - y\tilde{\omega}\left(\tilde{\omega} = \frac{1}{N_\Omega}\right)$ für rationale y. Es ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n x^n \cong \frac{1-(-1)^{N_\Omega+1} e(-y)}{2},$$

so daß also schon für dieses innerhalb des Einheitskreises gelegene y der Wert der Reihe um einen endlichen Betrag von der Zahl $\frac{1}{2} \cong \frac{1}{1+x}$ abweicht. Der Wert $\frac{1}{2}$ (den z.B. die Abelsche Summation als Summenwert der Reihe für $x=1$ bestimmt) wird hier also nur für solche $x = 1 - y\tilde{\omega}$ aus der reellen Zahlklasse 1 erhalten, für die y unendlich groß ist, z.B. also für $y = \log_{(N_\Omega^2)} N_\Omega$.

Wir wollen nun auch noch — und zwar auch wieder an unserer speziellen Reihe — untersuchen, welche Deutung dem Verfahren der C_1-Summation hier zu geben ist. Die n-te Partialsumme ist

$$s_n = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x},$$

und die C_1-Summe ergibt sich als Limes für $n = \Omega - 1$ der arithmetischen Mittel der $n+1$ ersten Partialsummen zu

$$S = \frac{1}{\Omega} \sum_{0}^{\Omega-1} S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\Omega(x+1)} \left\{ \frac{1+(-1)^{\Omega+1} x^\Omega}{1+x} \right\}.$$

Mithin ist für die Abweichung von $\frac{1}{1+x}$ verantwortlich

$$\omega \frac{x}{(1+x)^2}\left(1-(-1)^{\Omega} x^{\Omega}\right).$$

Dieser Fehler ist unendlich klein, wenn $|x^{\Omega}|$ unendlich klein ist, also sicher auch für $x = 1 - y\omega^{r}$ (y rational, $r \geq 1$). Für diese x_{Ω} gilt daher

$$S \cong \frac{1}{1+x},$$

so daß der Grenzwert der Folge der Mittel der Partialsummen in diesen Fällen vom Grenzwert der Reihe selbst abweicht, und zwar gerade so, daß hier auch noch näher an der Konvergenzgrenze eine Darstellung der Funktion $\frac{1}{1+x}$ erreicht wird. Dies wird noch deutlicher, wenn man S selbst als unendliche Reihe schreibt:

$$S = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=0}^{\Omega-1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m x^m = \sum_{n=0}^{\Omega-1} x^n (-1)^n \omega(\Omega - n).$$

Zur ursprünglichen Reihe wird also noch die „konvergenzerzeugende" Reihe

$$\sum_{n=0}^{\Omega-1} (-1)^{n+1} n \omega x^n$$

hinzugefügt, deren Glieder für endliche n unendlich klein sind, die aber im ganzen doch einen endlichen Beitrag liefert.

§ 4. Bedingt konvergente Reihen

Wir hatten bereits gesehen, daß wegen der durchgängigen Vertauschbarkeit der Reihenfolgen von Grenzübergängen hier gewisse Schwierigkeiten der gewohnten Analysis vermieden werden. Gleiches gilt auch bei der Umordnung und Multiplikation von Reihen, die im Sinne der gewohnten Analysis nur bedingt konvergieren.

Betrachten wir als ein Beispiel zunächst die Leibnizsche Reihe für log 2. Vorweg bemerken wir, daß gilt

$$\sum_{1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \log \Omega \cong C$$

wobei der Logarithmus bezüglich einer genügend großen Ω-Zahl, etwa Ω^{Ω} genommen sei: log bezeichne im folgenden kurz $\log_{(\Omega^{\Omega})}$. C ist eine reelle Zahl aus einer Klasse, die wir als Eulersche Konstante bezeichnen; der Beweis läßt sich aus der gewohnten Analysis übernehmen. Daher gilt bis auf einen unendlich kleinen Fehler

$$\sum_{1}^{\Omega} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\Omega} \frac{1}{n} \cong \frac{1}{2} \log \Omega + \frac{C}{2}$$

und ebenso

$$\sum_{1}^{\Omega} \frac{1}{2n+1} = \sum_{1}^{2\Omega+1} \frac{1}{n} - \sum_{1}^{\Omega} \frac{1}{2n} \cong \log(2\Omega+1) - \frac{1}{2} \log \Omega + \frac{C}{2},$$

und hiernach wieder bis auf einen unendlich kleinen Fehler

$$\sum_{1}^{2\Omega+1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{1}^{\Omega}\frac{1}{2n+1}-\sum_{1}^{\Omega}\frac{1}{2n}\cong\log(2\Omega+1)-\log\Omega$$

$$\cong\log(2+\omega)\cong\log 2.$$

Nun zeigt man in der gewohnten Analysis bekanntlich, daß die aus der Leibnizschen Reihe durch Umordnung hervorgehende Reihe

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

die Summe $\frac{3}{2}\log 2$ hat. Dies muß bei uns interpretiert werden. Da die Leibnizsche Reihe eine reelle Summe hat, können wir nach dem Hauptsatz über reelle Zahlklassen die Summation bis $4\Omega-1$ anstatt bis Ω erstrecken und dürfen schreiben:

$$\log 2\cong\sum_{1}^{4\Omega-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{1}^{\Omega}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\sum_{\Omega+1}^{2\Omega-1}\frac{1}{2n}$$

$$\cong\sum_{1}^{\Omega}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}\log 2\quad{}^{10})$$

Für die in der gewohnten Analysis durch Umordnung der Leibnizschen Reihe erhaltene Reihe ergibt sich hier also natürlich ebenfalls der Summenwert $\frac{3}{2}\log 2$. Die neue Reihe ist aber in unserem Sinne keine Umordnung der Leibnizschen Reihe, weil ihr unendlich viele (negative) Summanden fehlen, die eine endliche Summe ergeben, welche gerade den Unterschied beider Reihen liefert.

Allgemein ist auch leicht zu sehen, daß hier der Summenwert einer Reihe stets unabhängig von der Reihenfolge der Glieder ist, sobald man dafür sorgt, daß in der umgeordneten Reihe wirklich alle Glieder der ursprünglichen Reihe (und nur diese) vorkommen. Diese Ausdrucksweise besagt natürlich auch hier, daß die entsprechende Aussage für die Komponenten zu gelten hat. Somit entfällt hier im Prinzip der Unterschied zwischen absoluter und bedingter Konvergenz, der freilich fürs praktische Rechnen insofern wesentlich bleibt, als man sich bei einer absolut konvergenten Reihe ohne weitere Überlegungen beliebige Umordnungen erlauben kann.

Entsprechende Überlegungen hat man bei der Multiplikation von Reihen anzuwenden. Sind zwei Reihen

$$A=\sum_{0}^{\Omega}a_n\quad\text{und}\quad B=\sum_{0}^{\Omega}b_n$$

gegeben, so wählt man für beide zweckmäßigerweise die gleiche obere Grenze (wir schreiben dafür der Einfachheit halber Ω), was bei Reihen, die im gewöhn-

[10]) $\sum_{\Omega+1}^{2\Omega-1}\frac{1}{n}\cong\log 2$ folgt aus der Integraldefinition des Logarithmus.

lichen Sinne konvergieren, nach dem Hauptsatz auf die reelle Zahlklasse des Ergebnisses ohne Einfluß ist. Multipliziert man dann gliedweise aus (was erlaubt ist, da gliedweise Multiplikation für die Komponenten gestattet ist, die ja endliche Summen sind), so ergibt sich

$$A \cdot B = \sum_{n=0}^{\Omega} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} + \sum_{n=0}^{\Omega-1} \sum_{m=0}^{n} a_{\Omega-n+m} b_{\Omega-m}.$$

Die erste Doppelsumme stellt das gewohnte Cauchy-Produkt dar, zu der die zweite als Fehlerglied hinzukommt. Ist nun wenigstens eine der beiden Reihen, etwa A absolut konvergent, so wird dieser Fehler unendlich klein (wie man ganz wie üblich beweisen kann), sobald B eine reelle Ω-Zahl ist. Sind hingegen A und B beide bedingt konvergent, so verschwindet die Fehlersumme im allgemeinen nicht, läßt sich dann aber gemäß unserer Integraldefinition oft in ein Integral umschreiben. Setzt man z.B.

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

so erhält man nach einer längeren Rechnung, die wir nicht wiederzugeben brauchen, für die Zusatzsumme den Wert $\pm \frac{\pi}{2}$ (als reelle Zahlklasse), wenn man als obere Grenze 2Ω bzw. $2\Omega+1$ wählt.

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt
Institut für Geometrie der Technischen Hochschule München

(Eingegangen am 5. März 1957)

LEPTIN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 40–58 (1958)

Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume

Von
HORST LEPTIN

Seit der Veröffentlichung der grundlegenden Arbeit von J. v. NEUMANN über die Reduktionstheorie der Operatoralgebren Hilbertscher Räume [8] sind verschiedene Abhandlungen erschienen, welche z.T. die Theorie auf nicht separable Hilbert-Räume ausdehnen [4], [10], z.T. eine Vereinfachung der v. Neumannschen Untersuchungen im separablen Fall zum Ziele haben [9], [11]. Diese Arbeiten sind entweder speziell auf den separablen Fall zugeschnitten oder benutzen ausgiebig und wesentlich Ergebnisse der Theorie normierter Ringe, Integrations- und Maßtheorie und Darstellungstheorie der Operatoralgebren.

Im Hinblick auf die Wichtigkeit der Reduktionstheorie für die Theorie der Operatoralgebren, die harmonische Analyse, Maßtheorie usw. schien es mir wünschenswert, einen Aufbau zu geben, in dem außer den wichtigsten Tatsachen über Hilbert-Räume und den elementaren Eigenschaften des Daniellschen Integrals keine weiteren Hilfsmittel benutzt werden. Die Grundlage der Reduktionstheorie ist die Theorie der direkten Integrale, bzw. der stetigen direkten Summen Hilbertscher Räume. Aus ihr läßt sich die Reduktionstheorie der Operatoren und Algebren, jedenfalls soweit sie in [4] und [10] durchgeführt ist, verhältnismäßig einfach herleiten. Wir werden in dieser Arbeit deshalb nur die direkten Integrale behandeln und auf die Zerlegung der Operatoren in einer weiteren zurückkommen.

An Voraussetzungen benötigen wir etwa das, was im zweiten Kapitel von [7] über Hilbert-Räume steht, sowie die Theorie des Daniellschen Integrals, soweit sie in den ersten drei Paragraphen des dritten Kapitels von [7] enthalten ist. Darüber hinaus benutzen wir einige Tatsachen über starke Konvergenz von monotonen Folgen vertauschbarer Projektionen, den Satz von TYCHONOFF und, systematisch und ausgiebig, das Zornsche Lemma. Um dieses anwenden zu können, definieren wir in § 1 für summierbare Funktionen eine induktive Ordnung, die wir durch einen sehr simplen Kunstgriff aus der gegebenen erhalten. Mir ist nicht bekannt, ob diese induktiven Ordnungen der meßbaren bzw. summierbaren Funktionen bereits irgendwo definiert oder benutzt worden sind. Um die Nützlichkeit dieser Ordnungen zu zeigen, werden wir mit ihrer Hilfe den Satz von RADON-NIKODYM beweisen. Ferner bildet diese Methode die Seele der Multiplizitätstheorie des vierten Paragraphen.

Der Hauptunterschied zwischen der vorliegenden und den übrigen Darstellungen unseres Gegenstandes besteht darin, daß wir auf eine abstrakte Definition des direkten Integrals Hilbertscher Räume verzichten. Statt dessen

benutzen wir in den Untersuchungen und Sätzen die $\mathfrak{L}^2$-Räume gewisser meßbarer Teile des Produktraumes $S \times T$ von Maßräumen S und T: Ist X ein meßbarer Teil aus $S \times T$ und T_s die Menge aller $t \in T$ mit $(s, t) \in X$, so sind fast alle T_s meßbar in T und wir können $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ als direktes Integral der $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{L}^2(T_s)$ definieren. Der Zusammenhang zwischen dieser und den anderen Definitionen liegt wegen des Satzes von FUBINI auf der Hand und wir brauchen und werden nicht weiter darauf eingehen. Der zur direkten Zerlegung gehörige kommutative Ring beschränkter Operatoren besteht gerade aus den Multiplikationen der Funktionen aus $\mathfrak{L}^2(X)$ mit den meßbaren beschränkten Funktionen auf S, d.h. den Funktionen aus $L^\infty(S)$. Der Maßraum T hat hier nur technische Bedeutung, er wird infolgedessen in dieser Arbeit stets diskret sein. Daß T hier nur formal auftritt, liegt daran, daß wir nach Reduktionen des Hilbert-Raumes bezüglich *eines* Ringes beschränkter Operatoren fragen. Die Betrachtung von Produkten $S \times T$ führt aber sofort auf das folgende allgemeinere Problem: Gegeben seien *zwei* kommutative Algebren beschränkter Operatoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Wann gibt es Maßräume S und T und einen meßbaren Teil $X \subset S \times T$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ und $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gerade die zu den Multiplikationen mit den Funktionen aus $L^\infty(S)$ und $L^\infty(T)$ gehörigen Ringe sind? Unsere Formulierung bietet die Möglichkeit einer Theorie direkter Doppelintegrale Hilbertscher Räume, in deren Rahmen eine Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen möglich ist. Natürlich kann man dann auch statt der Doppelintegrale beliebige n-fache Integrale untersuchen, n endlich oder unendlich.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind durchweg nicht neu, sie finden sich, zumindest in äquivalenten Formulierungen, im wesentlichen in [*4*] und [*10*], die Multiplizitätstheorie in [*6*]. Ich hatte den Hauptteil der Arbeit, zu der ich durch das Studium der v. Neumannschen Arbeit angeregt war, fertig, bevor ich die weitere Entwicklung kannte. Hätte ich die Zusammenhänge zwischen den hier gebrachten Ergebnissen, Beweisen und Methoden mit den schon in der Literatur vorhandenen jeweils im einzelnen untersucht und beschrieben, so hätte das zu einer erheblichen Erweiterung des Umfanges der Arbeit und zu fortwährenden Unterbrechungen der Entwicklung der Theorie geführt. Ich möchte deshalb an dieser Stelle noch einmal generell auf [*4*], [*6*] und insbesondere auf [*10*], ferner auf [*9*] und [*11*] hinweisen (vgl. auch [*1*]) und betonen, daß ich bezüglich der Ergebnisse keine Originalität beanspruche.

Nachdem ich diese Arbeit zum Druck eingereicht hatte, teilte mir Herr E. THOMA mit, daß er kurz vorher seine Arbeit [*12*] zur Publikation gegeben hätte. Er hat in [*12*] außer der Reduktion des Hilbert-Raumes bezüglich eines Verbandes vertauschbarer Projektionen auch noch die Zerlegung von (einzelnen) Operatoren betrachtet, und zwar für Reduktionen des Raumes mit (im wesentlichen) hyperstoneschen Maßraum (vgl. [*2*], ch. V, § 5, ex. 14). Ich habe ähnliche Ergebnisse erhalten, jedoch mit gänzlich anderen Methoden; über diese Dinge werde ich in einer Arbeit in den Hamburger Abhandlungen berichten. Auch die hier vorliegende Arbeit unterscheidet sich, wie schon ein erster Blick zeigt, in allen wesentlichen Punkten von THOMAS, so z.B.

schon in der Definition des direkten Integrals. Auf das Buch von HALMOS [6], dessen Multiplizitätstheorie eine der Grundlagen in [12] ist, wurde ich ebenfalls durch Herrn THOMA hingewiesen. Daß sich in methodischen und sachlichen Einzelheiten zwischen [6] und der vorliegenden Arbeit Überschneidungen ergeben (vgl. z.B. [6], § 60, Theorem 1 mit der entsprechenden Stelle in § 4 dieser Arbeit), liegt in der Natur der Dinge. Ähnliche Parallelen finden sich in [4] und [10], sowie in [6] und [10].

Ferner erschien inzwischen die Monographie [3] von DIXMIER. Im zweiten Kapitel behandelt DIXMIER ausführlich die Reduktionstheorie, allerdings nur für Multiplizitäten $\leq \aleph_0$.

Überblick

In **§ 1** betrachten wir, wie schon gesagt, meßbare Funktionen auf einem abstrakten Maßraum S und definieren hierfür gewisse induktive Ordnungen. Als Anwendung beweisen wir den Satz von RADON-NIKODYM.

§ 2 enthält Allgemeines über $\mathfrak{L}^p$-Räume und den Beweis der Tatsache, daß die Gesamtheit $\mathfrak{P}_S$ der Projektionen P_M des Banach-Raumes $\mathfrak{L}^p(S)$, die den Multiplikationen mit charakteristischen Funktionen χ_M meßbarer Teile $M \subset S$ entsprechen, einen vollständigen Booleschen Verband bilden. Einen solchen vollständigen Verband vertauschbarer Projektionen bezeichnen wir im folgenden stets als *Stamm*. Das Problem besteht darin, für einen Hilbert-Raum zu gegebenem Stamm eine geeignete Darstellung des Raumes als direktes Integral anzugeben. In § 2 wird weiter das Hauptergebnis formuliert und einige Reduktionen des Problems durchgeführt. Die beiden folgenden Paragraphen enthalten dann den Hauptteil der Untersuchung, nämlich

§ 3 die Konstruktion des Maßraumes S und den Nachweis der Isomorphie des gegebenen Stammes $\mathfrak{P}$ mit dem zu S gehörigen Stamm $\mathfrak{P}_S$ von $\mathfrak{L}^2(S)$.

§ 4 enthält die Multiplizitätstheorie und damit die Lösung des Problems: Zu gegebenem Stamm $\mathfrak{P}$ existiert eine stetige direkte Zerlegung in der Form $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ mit meßbarem $X \subset S \times T$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_S$.

In § 2 wurde gezeigt, daß man bei diskretem T für X eine Art Normaldarstellung angeben kann; in

§ 5 zeigen wir, daß diese Normaldarstellung eindeutig ist, natürlich nur bis auf Äquivalenz der Maßräume S. Aus der Eindeutigkeit enthält man dann die bekannten Unitärinvarianten der kommutativen Operatorringe.

In **§ 6** zeigen wir schließlich noch, unter Voraussetzung der Spektraltheorie kommutativer normierter Ringe, daß es in jeder Äquivalenzklasse der Maßräume S (genau) einen Stoneschen lokal kompakten Raum gibt, d.h. (im kompakten Fall) einen *perfekten* Maßraum im Sinne von [10], auf dem jede beschränkte meßbare Funktion zu genau einer stetigen äquivalent ist. Damit ist dann weitgehend die Verbindung zu [4] und [10] hergestellt. Auf Einzelheiten gehen wir dabei nicht ein.

Noch einige Bemerkungen zur Terminologie: Den Terminus „isomorph" benutzen wir mit großer Freiheit, die jeweilige Bedeutung geht stets aus dem

Zusammenhang hervor. Durch $f_n \searrow f$ ($f_n \nearrow f$) drücken wir aus, daß die Folge der reellen Funktionen oder Zahlen f_n monoton von oben (unten) gegen f konvergiert. „positiv" bedeutet „nicht negativ". Wir nennen einen Maßraum *diskret*, wenn jeder Punkt das Maß Eins hat, ein diskreter Maßraum ist also durch seine Mächtigkeit bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Charakteristische Funktionen von Mengen $M, X, \ldots$ bezeichnen wir durchweg mit $\chi_M, \chi_X, \ldots$.

§ 1

Wir betrachten eine Menge S, einen Rieszschen Raum L reellwertiger Funktionen auf S (vgl. [2], ch. II) und ein Integral I auf S, d.h. eine isotone lineare Abbildung von L in die reellen Zahlen, die überdies folgender Stetigkeitsbedingung genügt (vgl. [7], ch. III):

$$\text{Ist } f_n \in L, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{und} \quad f_n \searrow 0, \quad \text{so ist } I(f_n) \searrow 0.$$

Das Integral I läßt sich eindeutig fortsetzen auf die Menge $\overline{L}$ der integrierbaren Funktionen. Diese können außer den gewöhnlichen reellen auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, desgleich kann I auf $\overline{L}$ $\pm\infty$ werden. In $\overline{L}$ liegt der Rieszsche Raum L^1 der summierbaren Funktionen, d.h. der Funktionen aus $\overline{L}$ mit endlichem Integralwert. Mit $\overline{L}_+$, bzw. L^1_+ bezeichnen wir die Menge der positiven Funktionen aus $\overline{L}$, bzw. L^1. Jedes $f \in \overline{L}$ ist Differenz $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \in \overline{L}_+$ und f^+ oder f^- aus L^1_+. Liegt die charakteristische Funktion χ_A des Teiles $A \subset S$ in $\overline{L}$, so nennen wir A integrierbar. Das System $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S$ aller integrierbaren Teile von S bildet einen vollständigen σ-Ring: Mit abzählbar vielen A_i liegen auch $\cup A_i$ und $\cap A_i$ in $\mathfrak{M}$, mit A und B ferner die Differenzmenge $A - B$. Ist $A \in \mathfrak{M}$, so ist durch $m(A) = I(\chi_A)$ ein volladditives positives Maß m auf $\mathfrak{M}$ definiert, das auf dem System $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}^0_S$ der Nullmengen verschwindet. Liegt N in $\mathfrak{M}^0$, so auch jeder Teil von N. Wir wollen stets voraussetzen, daß mit f auch $f \cap 1 = \inf\{f, 1\}$ (punktweises inf.) in L liegt. Das bedeutet im wesentlichen, daß I das in üblicher Weise durch m definierte Integral ist (vgl. [7]). Jedes $A \in \mathfrak{M}$ ist dann die Vereinigung abzählbar vieler $A_i \in \mathfrak{M}$ mit endlichem Maß $m(A_i)$, (d.h. $\mathfrak{M}$ ist total σ-finit im Sinne von [5]).

Die Menge $\overline{L}$ ist ein Verband, der in der gewöhnlichen Ordnung überdies σ-induktiv ist (besser $\aleph_0$-induktiv): Das Infimum und das Supremum jeder *abzählbaren* Kette aus $\overline{L}$ liegt wieder in $\overline{L}$. Dagegen ist $\overline{L}$ im allgemeinen nicht induktiv, so daß man z.B. nicht das Lemma von ZORN anwenden kann. Wir werden nun mit einem einfachen Trick durch Vergröberung der Ordnung $\overline{L}$ zu einer induktiv geordneten Menge machen.

Sei $M = (M, <)$ eine durch „$<$" σ-induktiv geordnete Menge und I eine isotone Abbildung von M in die Menge der reellen Zahlen, einschließlich der Werte $+\infty$ und $-\infty$. Wir definieren in M eine Ordnung „$\lhd$" wie folgt:

(α). $\qquad x \lhd y$ bedeute $x < y$ und $I(x) < I(y)$.

(1.1) *Die durch* (α) *in* M *definierte Ordnung ist induktiv.*

Der Beweis ist äußerst einfach: Sei $\varkappa = \{x\}$ eine Kette aus $(M, \lhd)$. Die neue Ordnung ist gerade so definiert, daß die Ketten $\varkappa$ und $I(\varkappa) = \{I(x)\}_{x \in \varkappa}$ isomorph sind. Ist nun $I(\varkappa') = \{I(x_i)\}_{i=1,2,\ldots}$ eine konfinale Teilfolge in $I(\varkappa)$, so muß $\varkappa' = \{x_i\}$ in $\varkappa$ konfinal sein. Da $(M, <)$ nach Voraussetzung σ-induktiv ist, liegt $\sup \varkappa'$ in M. Da $\varkappa'$ konfinal ist, gilt also $\sup \varkappa = \sup \varkappa' \in M$.

Wir können dieses Prinzip auf die Mengen $\overline{L}$, $\overline{L}_+$ und $\mathscr{M}$ anwenden, ferner z.B. auf den Teil aller $f \in L^1$ mit $\alpha \leq I(f) \leq \beta$ mit festen α und β. Zwei Funktionen aus $\overline{L}$, die sich um eine Nullfunktion unterscheiden, sind unvergleichbar oder identisch. Ferner sind alle nicht summierbaren $f \in \overline{L}_+$ (d.h. alle positiven f mit $I(f) = \infty$) unvergleichbar. Daraus folgt, daß $(\overline{L}, \lhd)$ kein Verband mehr ist. Aber auch $(L^1, \lhd)$ ist, wie man sofort sieht, kein Verband mehr. Für jede Kette $\varkappa \in (\overline{L}, \lhd)$ und jedes $x \in L^1_+$ gilt offenbar $\sup\limits_{f \in \varkappa} I(xf) = I(x \sup \varkappa)$. Wir wollen nun die Nützlichkeit unserer Definition in einem kurzen Beweis des Satzes von RADON-NIKODYM erweisen.

(1.2) *Zu jeder positiven, volladditiven auf* $\mathscr{M}$ *definierten und gleichmäßig beschränkten Mengenfunktion* m*, welche auf* $\mathscr{M}^0$ *verschwindet, existiert ein* $f \in L^1_+$*, mit welchem für alle* $X \in \mathscr{M}$ *gilt:*

$$m(X) = I(f \chi_X).$$

Dieses f *ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wir wählen ein maximales $f \in (\overline{L}_+, \lhd)$ mit $I(f\chi_X) \leq m(X)$ für alle $X \in \mathscr{M}$ und zeigen, daß für dieses f die Behauptung von (1.2) gilt. Zunächst liegt f in L^1_+, denn mit geeignetem positivem C gilt $I(f\chi_X) \leq m(X) \leq C$ gleichmäßig in X. Wir wollen zeigen, daß die positive Mengenfunktion $n(X) = m(X) - I(f\chi_X)$ auf $\mathscr{M}$ verschwindet. Falls n nicht verschwindet, gibt es ein $M \in \mathscr{M}$ mit $0 < n(M)$ und $I(\chi_M) < \infty$. Da n auf $\mathscr{M}^0$ verschwindet, folgt $I(\chi_M) > 0$, wir können also $n(M) \equiv 2\nu I(\chi_M)$ setzen. Nun sei W maximal aus $(\mathscr{M}, \lhd)$ mit $n(W) \leq \nu I(\chi_W)$ und $W \subset M$. Sei $W' = M - W$. Wegen $n(M) = 2\nu I(\chi_M)$ ist $n(W') > 0$, also $W' \notin \mathscr{M}^0$. Für $U \subset W'$, $U \in \mathscr{M}$ gilt ferner $\nu I(\chi_U) \leq n(U)$. Das ist trivial für $U \in \mathscr{M}^0$ und folgt für die übrigen U aus der Maximalität von W. Setzen wir $g = \nu \chi_{W'}$, so ist $f \lhd f + g$ und für $X \in \mathscr{M}$ gilt

$$I(g\chi_X) = \nu I(\chi_{X \cap W'}) \leq n(X \cap W') \leq n(X),$$

also

$$I((f+g)\chi_X) \leq I(f\chi_X) + n(X) = m(X),$$

was der Maximalität von f widerspricht. Folglich ist $n = 0$, d.h. $m(X) = I(f\chi_X)$. Die Eindeutigkeit von f folgt wie üblich. Wir bemerken noch, daß dieser Beweis keine Reduktion auf endliches I benutzt.

Besondere Bedeutung haben für uns die Maßräume, die der folgenden Bedingung genügen:

(Φ) *$\mathcal{M}$ enthält ein Teilsystem Φ paarweise disjunkter Teile $S_\mu \subset S$, derart, daß*

1. jedes $X \in \mathcal{M}$ mit höchstens abzählbar vielen $S_\mu \in \Phi$ einen nicht leeren Durchschnitt hat und

2. der Durchschnitt $X \cap (S - \bigcup_\mu S_\mu)$ für jedes $X \in \mathcal{M}$ eine Nullmenge ist.

Wir nennen solch ein System Φ eine *meßbare Zerlegung* von S.

Ist S lokal kompakt und I ein Radonsches Integral, so ist die Bedingung (Φ) stets erfüllt, siehe [2], ch. V, § 1, n° 4. *Wir setzen im folgenden immer voraus, daß der Maßraum S meßbare Zerlegungen besitzt.* Offenbar kann man dann statt S ebensogut $\bigcup_\mu S_\mu$ als Ausgangsmenge nehmen, d.h. man kann, jedenfalls im Falle abstrakter Maßräume, annehmen, daß S die Vereinigung paarweise fremder integrierbarer Mengen S_μ ist und das jedes integrierbare M in der Vereinigung höchstens abzählbar vieler S_μ liegt. Weiter darf man annehmen, daß die S_μ sogar summierbar sind, d.h. daß $m(S_\mu) < \infty$ ist für alle μ.

Außer $\bar{L}$ und L^1 betrachten wir noch das System Λ der *meßbaren* Funktionen auf S. Dabei heißt f meßbar, wenn für jedes $X \in \mathcal{M}$ das Produkt $f\chi_X$ integrierbar ist. Offenbar genügt es, daß sämtliche $f_\mu = f\chi_{S_\mu}$, $S_\mu \in \Phi$, integrierbar sind. Umgekehrt: Sei auf jedem S_μ eine Funktion $f_\mu \in \bar{L}_+$ definiert. Für alle $s \notin S_\mu$ sei $f_\mu(s) = 0$. Dann gehört $f = \Sigma_\mu f_\mu$ zu Λ, genauer zum System Λ_+ der positiven Funktionen aus Λ. Ein Teil $M \subset S$ heißt meßbar, wenn χ_M in Λ_+ liegt, d.h. wenn alle $M \cap S_\mu$ in $\mathcal{M}$ liegen. Das System der meßbaren Mengen sei $\mathcal{L}$.

Wir können auch Λ und $\mathcal{L}$ induktiv ordnen. Es genügt, dieses für Λ durchzuführen: Sind f und g aus Λ, so bedeute $f \lhd g$, daß $f\chi_{S_\mu} \leqq g\chi_{S_\mu}$ ist im Sinne von $(\bar{L}, \lhd)$ für alle $S_\mu \in \Phi$. Es ist klar, daß auch diese Ordnungen, die von Φ abhängen, induktiv sind. *Wir bemerken, daß die Ordnungen in $(\bar{L}, \lhd)$ und in $\bar{L}$ als geordneter Teil von $(\Lambda, \Phi, \lhd)$ im allgemeinen nicht übereinstimmen!*

Wir können in Λ eine uneigentliche Seminorm definieren:

$$(\beta) \qquad |f|_\infty = \sup_{X \in \mathcal{M}} I(|f|\chi_X)/m(X), \quad X \notin \mathcal{M}^0.$$

Alle $f \in \Lambda$ mit $|f|_\infty < \infty$ bilden einen Vektorraum $L^\infty(S)$, der den Unterraum $N(S)$ aller f mit $|f|_\infty = 0$ enthält. Der Faktorraum $\mathfrak{L}^\infty(S) = L^\infty(S)/N(S)$ ist bekanntlich ein reeller Banach-Raum, sogar eine kommutative halbeinfache Banach-Algebra. Wie üblich gewinnt man aus (1.2) den etwas allgemeineren Satz

(1.3) *Ist m ein positives, volladditives, endlichwertiges Maß auf $\mathcal{M}$, das auf $\mathcal{M}^0$ verschwindet, so existiert ein $f \in \Lambda_+$ mit $m(X) = I(f\chi_X)$ für alle $X \in \mathcal{M}$. Gilt $m(X) \leqq C\, I(\chi_X)$ für alle $X \in \mathcal{M}$, so liegt f in $L^\infty(S)$ und es ist $|f|_\infty \leqq C$.*

Übrigens kann man (1.3) mit Hilfe der Ordnung in $(\Lambda, \Phi, \lhd)$ genau wie (1.2) beweisen.

§ 2

Sei p eine reelle Zahl ≥ 1. Die Menge aller komplexwertigen Funktionen $f=g+ih$ auf S mit reellen Funktionen $g, f \in \overline{L}$, für welche $|f|^p=(g^2+h^2)^{p/2}$ in L_+^1 liegt, bilden einen Vektorraum L^p, in dem durch $|f|_p=I(|f|^p)^{1/p}$ eine Seminorm definiert ist. Ist N^p der Unterraum aller $f \in L^p$ mit $|f|_p=0$, so ist der Faktorraum $\mathfrak{L}^p(S)=L^p/N^p$ bekanntlich ein komplexer Banach-Raum. Den in § 1 eingeführten Raum $\mathfrak{L}^\infty(S)$ betrachten wir von nun an auch als komplex. Die entsprechenden reellen Räume bezeichnen wir mit ${}^r\mathfrak{L}^p(S)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ist $f=g+ih \in \mathfrak{L}^\infty$, so sind $g, h \in {}^r\mathfrak{L}^\infty$ und es ist $|f|_\infty=|(g^2+h^2)^{\frac{1}{2}}|_\infty$. Wir bezeichnen durchweg die Elemente aus $\mathfrak{L}^p$ durch die sie repräsentierenden Funktionen.

Ist neben S ein weiterer Maßraum T gegeben, so können wir den Produktraum $S \times T$ bilden und hierzu die Banach-Räume $\mathfrak{L}^p(S \times T)$ betrachten. Liegt x in $\mathfrak{L}^p(S \times T)$ und f in $L^\infty(S)$, so liegt die Funktion fx: $(s,t) \to f(s)\, x(s,t)$ wieder in $\mathfrak{L}^p(S \times T)$. Die Abbildung $x \to fx$ ist also ein beschränkter linearer Operator A_f von $\mathfrak{L}^p(S \times T)$. Man erkennt leicht, daß die Operatornorm $|A_f| = |f|_\infty$ ist. In dieser Weise ist $\mathfrak{L}^\infty(S)$ also isomorph dargestellt als kommutative gleichmäßig abgeschlossene Algebra beschränkter Operatoren von $\mathfrak{L}^p(S \times T)$. Wir bezeichnen diese Algebra mit $\boldsymbol{A}_S$. Insbesondere ist $\boldsymbol{A}_S$ eine Operatoralgebra von $\mathfrak{L}^p(S)$.

(2.1) *$\boldsymbol{A}_S$ ist eine maximale kommutative Algebra beschränkter Operatoren von $\mathfrak{L}^p(S)$, $p < \infty$.*

Beweis: Sei U ein beschränkter mit $\boldsymbol{A}_S$ elementweise vertauschbarer Operator. Ist $\boldsymbol{\Phi}$ eine meßbare Zerlegung von S und $\chi_\mu=\chi_{S_\mu}$ für $S_\mu \in \boldsymbol{\Phi}$, so ist $U\chi_\mu=u_\mu(s) \in \mathfrak{L}^p(S)$ für jedes μ und $u=\sum_\mu u_\mu \in \Lambda$. Ist q die Operatornorm von U, so ist die Menge N aller $s \in S$ mit $q < q+\varepsilon \leq |u(s)|$ meßbar. Setzen wir $\varphi=A_{\chi_N}\chi_\mu=\chi_{N \cap S_\mu}$, so ist $U\varphi=A_{\chi_N}U\chi_\mu=u\varphi$ und es gilt

$$(q+\varepsilon)\,|\varphi|_p=I\left(|(q+\varepsilon)\,\varphi|^p\right)^{1/p} \leq I\left(|u(s)\,\varphi|^p\right)^{1/p}=|U\varphi|_p \leq q\,|\varphi|_p$$

also $|\varphi|_p=|\chi_{N \cap S_\mu}|_p=0$, d.h. aber $|u|_\infty \leq q+\varepsilon$, also $|u|_\infty \leq q$. Folglich ist $u \in \mathfrak{L}^\infty(S)$ und $U\chi_M=u\chi_M=A_u\chi_M$ für alle $M \in \mathscr{M}$. Da die Linearkombinationen dieser χ_M in $\mathfrak{L}^p$ dicht liegen, folgt $U=A_u \in \boldsymbol{A}_S$.

Der Ring $\mathfrak{L}^\infty(S)$ wird von den charakteristischen Funktionen χ_M der $M \in \mathscr{L}$ erzeugt, der Ring $\boldsymbol{A}_S$ dementsprechend vom System $\mathscr{P}_S$ der in $\boldsymbol{A}_S$ liegenden Projektionen $P=P_M$, die gerade den χ_M entsprechen.

(2.2) *$\mathscr{P}_S$ ist ein vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen.*

Es ist lediglich die Vollständigkeit von $\mathscr{P}_S$ zu zeigen. Sei $\varkappa$ eine Kette aus $\mathscr{P}_S$ und λ eine maximale Kette aus $(\mathscr{L}, \boldsymbol{\Phi}, \lhd)$, für die $\varkappa'=\{P_M\}_{M \in \lambda}$ eine Teilkette aus $\varkappa$ ist. Es ist $M'=\sup \lambda \in \mathscr{L}$. Ist $\varkappa'$ konfinal in $\varkappa$, so ist $\sup \varkappa = \sup \varkappa' = P_{M'} \in \mathscr{P}_S$. Andernfalls gibt es ein $P_X \in \varkappa$ mit $P_M < P_X$ für alle $M \in \lambda$, also $P_{M'} \leq P_X$, wir können deshalb $M' \subset X$ annehmen. Setzen wir $X_\mu=M' \cap S_\mu$ falls $P_{M'}P_{S_\mu}=P_XP_{S_\mu}$ ist und $X_\mu=X \cap S_\mu$ sonst, so ist $X'=\cup X_\mu \supseteq M' \rhd M$ für alle $M \in \lambda$ und $P_{X'}=P_X \in \varkappa$, λ wäre also nicht maximal.

Uns interessiert in dieser Arbeit hauptsächlich die Frage, wie weit sich der bisher in diesem Paragraphen beschriebene Sachverhalt umkehren läßt, also das Problem, ob sich zu einem Banach-Raum $\mathfrak{B}$, für den ein vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen $\mathscr{P}$ gegeben ist, Maßräume S und T finden lassen, derart, daß $\mathfrak{B}=\mathfrak{L}^p(S\times T)$ und $\mathscr{P}=\mathscr{P}_S$ ist. Natürlich ist klar, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathscr{P}$ bestimmten Bedingungen genügen müssen, z.B. muß die Operatornorm der von Null verschiedenen $P\in\mathscr{P}$ gleich Eins sein, ferner muß $\mathfrak{B}$ sich überhaupt als $\mathfrak{L}^p$-Raum darstellen lassen. *Aus diesem Grunde werden wir uns im folgenden auf Hilbert-Räume beschränken und voraussetzen, daß die Projektionen stets selbstadjungiert sind.* Daß auch diese Voraussetzungen noch nicht genügen, zeigt folgende Überlegung: Ist X ein meßbarer Teil aus $S\times T$ und $X\cap(M\times T)$ nur für die $M\in\mathscr{M}_S^0$ eine Nullmenge, so ist die Projektion P_X von $\mathfrak{L}^2(S\times T)$ auf $\mathfrak{L}^2(X)$ mit $\mathscr{P}_S$ elementweise vertauschbar und $\mathscr{P}=P_X\mathscr{P}_S=\{P_{X\cap(M\times T)}\}_{M\in\mathscr{L}_S}$ ist zu $\mathscr{P}_S$ isomorph; deshalb ist $\mathscr{P}$ ein vollständiger Boolescher Verband von Projektionen des Raumes $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}^2(X)$. Im allgemeinen wird sich $\mathfrak{H}$ nicht als $\mathfrak{L}^2(S_1\times T_1)$ mit $\mathscr{P}=\mathscr{P}_{S_1}$ darstellen lassen. Deshalb müssen wir die allgemeinere Darstellung von $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{L}^2(X)$ mit $X\subset S\times T$ und $\mathscr{P}=P_X\mathscr{P}_S$ ebenfalls als mögliche Lösungen unseres Problems zulassen. Die folgenden Definitionen sollen die Formulierungen vereinfachen. Wir betrachten von nun an nur noch Hilbert-Räume, insbesondere sei $\mathfrak{H}$ stets ein Hilbert-Raum. Ein *Stamm* von $\mathfrak{H}$ ist ein von Null verschiedener vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen von $\mathfrak{H}$. Das Symbol $\mathscr{P}$, ohne oder mit Indizes, bezeichne stets Stämme.

Der Stamm $\mathscr{P}$ ist die *Summe* der Stämme $\mathscr{P}_\mu$, wenn alle $\mathscr{P}_\mu$ paarweise orthogonal sind und $\mathscr{P}$ der kleinste alle $\mathscr{P}_\mu$ enthaltende Stamm ist. In Zeichen: $\mathscr{P}=\sum_\mu\mathscr{P}_\mu$. Ist E_μ die maximale Projektion aus $\mathscr{P}_\mu$ und E die aus $\mathscr{P}$, so ist $E=\sum_\mu E_\mu$ (starke Konvergenz). $\mathscr{P}$ besteht genau aus allen Summen $P=\sum_\mu P_\mu$ mit $P_\mu=E_\mu P\in\mathscr{P}_\mu$. Der Zerlegung von $\mathscr{P}$ entspricht die Darstellung von $\mathfrak{H}_\mathscr{P}=E\mathfrak{H}$ [1]) als direkte Summe der $\mathfrak{H}_\mu=E_\mu\mathfrak{H}$. Ist umgekehrt die maximale Projektion $E\in\mathscr{P}$ starke Summe paarweise orthogonaler $E_\mu\in\mathscr{P}$, so ist $\mathscr{P}$ die Summe der Teilstämme $\mathscr{P}_\mu=E_\mu\mathscr{P}$ [2]). Wir machen von diesen elementaren und bekannten Eigenschaften der Stämme stets Gebrauch, ohne sie jeweils im einzelnen zu erwähnen.

Ein *Atom* eines Stammes ist eine minimale Projektion $P\neq 0$.

Ein *atomarer Stamm* besteht aus genau zwei Projektionen.

Ein *diskreter Stamm* ist Summe atomarer Stämme.

Ein *dichter Stamm* enthält keine Atome.

Ein dichter Stamm ist auch im ordnungstheoretischen Sinne dicht: Sind P_1, $P_2\in\mathscr{P}$ und $P_1<P_2$, so gibt es ein $Q\in\mathscr{P}$ mit $0<Q<P_2-P_1$, also $P_1<P_1+Q<P_2$.

[1]) Mit $A\,\mathfrak{M}$ bezeichnen wir stets das Bild der Menge $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$ bei Anwendung des Operators A.

[2]) Ist $\mathscr{P}$ ein Stamm und P_0 eine mit $\mathscr{P}$ vertauschbare Projektion, so bezeichnen wir den Stamm aller P_0P, $P\in\mathscr{P}$, stets mit $P_0\mathscr{P}$.

(2.3) *Jeder Stamm $\mathscr{P}$ ist Summe eines dichten und eines diskreten Stammes.*

Die Atome aus $\mathscr{P}$ sind paarweise orthogonal, wir können also ihre Summe E_1 bilden. Ist $E_2 = E - E_1$, E maximal in $\mathscr{P}$, so ist $\mathscr{P}_1 = E_1\mathscr{P}$ diskret, $\mathscr{P}_2 = E_2\mathscr{P}$ offensichtlich dicht und $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2$.

Nun seien S und T Maßräume. Wir betrachten im Produktraum $S \times T$ nur solche meßbaren Teile X, für welche die Teilmengen $X \cap (M \times T)$ nur für die $M \in \mathscr{M}_S^0$ Nullmengen sind. Besonders wichtige Teile dieser Art sind die Treppen: Ein Teilraum $X \subset S \times T$ heißt eine *Treppe*, wenn es eine meßbare Zerlegung Φ von S gibt, derart daß $X = \bigcup_{S_\mu \in \Phi} S_\mu \times T_\mu$ ist und die T_μ eine Kette meßbarer Nicht-Nullmengen von T bilden. Für eine Treppe gilt offenbar $\mathfrak{L}^2(X) = \sum_\mu \mathfrak{L}^2(S_\mu \times T_\mu)$.

Wir hatten in $\mathfrak{L}^2(S \times T)$ bereits den Stamm $\mathscr{P}_S$ definiert. Ist $X \subset S \times T$ meßbar und P_X die Projektion von $\mathfrak{L}^2(S \times T)$ auf $\mathfrak{L}^2(X) = \mathfrak{H}$, so ist $P_X \mathscr{P}_S = \mathscr{P}$ ein durch S, T und X eindeutig bestimmter zu $\mathscr{P}_S$ isomorpher Stamm, den wir den zu S gehörigen Stamm oder kürzer den S-Stamm von $\mathfrak{H}$ nennen und wieder mit $\mathscr{P}_S$ bezeichnen. Wir können nun unser Hauptergebnis formulieren:

Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathscr{P}$ ein Stamm, der den Einheitsoperator E von $\mathfrak{H}$ enthält, so gibt es einen Maßraum S, einen diskreten Maßraum D und eine Treppe X in $S \times D$, derart, daß $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{L}^2(X)$ ist und sich bei diesem Isomorphismus $\mathscr{P}$ und $\mathscr{P}_S$ entsprechen. Das heißt: Identifiziert man $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{L}^2(X)$, so ist $\mathscr{P} = \mathscr{P}_S$.

Natürlich ist die Bedingung $E \in \mathscr{P}$ keine echte Einschränkung. Dagegen können wir die Bedingung der Vollständigkeit des Stammes $\mathscr{P}$ noch etwas abschwächen. Statt vorauszusetzen, daß mit jeder Kette $\varkappa$ auch stets $\sup \varkappa$ und $\inf \varkappa$ zu $\mathscr{P}$ gehört, genügt es zu verlangen, daß stets $\inf \varkappa$ zu $\mathscr{P}$ gehört und daß für jedes *abzählbare* $\varkappa$ auch $\sup \varkappa$ zu $\mathscr{P}$ gehört. Dieser Bedingung genügt z. B. das System $\mathscr{P}_0$ aller $P_M \in \mathscr{P}_S$ mit $M \in \mathscr{M}_S$. Man kann leicht sehen, daß jeder Verband $\mathscr{P}$ vertauschbarer Projektionen, welcher dieser σ-Vollständigkeitsbedingung genügt, einen Stamm $\mathscr{P}_S$ erzeugt und daß das System $\mathscr{P}_0$ der P_M, $M \in \mathscr{M}_S$, in $\mathscr{P}$ eindeutig bestimmt ist als Menge aller $P \in \mathscr{P}$, die sich als höchstens abzählbare Summe $P = \sum_i P_i$ mit orthogonalen $P_i \in \mathscr{P}$ darstellen lassen. Die Bedingung der Vollständigkeit bei Stämmen ist also letzten Endes auch keine wesentliche Einschränkung. Andererseits bringt sie naturgemäß viele technische Vereinfachungen mit sich.

Wir können das Problem nun leicht noch weiter reduzieren. Ist der Maßraum D diskret, so hängt $\mathfrak{L}^2(S \times D)$ offenbar nur von S und der *Mächtigkeit* von D ab; ist also $X = \bigcup (S_\mu \times D_\mu)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X) = \sum \mathfrak{L}^2(S_\mu \times D_\mu)$, so können wir alle D_μ der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ mit einem diskreten Maßraum $D_\mathfrak{a}$ dieser Mächtigkeit identifizieren. Die Vereinigung $S_\mathfrak{a}$ der entsprechenden S_μ ist ein meßbarer Teil aus S. Es ist dann $\mathfrak{H} = \sum_\mathfrak{a} \mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a} \times D_\mathfrak{a}) = \mathfrak{L}^2(X')$, wobei nun $X' = \bigcup S_\mathfrak{a} \times D_\mathfrak{a}$ ist. Das System der $D_\mathfrak{a}$ können wir dabei als Kette aus Teilmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ eines genügend großen diskreten Maßraumes betrachten. In $\mathfrak{L}^2(S \times D_\mathfrak{a})$ hat $D_\mathfrak{a}$ natürlich nur formale Bedeutung, in Wirklichkeit handelt es sich bei

diesem Hilbert-Raum um die gewöhnliche direkte Summe von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{L}^2(S)$ isomorphen Summanden. Wir führen deshalb die folgende kürzere Schreibweise ein:

$$\mathfrak{L}^2(S \times D_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S).$$

Hiermit können wir dann auch $\mathfrak{H} = \sum_\mathfrak{a} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a})$ schreiben.

S ist die punktfremde Vereinigung der meßbaren Teile $S_\mathfrak{a}$, die aber im allgemeinen nicht mehr integrierbar sind. Ist $\mathfrak{H} = \sum_\lambda \mathfrak{H}^\lambda$ und gilt $\mathfrak{H}^\lambda = \sum_\mathfrak{a} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a}^\lambda)$ für jedes λ, so können wir den Maßraum S als punktfremde Vereinigung aller $S_\mathfrak{a}^\lambda$ definieren. Mit $S_\mathfrak{a} = \bigcup_\lambda S_\mathfrak{a}^\lambda$ ist dann offensichtlich $\mathfrak{H} = \sum_\mathfrak{a} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a})$. Ferner gilt für die Stämme: $\mathfrak{P}_S = \sum \mathfrak{P}_{S^\lambda}$, wobei $S^\lambda = \bigcup_\mathfrak{a} S_\mathfrak{a}^\lambda$ ist. Daraus folgt, daß unser Problem für einen Stamm $\mathfrak{P}$ gelöst ist, wenn wir $\mathfrak{P} = \sum \mathfrak{P}_\lambda$ haben und für jedes $\mathfrak{P}_\lambda$ das Problem gelöst ist. Wegen (2.3) ist das Problem deshalb auf dichte und atomare Stämme reduziert. Für atomare Stämme ist die Lösung trivial: Ist $\mathfrak{P} = \{0, E\}$, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(D_1)$, wobei $\mathfrak{a}$ die Dimension von $\mathfrak{H}$ und D_1 ein einpunktiger diskreter Maßraum ist.

Wir nennen einen Stamm *zyklisch*, wenn $\mathfrak{H}$ ein Element z enthält, derart, daß genau für die maximale Projektion $E \in \mathfrak{P}$ die Gleichung $Ez = z$ gilt. M.a.W.: $\mathfrak{P}$ heißt zyklisch, wenn ein z existiert mit $Ez = z$ und $Pz \neq z, |Pz| < |z|$ für alle von E verschiedenen $P \in \mathfrak{P}$.

(2.4) *Jeder Stamm ist Summe zyklischer Stämme.*

Sei $\{\mathfrak{P}_\mu\}$ ein maximales System paarweise orthogonaler zyklischer Stämme und $\mathfrak{P}' = \sum_\mu \mathfrak{P}_\mu$ ihre Summe. Sei E' die maximale Projektion aus $\mathfrak{P}'$ und E die aus $\mathfrak{P}$. Ist $E'' = E - E' \neq 0$, so gibt es ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $E''x = z \neq 0$. Ist $P \in \mathfrak{P}$ minimal mit $Pz = z$, so ist der Stamm $P\mathfrak{P}$ zyklisch und wegen $P \leq E''$, also $PE' = 0$, zu allen $\mathfrak{P}_\mu$ orthogonal. Dieser Widerspruch zeigt, daß $E'' = 0$, also $E = E'$ und somit $\mathfrak{P} = \sum_\mu \mathfrak{P}_\mu$ sein muß.

§ 3

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben das Problem auf den folgenden Fall reduziert: Es ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ gegeben und ein zyklischer dichter Stamm $\mathfrak{P}$, der den Einheitsoperator E enthält. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

(3.1) *$\mathfrak{H}$ enthält einen $\mathfrak{P}$-invarianten Unterraum $\mathfrak{H}_1$ mit folgenden Eigenschaften: Der von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{H}_1$ induzierte Stamm $\mathfrak{P}_1$ ist zu $\mathfrak{P}$ isomorph. Es existiert ein Maßraum $S = (S, I)$ und ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{L}^2(S)$, der einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{P}_1$ (und damit auch $\mathfrak{P}$) und $\mathfrak{P}_S$ induziert.*

Es genügt, (3.1) mit $'\mathfrak{L}^2(S)$ statt mit $\mathfrak{L}^2(S)$ zu beweisen.

$\mathfrak{P}$ ist zyklisch, d.h. $\mathfrak{H}$ enthält ein Element e vom Betrage 1 mit $|Pe| < 1$ für alle von E verschiedenen $P \in \mathfrak{P}$. Der von den *reellen* Linearkombinationen der Pe, $P \in \mathfrak{P}$, erzeugte Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_1$ ist $\mathfrak{P}$-invariant. Wir zeigen

zunächst, daß der von $\mathscr{P}$ in $\mathfrak{H}_1$ induzierte Stamm $\mathscr{P}_1$ mit $\mathscr{P}$ isomorph ist. Das folgt aus

(3.2) *Für die $P \in \mathscr{P}$ ist die Beziehung $P \leftrightarrow Pe$ eineindeutig.*

Sind P, $Q \in \mathscr{P}$ und ist $Pe = Qe$, so folgt $(E-(P-PQ))\,e = e$, also $E-(P-PQ)=E$, d.h. $P=PQ$ und genauso $Q=PQ$, also $P=Q$.

Statt $\mathscr{P}_1$ schreiben wir nun wieder $\mathscr{P}$. Wir definieren mit Hilfe des Elementes e eine lineare Abbildung l des Ringes der beschränkten Operatoren A von $\mathfrak{H}$ durch die Formel

$$l(A) = (Ae, e).$$

l liefert eine isotone Abbildung von $\mathscr{P}$ in das abgeschlossene Intervall $\mathfrak{I} = [0,1]$.

(3.3) *l bildet maximale Ketten aus $\mathscr{P}$ auf $\mathfrak{I}$ ab.*

Da $\mathscr{P}$ dicht und vollständig ist, muß eine maximale Kette $\varkappa \in \mathscr{P}$ ebenfalls dicht und vollständig sein, außerdem muß 0 und E in $\varkappa$ liegen. Weil l isoton, schwach stetig und auf $\mathscr{P}$ wegen (3.2) eineindeutig ist, muß $l(\varkappa)$ ein abgeschlossener dichter Teil von $\mathfrak{I}$ sein, der 0 und 1 enthält. Das geht nur für $l(\varkappa)=\mathfrak{I}$.

Wir wählen nun ein System Ω maximaler Ketten $\varkappa$ derart, daß jedes $P \in \mathscr{P}$ in einem $\varkappa \in \Omega$ liegt. Das ist möglich, da sicher jedes P in einer Kette und folglich auch in einer maximalen Kette liegt. Für jedes $\varkappa \in \Omega$ ist $l(\varkappa)=\mathfrak{I}_\varkappa$ nach (3.3) gleich $\mathfrak{I}$. Wir wollen jedoch die einzelnen $\mathfrak{I}_\varkappa$ unterscheiden und setzen

$$S = \prod_{\varkappa \in \Omega} \mathfrak{I}_\varkappa = \mathfrak{I}^\Omega.$$

Dieses Tychonoffsche Produkt ist ein kompakter Raum. Wir betrachten Punktepaare $\alpha = \{\alpha_\varkappa\}$ und $\beta = \{\beta_\varkappa\}$ aus S mit folgenden Eigenschaften: 1. Fast alle $\alpha_\varkappa = 0$. 2. Fast alle $\beta_\varkappa = 1$: 3. $\alpha_\varkappa \leq \beta_\varkappa$ für alle $\varkappa \in \Omega$. Jedem solchen Paar ordnen wir einen *Quader* $q = q(\alpha, \beta)$ zu. Darunter verstehen wir die Menge aller Punkte $\xi = \{\xi_\varkappa\} \in S$ mit $\alpha_\varkappa \leq \xi_\varkappa \leq \beta_\varkappa$ für alle $\varkappa \in \Omega$. Das Innere eines Quaders q, d.h. die Menge aller ξ mit $\alpha_\varkappa < \xi_\varkappa < \beta_\varkappa$, bezeichnen wir mit q^0. Ist q^0 leer, so nennen wir q *entartet*. Der Durchschnitt endlich vieler Quader ist wieder ein Quader. Sind q und q_i endlich viele Quader, so bedeute $q = \sum q_i$, daß $q = \cup q_i$ und $q_i^0 \cap q_j^0$ leer ist für $i \neq j$. Zu endlich vielen Quadern q_k gibt es immer eine Menge endlich vieler Quader q_i', derart, daß $q_k = \sum' q_i'$ ist, wobei in $\sum'$ über geeignete q_i zu summieren ist. Wir können auch schreiben

$$(\gamma) \qquad q_k = \sum \varepsilon_{ki}\, q_i'$$

mit $\varepsilon_{ki} = 1$ falls $q_i' < q_k$ und $\varepsilon_{ki} = 0$ sonst.

Wir bezeichnen mit L den Modul, der von den charakteristischen Funktionen χ_q der Quader über den reellen Zahlen erzeugt wird. In L liegt der Modul L_0 der von den χ_q mit entarteten q erzeugten Funktionen. Wegen (3.3) gibt es zu jedem $\xi \in \mathfrak{I}_\varkappa$ genau ein $P \in \varkappa$ mit $l(P) = \xi$. Wir bezeichnen dieses P mit $P_\xi^\varkappa$. Nun ordnen wir jedem Quader $q = q(\alpha, \beta)$ eine Projektion $P_q \in \mathscr{P}$ zu durch

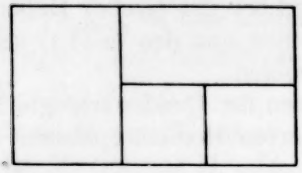
$$P_q = \prod_\varkappa (P_{\beta_\varkappa}^\varkappa - P_{\alpha_\varkappa}^\varkappa).$$

Für entartete q ist offenbar $P_q = 0$. Ferner gelten die Formeln

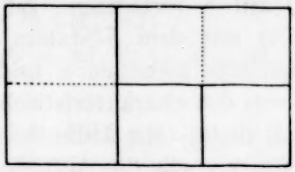
$$(\delta_1) \qquad P_{\Sigma q_i} = \sum P_{q_i},$$

$$(\delta_2) \qquad P_{\cap q_i} = \prod P_{q_i}.$$

(δ_2) folgt unmittelbar aus der Definition. (δ_1) kann man etwa zeigen, indem man $q = \sum q_i$ durch die endlich vielen die q_i begrenzenden Hyperebenen weiter in Quader q_j' zerlegt. Hierbei werden die q_i in entsprechender Weise zerlegt. Das folgende Schema verdeutlicht, wie diese Zerlegung gemeint ist:



$q = \Sigma q_i$



$q = \Sigma q_j', \; q_i = \Sigma^{(i)} q_j'$

Für die Zerlegungen in die q_j' kann man (δ_1) durch Induktion leicht beweisen. Aus $P_{q_i} = \sum^{(i)} P_{q_j'}$, $P_q = \sum P_{q_j'}$ folgt dann $P_q = \sum_j P_{q_j'} = \sum_i \sum^{(i)} P_{q_j'} = \sum P_{q_i}$, d.h. (δ_1).

Wir definieren nun einen Ring-Homomorphismus i von L in den von $\mathfrak{P}$ erzeugten kommutativen Operatorenring $\mathbf{P}$:

$$i: \quad \psi = \sum \alpha_i \chi_{q_i} \to i(\psi) = \sum \alpha_i P_{q_i} \qquad \text{für} \qquad \psi \in L.$$

Wir müssen zeigen, daß aus $\sum \alpha_i \chi_{q_i} = 0$ auch $\sum \alpha_i P_{q_i} = 0$ folgt. Gemäß (γ) gibt es Quader q_j' mit $q_i = \sum \varepsilon_{ij} q_j'$, also

$$\chi_{q_i} \equiv \sum \varepsilon_{ij} \chi_{q_j'} \pmod{L_0} \qquad \text{und} \qquad P_{q_i} = \sum \varepsilon_{ij} P_{q_j'},$$

folglich

$$\psi \equiv \sum_j \Big(\sum_i \alpha_i \varepsilon_{ij}\Big) \chi_{q_j'} \pmod{L_0} \quad \text{und} \quad i(\psi) = \sum_j \Big(\sum_i \alpha_i \varepsilon_{ij}\Big) P_{q_j'}.$$

Dabei können wir noch die entarteten q_j' fortlassen. Dann folgt aus $\psi = 0$ aber $\sum \alpha_i \varepsilon_{ij} = 0$ für alle j und folglich $i(\psi) = 0$. Daß i multiplikativ ist, folgt aus (δ_2). Nun definieren wir auf L ein Integral I durch

$$I(\psi) = l\big(i(\psi)\big), \qquad \psi \in L.$$

I ist homogen und additiv und verschwindet auf L_0. Wir müssen zeigen, daß I auch positiv und stetig ist, d.h. daß aus $\psi_n \searrow 0$ auch $I(\psi_n) \searrow 0$ folgt. Für jedes $\psi \in L$ gibt es eine Kongruenz $\psi \equiv \sum \alpha_i \chi_{q_i^0} \pmod{L_0}$ mit paarweise fremden nicht leeren q_i^0. Ist ψ positiv, so sind auch alle α_i positiv. Dann gilt $I(\psi) = \sum \alpha_i I(\chi_{q_i^0}) = \sum \alpha_i |P_{q_i} e|^2 \geq 0$. Folglich ist I positiv.

Nun sei $\psi_n \searrow 0$ und $\psi_n(s) \leq C$ für alle n und $s \in S$. Es gibt eine Folge von Hyperebenen $H_i < S$, definiert durch $\xi_{\varkappa_i} = \eta_i$, derart, daß ψ_n höchstens auf H_1 bis $H_{k(n)}$ unstetig ist. Dabei können wir noch annehmen, daß $k(n)$ monoton wächst. Sei $\varepsilon > 0$. Wir bestimmen Zahlen $\delta_i > 0$, derart, daß für die durch $|\xi_{\varkappa_i} - \eta_i| \leq \delta_i$ definierten Quader u_i gilt: $I(\chi_{u_i}) = l(P_{u_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$. Für $v_n = \bigcup_{i=1}^{k(n)} u_i^0$

gilt dann $I(\chi_{v_n}) \leq \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$. Das Komplement $w_n = S - v_n$ ist abgeschlossen und ψ_n auf w_n stetig, die Funktion $\varphi_n = \psi_n \chi_{w_n}$ auf S also oberhalb stetig. Da S kompakt ist und auch $\varphi_n \searrow 0$ gilt, gibt es also ein $n_0(\varepsilon)$ mit $\varphi_n(s) \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$. Daraus folgt $\psi_n \leq \varepsilon \chi_{w_n} + C\chi_{v_n}$, also

$$I(\psi_n) \leq \varepsilon I(\chi_{w_n}) + C I(\chi_{v_n}) \leq \varepsilon(1 + C),$$

d.h. $I(\psi_n) \searrow 0$.

Das Funktional I läßt sich nach dem Daniellschen Verfahren zu einem Integral auf S fortsetzen. Zu I und S gehört der (reelle) Hilbert-Raum $\mathfrak{L} = {}^r\mathfrak{L}^2(S)$ mit dem S-Stamm $\mathscr{P}_S$. Wir wollen nun den in (3.1) genannten Isomorphismus zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H}_1$ konstruieren.

Der von den charakteristischen Funktionen der Quader erzeugte Modul L liegt in $\mathfrak{L}$ dicht. Mit Hilfe des oben definierten Homomorphismus i von L in $\boldsymbol{P}$ definieren wie die Abbildung

$$\iota : \psi \to \iota(\psi) = P_\psi e, \quad P_\psi = i(\psi) \in \boldsymbol{P},$$

von L in $\mathfrak{H}_1$. Jedes $P \in \mathscr{P}$ liegt in einem $\varkappa \in \Omega$. Ist $P = P_\alpha^\varkappa$ und q der durch $0 \leq \xi_\varkappa \leq \alpha$ definierte Quader, so ist $P = P_q = P_{\chi_q}$ und $Pe = \iota(\chi_q)$ liegt in $\iota(L)$, d.h. $\iota(L)$ ist dicht in $\mathfrak{H}_1$. Ferner gilt

$$\big(\iota(\varphi), \iota(\psi)\big) = (P_\varphi e, P_\psi e) = (P_\varphi P_\psi e, e) = (P_{\varphi\psi} e, e) = I(\varphi\psi) = (\varphi, \psi).$$

Folglich ist ι ein Isomorphismus zwischen den dichten Unterräumen $L \subset \mathfrak{L}$ und $\iota(L) \subset \mathfrak{H}_1$ und läßt sich zu einem Isomorphismus zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H}_1$ fortsetzen. Für $P_{\chi_q} \in \mathscr{P}$ ist $P_{\chi_q}\, \iota(\psi) = P_{\chi_q \psi} e = \iota(\chi_q \psi) = \iota(P_q \psi)$, d.h. $\iota(P_q) = P_{\chi_q}$. Daraus folgt $\iota^{-1}(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}_S$. Schließlich ist $\iota^{-1}(\mathscr{P})$ ein Teilstamm von $\mathscr{P}_S$, der alle $P_q \in \mathscr{P}_S$ für Quader q enthält. Folglich liegen alle P_M mit M aus dem von den q erzeugten σ-Körper in $\iota^{-1}(\mathscr{P})$, d.h. es ist $\iota(\mathscr{P}_S) = \mathscr{P}$. Damit ist (3.1) bewiesen.

§ 4

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß ein diskreter Maßraum D existiert und eine Treppe X im Produktraum $S \times D$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ und $\mathscr{P} = \mathscr{P}_S$ ist. Ist insbesondere $X = S \times D$, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ nichts anderes als die gewöhnliche direkte Summe $\sum_{d \in D} \mathfrak{L}^2(S_d)$, wobei alle S_d zu S isomorph sind. Umgekehrt: Ist $\mathfrak{H} = \sum_\mu \mathfrak{L}^2(S_\mu)$ mit lauter zu S isomorphen S_μ, so können wir S_μ mit $S \times \{\mu\}$ identifizieren und haben $\mathfrak{H} = \sum_\mu \mathfrak{L}^2(S \times \{\mu\}) = \mathfrak{L}^2(S \times D)$, wenn D der diskrete Maßraum der Indizes μ ist. Dieser besonders einfache Fall macht das folgende Induktionsverfahren plausibel, das im wesentlichen darin besteht, zunächst im orthogonalen Komplement $\mathfrak{H}_1^\perp$ von $\mathfrak{H}_1$ einen Unterraum $\mathfrak{H}_2$ zu finden, der in kanonischer Weise zu einem $\mathfrak{L}^2(S_2)$ mit „möglichst großem" $S_2 \subset S$ isomorph ist; dann in $(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)^\perp$ einen Unterraum $\mathfrak{H}_3 \cong \mathfrak{L}^2(S_3)$ mit möglichst großem $S_3 \subset S_2$ abzuspalten usw. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen existiert ein endlicher Maßraum S und ein abgeschlossener Teilraum $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$, den wir mit $\mathfrak{L}^2(S)$ identifizieren können. Ist ferner P_1 die

Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_1$, so ist $P_1\mathscr{P}=\mathscr{P}_S$ und $\mathscr{P}$ und $\mathscr{P}_S$ sind isomorph. Wir wollen im folgenden auch $\mathscr{P}$ mit $\mathscr{P}_S$ bezeichnen.

Wir betrachten Systeme $H_\varrho=\{p_\mu\}_{\mu<\varrho}$, die für jede Ordnungszahl $\mu<\varrho$ ein Paar $p_\mu=\{\mathfrak{H}_\mu, S_\mu\}$ aus einem Unterraum $\mathfrak{H}_\mu\subset\mathfrak{H}$ und einem summierbaren Teil $S_\mu\in\mathscr{M}_S$ enthalten und die folgende Eigenschaften haben:

α) Die $\mathfrak{H}_\mu$ sind $\mathscr{P}$-invariant und lassen sich so mit $\mathfrak{L}^2(S_\mu)$ identifizieren, daß $\mathscr{P}$ in $\mathfrak{H}_\mu=\mathfrak{L}^2(S_\mu)$ den zugehörigen Stamm $\mathscr{P}_{S_\mu}$ induziert.

β) Es ist $\mathfrak{H}=\sum\limits_{\mu<\varrho}\mathfrak{H}_\mu\oplus\mathfrak{R}_\varrho$.

γ) $\sigma_\varrho=\{S_\mu\}_{\mu<\varrho}$ ist eine absteigende Kette in $(\mathscr{M}_S,\lhd)$.
inf $\sigma_\varrho=T_\varrho$ liegt dann in $\mathscr{M}_S$ und es ist $P_{T_\varrho}=\inf\{P_{S_\mu}\}\in\mathscr{P}=\mathscr{P}_S$.

δ) $(E-P_{T_\varrho})\,\mathfrak{R}_\varrho=0$.

Ist für ein H_ϱ nun $\mathfrak{R}_\varrho\neq 0$, so zeigen wir, daß ein Paar $p_\varrho=\{\mathfrak{H}_\varrho, S_\varrho\}$ existiert, für das die Vereinigung $H_\varrho\cup\{p_\varrho\}$ auch noch die Eigenschaften α) bis δ) hat.

$\mathscr{P}$ enthält ein eindeutig bestimmtes minimales $P\leq P_{T_\varrho}$ mit $(E-P)\,\mathfrak{R}_\varrho=0$. Ist $P=P_{T_\varrho}$, so setzen wir $S_\varrho=T_\varrho$. Ist $P=P_M<P_{T_\varrho}$, so setzen wir $S_\varrho=M\cap T_\varrho$. Dann ist auch $P=P_{S_\varrho}$ und $S_\varrho\trianglelefteq S_\mu$ für alle $\mu<\varrho$, d.h. $\sigma=\sigma_\varrho\cup\{S_\varrho\}$ ist eine Kette aus $\mathscr{M}_S$.

Zu jedem $x\in\mathfrak{R}_\varrho$, $x\neq 0$, gibt es ein minimales $P(x)\in P_{S_\varrho}\mathscr{P}$, das x festläßt. Sei $\{P(x_i)\}=\xi$ ein System paarweise orthogonaler derartiger Projektionen; die x_i sind dann ebenfalls orthogonal. Ist $P'=\sum\limits_i P(x_i)<P_{S_\varrho}$, so gibt es ein $x\in\mathfrak{R}_\varrho$ mit $(P_{S_\varrho}-P')\,x=x\neq 0$. Da dann $P(x)\neq 0$ und zu allen $P(x_i)$ orthogonal ist, ist ξ nicht maximal. Für ein maximales System ξ ist folglich $P_{S_\varrho}=\sum\limits_i P(x_i)$. Wegen $\sum\limits_i\big(P(x_i)\,e,e\big)\leq 1$ kann ξ höchstens abzählbar sein, wir können die x_i also so normieren, daß $h=\sum x_i$ in $\mathfrak{R}_\varrho$ existiert. Offenbar ist $P(h)=P_{S_\varrho}$.

Ist $\mathscr{M}_\varrho$ das System aller meßbaren Teile von S_ϱ und $M\in\mathscr{M}_\varrho$, so ist durch $m(M)=(P_M h,h)$, $P_M\in\mathscr{P}_{S_\varrho}$, ein bezüglich I absolut stetiges positives Maß auf $\mathscr{M}_\varrho$ definiert. Nach (1.2) gibt es also eine I-summierbare positive Funktion f auf S_ϱ mit $m(M)=I(f\chi_M)$ für alle $M\in\mathscr{M}_\varrho$. Die positive Wurzel g aus f liegt dann in $\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ und für $\psi\in L$ gilt:

$$|P_\psi h|^2=(P_\psi^2 h,h)=(P_{\psi^2}h,h)=I(g^2\psi^2)=I\big(|g\psi|^2\big),$$

d.h. $g\psi\in\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ und $|P_\psi h|=|g\psi|_2$. Ein dichter Unterraum des von den $P_\psi h$ erzeugten reellen Hilbert-Raumes wird also durch $P_\psi h\to g\psi$ isomorph in $\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ abgebildet. Dieser Isomorphismus läßt sich zu einem Isomorphismus ϑ eines (komplexen) Unterraumes $\mathfrak{H}_\varrho\subset\mathfrak{R}_\varrho$ in $\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ fortsetzen. Nach Wahl von h kann g höchstens auf einer Nullmenge verschwinden. Ist $f\in\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ auf $\vartheta(\mathfrak{H}_\varrho)$ senkrecht, so folgt $I(gf\chi_X)=0$ für alle $X\in\mathscr{M}_\varrho$, also $gf=0$ fast überall und folglich $f=0$, d.h. es ist $\vartheta(\mathfrak{H}_\varrho)=\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$. Schließlich ist klar, daß $\mathscr{P}$ bei Identifikation von $\mathfrak{H}_\varrho$ und $\mathfrak{L}^2(S_\varrho)$ gerade $\mathscr{P}_{S_\varrho}$ induziert. Im ganzen haben wir gezeigt, daß das System $H_{\varrho+1}=H_\varrho\cup\{\mathfrak{H}_\varrho, S_\varrho\}$ die Eigenschaften α) bis δ) hat und H_ϱ echt enthält. Da die H_ϱ offensichtlich induktiv geordnet sind, existiert ein

maximales H_ζ und für dieses muß $\mathfrak{R}_\zeta = 0$ sein, also:

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mu<\zeta} \mathfrak{H}_\mu = \sum_{\mu<\zeta} \mathfrak{L}^2(S_\mu).$$

Wir wählen als Maßraum D die Menge der Ordnungszahlen $\mu<\zeta$, jede mit dem Maß 1. Für jedes μ liegt dann $S'_\mu = S_\mu \times \{\mu\}$ im Produkt $S \times D$ und $X = \bigcup_\mu S'_\mu$ ist ein meßbarer Teil von $S \times D$. $\{S'_\mu\}$ ist eine meßbare Zerlegung von X und S'_μ für jedes μ mit S_μ kanonisch isomorph. Folglich ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_S$.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß X eine Treppe ist. Die Ketten $\sigma = \sigma_\zeta$ und $m(\sigma) = \{m(S_\mu)\}$, $S_\mu \in \sigma$, sind isomorph und da $m(\sigma)$ wohlgeordnet ist also abzählbar. Folglich ist auch das System Φ der meßbaren Mengen $T_\mu = \left(\bigcap_{\nu<\mu} S_\nu\right) - S_\mu$ abzählbar. Da die T_μ paarweise fremd sind und $S = \bigcup_\mu T_\mu$ ist, ist Φ eine meßbare Zerlegung von S und mit $X_\mu = X \cap (T_\mu \times D)$ gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X) = \sum_\mu \mathfrak{L}^2(X_\mu)$, wobei höchstens abzählbar viele Summanden nicht verschwinden. Nun ist $X = \bigcup_\lambda S_\lambda \times \{\lambda\}$, also

$$X_\mu = \bigcup_\lambda \left\{(S_\lambda \times \{\lambda\}) \cap (T_\mu \times D)\right\} = \bigcup_\lambda (S_\lambda \cap T_\mu) \times \{\lambda\}.$$

Weiter:

$$S_\lambda \cap T_\mu = S_\lambda \cap \left\{\bigcap_{\nu<\mu} S_\nu - S_\mu\right\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \lambda \geq \mu \\ T_\mu & \text{für } \lambda < \mu. \end{cases}$$

Setzen wir $D_\mu = \{\nu\}_{\nu<\mu}$, so ist demnach $X_\mu = T_\mu \times D_\mu$ und folglich ist X in der Tat eine Treppe.

§ 5

Wir wollen jetzt untersuchen, wie weit die Maßräume S_α durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ bestimmt sind. Natürlich können die S_α höchstens bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sein. Dabei heißen Maßräume S und S' *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus ϑ von $\mathfrak{L}^2(S)$ auf $\mathfrak{L}^2(S')$ mit $\vartheta(\mathfrak{P}_S) = \mathfrak{P}_{S'}$ gibt. Wir haben hier der Einfachheit halber den durch ϑ auf den Operatoren induzierten Isomorphismus wieder mit ϑ bezeichnet; das werden wir auch im folgenden tun.

Für den zu S gehörigen Stamm von $\mathfrak{L}^2(S)$ gelte $\mathfrak{P}_S = \sum \mathfrak{P}_\mu$. Ist $P_\mu = P_{S_\mu}$ die maximale Projektion aus $\mathfrak{P}_\mu$, so können wir die punktefremde Vereinigung S^* der S_μ bilden. In S^* sind also Punkte aus verschiedenen S_μ verschieden, obgleich sie als Punkte von S identisch sein können. Da $P_\mu \mathfrak{L}^2(S)$ und $\mathfrak{L}^2(S_\mu)$ kanonisch isomorph sind und $\mathfrak{L}^2(S)$ die Summe der $P_\mu \mathfrak{L}^2(S)$ ist, sind S und S^* äquivalent.

(5.1) *Sind die Stämme $\mathfrak{P}_S$ und $\mathfrak{P}_{S'}$ der Hilbert-Räume $\mathfrak{L}^2(S)$ und $\mathfrak{L}^2(S')$ isomorph, so sind S und S' äquivalent.*

„Isomorph" bezieht sich hier natürlich auf die Vollständiger Verband-Struktur der Stämme. Wegen der Isomorphie können wir $\mathfrak{P}_S$ und $\mathfrak{P}_{S'}$ in Summen von Stämmen $\mathfrak{P}_{S_\mu}$ und $\mathfrak{P}_{S'_\mu}$ zerlegen, wobei der Isomorphismus ϑ $\mathfrak{P}_{S_\mu}$ auf $\mathfrak{P}_{S'_\mu}$ abbildet und die S_μ, bzw. S'_μ meßbare Teilräume endlichen Maßes aus S, bzw. S' sind. Wegen der vor (5.1) gemachten Bemerkung können wir

ferner annehmen, daß $\{S_\mu\}$ und $\{S'_\mu\}$ meßbare Zerlegungen von S und S' sind. Wir brauchen jetzt (5.1) nur für die S_μ und S'_μ zu zeigen, d.h. wir können von vornherein annehmen, daß S und S' endliche Maßräume sind. Ist $e=\chi_S\in\mathfrak{L}^2(S)$, so ist durch $m(X')=\left(\vartheta^{-1}(P_{X'})\,e,e\right)$ auf $\mathfrak{M}_{S'}$ ein positives Maß definiert, sind also I, bzw. I' die Integrale von S, bzw. S', so gibt es nach (1.2) ein I'-summierbares positives $f=g^2$ mit $m(X')=I'(f\chi_{X'})$. Da m nur auf Nullmengen verschwindet, ist wieder $g>0$ fast überall. Der Isomorphismus ϑ hat eine eindeutige Fortsetzung auf die Ringe $L\subset\mathfrak{L}^2(S)$, bzw. $L'\subset\mathfrak{L}^2(S')$ der Linearkombinationen der χ_X, bzw. $\chi_{X'}$. Für $\psi\in L$ setzen wir $\lambda(\psi)=g\vartheta(\psi)$. Aus

$$I'\left(g\vartheta(\psi)\,g\vartheta(\varphi)\right)=I'\left(f\vartheta(\psi\varphi)\right)=I(\psi\varphi)$$

folgt, daß λ ein Isomorphismus von L in $\mathfrak{L}^2(S')$ ist, der sich also zu einem Isomorphismus von $\mathfrak{L}^2(S)$ in $\mathfrak{L}^2(S')$ fortsetzen läßt. $g=\lambda(\chi_S)$ liegt im Bilde von λ, daraus folgt genau wie an entsprechender Stelle in § 4, daß λ ein Isomorphismus von $\mathfrak{L}^2(S)$ auf $\mathfrak{L}^2(S')$ ist. Auf den Stämmen stimmen λ und ϑ ersichtlich überein. Damit ist (5.1) bewiesen.

Der Beweis für die Eindeutigkeit der $S_\mathfrak{a}$ beruht im wesentlichen auf folgendem Lemma:

(5.2) *Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathscr{P}$ ein Stamm von $\mathfrak{H}$. Sind ϑ_1 und ϑ_2 Isomorphismen von $\mathfrak{H}$ auf die Räume $\mathfrak{a}_1\mathfrak{L}^2(S_1)$ und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{L}^2(S_2)$, derart, daß $\vartheta_i(\mathscr{P})=\mathscr{P}_{S_i}$ der S_i-Stamm von $\mathfrak{a}_i\mathfrak{L}^2(S_i)$ ist, $i=1,2$, so ist $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$ und S_1 und S_2 sind äquivalent.*

Beweis: Der S_i-Stamm von $\mathfrak{L}^2(S_i)$ ist zu $\mathscr{P}_{S_i}$ isomorph, da die $\mathscr{P}_{S_i}$ isomorph sind, sind also auch die S_i-Stämme der $\mathfrak{L}^2(S_i)$ isomorph, d.h. die S_i sind nach (5.1) äquivalent. Da man in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{a}\mathfrak{L}^2(S)$ den Raum S offenbar durch einen äquivalenten ersetzen kann, dürfen wir für den Rest des Beweises also $S_1=S_2=S$ voraussetzen. Die Behauptung besagt dann: Haben wir zwei Zerlegungen $\mathfrak{H}=\sum_{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{H}_i^1=\sum_{\mathfrak{a}_2}\mathfrak{H}_i^2$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathscr{P}$-invariante zu $\mathfrak{L}^2(S)$ isomorphe Summanden, so sind die Anzahlen $\mathfrak{a}_i$ der Summanden in beiden Summen gleich. Die Betrachtung meßbarer Zerlegungen von S zeigt zunächst wieder, daß wir uns auf den Fall eines endlichen S beschränken können. Dann gibt es in jedem $\mathfrak{H}_i^1$ auf Grund des Isomorphismus mit $\mathfrak{L}^2(S)$ ein der Funktion $\chi_S\in\mathfrak{L}^2(S)$ entsprechendes Element e_i. Für jedes i ist $e_i=\sum_j a_{ij}$ mit $a_{ij}\in\mathfrak{H}_j^2$. Da für jedes i höchstens abzählbar viele $a_{ij}\neq 0$ sind, liegen die e_i in einer Teilsumme von höchstens $\aleph_0\mathfrak{a}_1$ Summanden $\mathfrak{H}_j^2$; da die Pe_i, $P\in\mathscr{P}$, $\mathfrak{H}$ erzeugen und die $\mathfrak{H}_j^2$ alle $\mathscr{P}$-invariant sind, folgt $\mathfrak{a}_2\leq\aleph_0\mathfrak{a}_1$. Genau so $\mathfrak{a}_1\leq\aleph_0\mathfrak{a}_2$. Folglich ist $\aleph_0\mathfrak{a}_1=\aleph_0\mathfrak{a}_2$, sind also $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide unendlich, so ist $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$. Ist etwa $\mathfrak{a}_2$ endlich und $\leq\mathfrak{a}_1$, so folgt $\mathfrak{a}_2\leq\mathfrak{a}_1\leq\aleph_0$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{a}_2<\mathfrak{a}_1$ nicht möglich ist. Wir können die Elemente $a_{ij}\in\mathfrak{H}_j^2$ mit Funktionen $f_{ij}(s)\in\mathfrak{L}^2(S)$ identifizieren. $F=(f_{ij})$ ist dann eine Matrix von $\mathfrak{a}_1$ Zeilen und $\mathfrak{a}_2$ Spalten. Für jedes $M\in\mathfrak{M}_S$ ist

$$(P_M e_i,e_k)=\sum_j(P_M a_{ij},a_{kj})=I\Big(\sum_j\chi_M f_{ij}\bar{f}_{kj}\Big)=I\Big(\chi_M\Big(\sum_j f_{ij}\bar{f}_{kj}\Big)\Big)=\delta_{ik}\,I(\chi_M)\,.$$

Daraus folgt für jedes Paar i, k fast überall:

$$(\varepsilon) \qquad \sum_j f_{ij}(s)\,\overline{f_{kj}(s)} = \delta_{ik}.$$

Da höchstens abzählbar viele Gleichungen (ε) auftreten, können wir nach eventueller Unterdrückung einer Nullmenge annehmen, daß (ε) überall gilt; d.h. aber, daß $FF^* = E$ die $\mathfrak{a}_1$-reihige Einheitsmatrix ist. $(F^* = (\bar{f}_{ji})$ die transponierte Matrix.) Das ist nur für $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ möglich. Damit ist (5.2) bewiesen.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit der zu einem Stamm $\mathscr{P}$ eines Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}$ gehörigen direkten Zerlegungen beweisen. Angenommen es ist gleichzeitig

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(T_\mathfrak{a}).$$

Wir haben dann entsprechende Zerlegungen der Stämme

$$\mathscr{P} = \sum \mathscr{P}_\mathfrak{a} = \sum \mathscr{P}'_{\mathfrak{a}'}.$$

Sind $E_\mathfrak{a}$ und $E'_{\mathfrak{a}'}$ die maximalen Projektionen aus $\mathscr{P}_\mathfrak{a}$ und $\mathscr{P}'_{\mathfrak{a}'}$, so liegt $P = E_\mathfrak{a} E'_{\mathfrak{a}'}$ in $\mathscr{P}_\mathfrak{a} \cap \mathscr{P}'_{\mathfrak{a}'}$ und es gibt ein $M \subset S_\mathfrak{a}$, sowie ein $M' \subset T_{\mathfrak{a}'}$, derart, daß $P = P_M \in \mathscr{P}_{S_\mathfrak{a}}$ und $P = P_{M'} \in \mathscr{P}_{T_{\mathfrak{a}'}}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} P\,\mathfrak{H} &= P_M\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(M) \\ &= P_{M'}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{L}^2(T_{\mathfrak{a}'}) = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{L}^2(M'). \end{aligned}$$

Nach (5.2) folgt hieraus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ oder $P = 0$. Folglich ist $E_\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{a}'} E_\mathfrak{a} E'_{\mathfrak{a}'} = E_\mathfrak{a} E'_\mathfrak{a}$ und ebenso $E'_\mathfrak{a} = E_\mathfrak{a} E'_\mathfrak{a}$, also $E_\mathfrak{a} = E'_\mathfrak{a}$. Daraus folgt

$$E_\mathfrak{a}\,\mathfrak{H} = E'_\mathfrak{a}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(T_\mathfrak{a}).$$

Wegen (5.2) sind $S_\mathfrak{a}$ und $T_\mathfrak{a}$ dann äquivalent. Damit ist die Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz einer Zerlegung gezeigt. Wir formulieren jetzt unser endgültiges Ergebnis:

Reduktionssatz: *Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum der Dimension $\mathfrak{h}$ und $\mathscr{P}$ ein Stamm, der den Einheitsoperator enthält. Zu jedem $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{h}$ existiert (bis auf Äquivalenz) genau ein Maßraum $S_\mathfrak{a}$ (der auch leer sein kann), derart daß*

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mathfrak{a} \leq \mathfrak{h}} \mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a})$$

und entsprechend

$$\mathscr{P} = \sum_{\mathfrak{a} \leq \mathfrak{h}} \mathscr{P}_\mathfrak{a}$$

ist, wobei die $\mathscr{P}_\mathfrak{a}$ die zu den $\mathfrak{a}\,\mathfrak{L}^2(S_\mathfrak{a})$ gehörigen Stämme $\mathscr{P}_{S_\mathfrak{a}}$ im Sinne von § 2 sind.

Die Funktion $\mathfrak{a} \to \{S_\mathfrak{a}\}$, die jedem $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{h}$ die Äquivalenzklasse der $S_\mathfrak{a}$ zuordnet, ist also eine Unitär-Invariante von $\mathscr{P}$.

§ 6

Wir wollen in diesem letzten Paragraphen zeigen, daß zu jedem Maßraum (S, I) ein äquivalenter *perfekter* Maßraum (E, p) existiert. Unter einem perfekten Maßraum verstehen wir (vgl. [*10*]) einen lokal kompakten Raum E mit positivem Radonschem Maß p und der Eigenschaft, daß jede beschränkte

meßbare Funktion zu einer stetigen äquivalent ist und ferner jede nicht leere offene summierbare Menge positives Maß hat.

Wir beginnen mit dem Fall eines *endlichen* Maßraumes (S, I) und setzen $I(\chi_S)=1$ voraus. Dann ist $\mathfrak{L}^\infty(S)=\mathfrak{B}$ eine halbeinfache involutorische $(f^*(s)=\overline{f(s)})$ kommutative Banach-Algebra mit Einselement. Die maximalen Ideale von $\mathfrak{B}$ bilden also einen kompakten Raum E und die Fourier-Transformation T ist wegen $|f^*|_\infty=|f|_\infty$ ein *-Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf die Algebra $\mathfrak{C}=C(E)$ aller stetigen Funktionen auf E. Es ist $\mathsf{T}f^*=\overline{\mathsf{T}f}$ und $|\mathsf{T}f|=|f|_\infty$ (mit $|\varphi|=\max_{x\in E}|\varphi(x)|$ für $\varphi\in\mathfrak{C}$). Die reellen Teile ${}'\mathfrak{B}$, bzw. ${}'\mathfrak{C}$ sind durch die Gleichung $f=f^*$, bzw. $f=\bar{f}$ gekennzeichnet, die Teile $\mathfrak{B}_+$, bzw. $\mathfrak{C}_+$ der positiven f durch $f=gg^*$, bzw. $f=g\bar{g}$. Da T *-zulässig ist, folgt

$$\mathsf{T}\,{}'\mathfrak{B}={}'\mathfrak{C},\qquad \mathsf{T}\mathfrak{B}_+=\mathfrak{C}_+. \tag{6.1}$$

Wir definieren nun auf $\mathfrak{C}$ ein Radonsches Maß p durch

$$p(\mathsf{T}f)=I(f).$$

p ist homogen, linear und wegen (6.1) auch positiv.

Wir wollen nun zeigen, daß (E, p) perfekt und mit (S, I) äquivalent ist.

(6.2) *Die meßbaren gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen bilden eine Basis der offenen Mengen in E. Die einzige offene Nullmenge ist die leere.*

$\mathfrak{B}$ wird erzeugt von den charakteristischen Funktionen χ_M der $M\in\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{C}$ also von den $h_M=\mathsf{T}\chi_M$. Da T ein Isomorphismus ist, folgt $h_M=\bar{h}_M=h_M^2$, d.h. die h_M sind charakteristische Funktionen gewisser Teile $\mathsf{T}M\subset E$. Da die h_M stetig sind, sind die $\mathsf{T}M$ offen, abgeschlossen und meßbar, ferner punktetrennend, da die h_M $\mathfrak{C}$ erzeugen. Die $\mathsf{T}M$ definieren also eine separierte Topologie, die die gegebene kompakte höchstens vergröbert, also mit ihr identisch ist. Ist nun die meßbare Menge $U\subset E$ offen und nicht leer, so enthält sie ein $\mathsf{T}M$. Wegen $p(\mathsf{T}M)=I(\chi_M)>0$ ist dann auch $p(U)>0$. Damit ist (6.2) bewiesen. Nun kommt der Kernpunkt:

(6.3) *Jedes $f\in L^\infty(E, p)$ ist zu einem $g\in\mathfrak{C}$ äquivalent.*

Sei F die Menge aller $f\in L^\infty(E)$, die zu stetigen Funktionen äquivalent sind. Um $F=L^\infty(E)$ zu beweisen, genügt zu zeigen, daß mit jeder Folge $\{f'_n\}\subset F$, für die $f'_n\searrow f'\geq 0$ gilt, auch f' in F liegt. Sei f_n stetig und zu f'_n äquivalent. Da $f'_n-f'_{n+1}$ positiv ist, folgt $f_n-f_{n+1}\geq 0$ fast überall, wegen der Stetigkeit also überall, folglich gilt auch $f_n\searrow f\geq 0$ und f und f' sind äquivalent. Nun ist $f_n=\mathsf{T}g_n$ und wegen (6.1) liegt g_n-g_{n+1} in $\mathfrak{B}_+$. Folglich gibt es ein $g\in\mathfrak{B}_+$ mit $g_n\searrow g$, also $g_n-g\searrow 0$, also $(f_n-\mathsf{T}g)\searrow(f-\mathsf{T}g)\in L^\infty_+(E)$. Ferner: $0\leq p(f-\mathsf{T}g)=\lim p(\mathsf{T}g_n-\mathsf{T}g)=\lim I(g_n-g)=0$, d.h. $p(f-\mathsf{T}g)=0$, f zu $\mathsf{T}g$ äquivalent. Da $\mathsf{T}g$ stetig ist, haben wir damit (6.3) bewiesen. Folgerung:

(6.4) *Jede meßbare Menge aus E ist zu einer offen-abgeschlossenen äquivalent.*

Sei $M\in\mathfrak{M}_E$ und $f\in\mathfrak{C}$ zu χ_M äquivalent. Die Menge U aller $x\in E$ mit $f(x)\neq 0, 1$ ist offen und $h=\chi_U(f-\chi_M)$ ist eine Nullfunktion, die auf $E-U$ verschwindet und auf U von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß U eine

Nullmenge, also leer ist. Folglich ist $f = \chi_{M'}$ mit offen-abgeschlossenem zu M äquivalentem $M' \subset E$.

(6.5) *Jedes offene $U \subset E$ ist meßbar und die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ zu U äquivalent und offen.*

Sei M ein maximaler offener meßbarer Teil von U und V die zu M äquivalente offen-abgeschlossene Menge. $M - V$ ist eine offene Nullmenge, also leer, d.h. $M \subset V$. Falls die offene Menge $U - V$ nicht leer ist, gibt es ein offen-abgeschlossenes nicht leeres meßbares $W \subset U - V$, was wegen $M \lhd M \cup W \subset U$ der Maximalität von M widerspricht. Folglich ist $U \subset V$, d.h. $M \subset U \subset V$. Da M und V äquivalent sind, sind auch U und V äquivalent. Ferner gilt $\overline{U} \subset V$. Da $V - \overline{U}$ eine offene Nullmenge ist, muß $V = \overline{U}$ sein.

Die Transformation T ist ein Isomorphismus der Algebren L_S der (Klassen der) Linearkombinationen charakteristischer Funktionen χ_M, $M \in \mathfrak{M}_S$, und L_E der Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen offen-abgeschlossener Teile aus E. Für $f, g \in L_S$ gilt $I(fg) = p(\mathsf{T}f \mathsf{T}g)$. Da L_S in $\mathfrak{L}^2(S)$ und L_E in $\mathfrak{L}^2(E)$ dicht liegt, folgt die Isomorphie von $\mathfrak{L}^2(S)$ mit $\mathfrak{L}^2(E)$, und zwar derart, daß $\mathfrak{P}_S$ und $\mathfrak{P}_E$ einander entsprechen. Folglich sind S und E äquivalent.

Ist S nun beliebig und Φ eine meßbare Zerlegung in Teile endlichen Maßes, so können wir zu jedem $S_\mu \in \Phi$ einen äquivalenten und kompakten Maßraum E_μ finden. Die punktfremde Vereinigung E der E_μ ist dann ein lokal kompakter Raum, in dem alle E_μ offen-abgeschlossen sind. Jeder kompakte Teil aus E liegt in der Vereinigung endlich vieler E_μ. Ist f eine stetige Funktion auf E mit kompaktem Träger, so ist $f = \sum_\mu f_\mu$, wobei $f_\mu = \chi_{E_\mu} f$ ist. Da höchstens endlich viele $f_\mu \neq 0$ sind, können wir auf E durch $p(f) = \sum_\mu p_\mu(f_\mu)$, p_μ das zu E_μ gehörige Radonsche Maß, ein positives Funktional definieren, das offensichtlich ebenfalls ein Radonsches Maß ist. Ist $h \in L^\infty(E, p)$, so ist $h_\mu = \chi_{E_\mu} h \in L^\infty(E_\mu, p_\mu)$ und $|h_\mu|_\infty \leq |h|_\infty$. Es gibt folglich ein $g_\mu \in \mathfrak{C}(E_\mu)$ mit $|g_\mu| \leq |h|_\infty$, das zu h_μ äquivalent ist. Ist g die durch $g(x) = g_\mu(x)$ für $x \in E_\mu$ auf E definierte Funktion, so ist g stetig, da die E_μ offen-abgeschlossen sind, zu h äquivalent und es ist $|g| \leq |h|_\infty$. Damit ist alles gezeigt.

Literatur

[1] BADE, W. G.: On Boolean algebras of projections and algebras of operators. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 345–360 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Integration, chap. I–V. Paris 1953 und 1957. — [3] DIXMIER, J.: Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris 1957. — [4] GODEMENT, R.: Sur la theorie des representations unitaires. Ann. of Math. **53**, 68–124 (1951). — [5] HALMOS, P.: Measure theory. New York 1950. — [6] HALMOS, P.: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. New York 1951. — [7] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953. — [8] NEUMANN, J. v.: On rings of operators. Reduction theory. Ann. of Math. **50**, 401–485 (1949). — [9] NAIMARK, M. A., u. C. W. FOMIN: Neprerywnye prjamye summy hilbertowych prostranstw i nekotorye ich premenija. Uspechi Mat. Nauk **10**, 111–142 (1955). — [10] SEGAL, I. E.: Decompositions of operator algebras I, II. Mem. Amer. Math. Soc. **9**, New York 1951. — [11] THOMA, E.: Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen. Math. Z. **67**, 1–9 (1957). — [12] THOMA, E.: Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen. Math. Z. **68**, 153–188 (1957).

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 29. April 1957)

DEMBOWSKI, H. P.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 59—89 (1958)

Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen

Von
PETER DEMBOWSKI

Inhalt

Seite

Einleitung 59
1. Taktische Zerlegungen von λ-Ebenen 61
1.1. Grundbegriffe 61
1.2. Die Grundgleichungen 64
1.3. Anzahl der Klassen einer taktischen Zerlegung 65
1.4. Beziehungen zwischen verschiedenen taktischen Zerlegungen 66
2. Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ 69
2.1. Definitionen 69
2.2. Der Hauptsatz 70
2.3. Ergänzungssätze 72
2.4. Durch Teilebenen endlicher projektiver Ebenen definierte taktische Zerlegungen . 75
2.5. Durch Ovale definierte taktische Zerlegungen 77
3. Die Matrizen einer taktischen Zerlegung 79
3.1. Die Matrix-Grundgleichungen 79
3.2. Zahlentheoretische Eigenschaften der $|\mathfrak{K}|, |\mathfrak{k}|$ 80
3.3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von taktischen Zerlegungen . . . 83
3.4. Vollsymmetrische Zerlegungen 86
Literaturverzeichnis 89

Einleitung

Eine Gruppe von Kollineationen einer endlichen projektiven Ebene zerlegt sowohl die Menge der Punkte als auch die der Geraden in Transitivitätsklassen. Man überzeugt sich leicht, daß für jede solche Punktklasse $\mathfrak{P}$ und jede solche Geradenklasse $\mathfrak{g}$ gilt:

(*) $\begin{cases} \text{Auf jeder Geraden von } \mathfrak{g} \text{ liegen gleichviele Punkte von } \mathfrak{P}. \\ \text{Durch jeden Punkt von } \mathfrak{P} \text{ gehen gleichviele Geraden von } \mathfrak{g}. \end{cases}$

Bei vielen Untersuchungen über Kollineationsgruppen endlicher projektiver Ebenen werden nun andere als diese Eigenschaften gar nicht benutzt; andererseits gibt es Klasseneinteilungen endlicher Ebenen mit den Eigenschaften (*), die nicht von einer Kollineationsgruppe herrühren. Es liegt daher nahe, allgemein Zerlegungen mit den Eigenschaften (*) zu untersuchen. Das wird in der vorliegenden Arbeit unternommen: Klasseneinteilungen der fraglichen Art nennen wir „taktische Zerlegungen".

Es zeigt sich, daß die für die Untersuchung fundamentalen Gleichungen („Grundgleichungen", S. 64) ohne Schwierigkeit für allgemeinere Strukturen

als endliche projektive Ebenen hergeleitet werden können, nämlich für die (endlichen) „λ-Ebenen", in denen je zwei Punkte λ Verbindungsgeraden und je zwei Geraden λ Schnittpunkte besitzen. Für diese Strukturen sind in der Literatur auch die Bezeichnungen „symmetrischer Blockplan" (PICKERT [12], S. 228), „symmetric block design" (HALL [7], S. 61) und „(v, k, λ)-configuration" (CHOWLA und RYSER [6], S. 93) üblich. Nur ausnahmsweise werden wir uns hier auf den Fall $\lambda = 1$ der endlichen projektiven Ebenen beschränken.

Das wesentliche Ergebnis des ersten Teiles der Arbeit ist der aus den Grundgleichungen leicht folgende Satz, daß die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung einer λ-Ebene gleich der ihrer Geradenklassen ist. Aus diesem Satz folgen viele Transitivitätseigenschaften von Kollineationsgruppen von λ-Ebenen; insbesondere ergeben sich Verallgemeinerungen von Resultaten von HALL und HOFFMAN (man vergleiche etwa [12], S. 304, 308) über zyklische Kollineationsgruppen endlicher projektiver Ebenen auf beliebige Gruppen und beliebige λ-Ebenen. Weiter läßt sich zeigen, daß eine Kollineationsgruppe einer λ-Ebene genau dann zweifach transitiv bezüglich der Punkte ist, wenn sie diese Eigenschaft auch bezüglich der Geraden hat.

Unter den Klassen einer taktischen Zerlegung Γ einer λ-Ebene $\mathfrak{E}$ läßt sich auf natürliche Weise eine Inzidenzrelation einführen, bezüglich welcher sie zu den Elementen einer neuen geometrischen Struktur werden, der „abgeleiteten Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$". Diese Struktur wird im zweiten Teile der Arbeit untersucht; insbesondere behandeln wir die naheliegende Frage, wann $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine endliche projektive Ebene ist. Es zeigt sich überraschenderweise, daß das nur in dem trivialen Fall eintreten kann, daß $\lambda = 1$ (also $\mathfrak{E}$ selbst eine projektive Ebene) und Γ diejenige Zerlegung ist, deren sämtliche Klassen aus je einem Element bestehen. Auch wenn $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine ausgeartete projektive Ebene ist, folgt $\lambda = 1$, vorausgesetzt, daß die Anzahl gleichartiger Γ-Klassen mindestens gleich vier ist. Die taktischen Zerlegungen, die solche abgeleitete Strukturen erzeugen, sind dadurch charakterisiert, daß eine ihrer Klassen aus n^2 Elementen besteht (n ist die Ordnung von $\mathfrak{E}$). Ist die Anzahl gleichartiger Klassen kleiner als vier, so gelten die Resultate nicht mehr allgemein. Gegenbeispiele erhält man unter anderen durch Betrachtung von Teilebenen und Ovalen endlicher projektiver Ebenen.

Durch jede taktische Zerlegung einer λ-Ebene werden in natürlicher Weise gewisse ganzzahlige Matrizen definiert, die im Falle der trivialen Zerlegung in lauter Klassen mit je einem Element gleich den bekannten Inzidenzmatrizen der Ebene sind. Aus den Grundgleichungen folgen leicht entsprechende Beziehungen zwischen diesen Matrizen („Matrix-Grundgleichungen", S. 80); die Untersuchung dieser Beziehungen bildet den Gegenstand des letzten Teiles der Arbeit. Es ergeben sich für die Existenz von taktischen Zerlegungen notwendige zahlentheoretische Bedingungen, die mit Hilfe verschiedener Methoden gewonnen werden. Aus einer elementaren Rangbetrachtung folgen zunächst Aussagen über die Anzahlen von Fixelementen von p-Gruppen von Kollineationen; z.B. kann die Anzahl der Fixpunkte einer projektiven Ebene bezüglich einer solchen Gruppe nur dann von der der Fixgeraden verschieden

sein, wenn p ein Teiler der Ordnung n der Ebene ist. Das wesentliche Hilfsmittel bei der weiteren Untersuchung ist die von HASSE und MINKOWSKI stammende Theorie der rationalen Kongruenz von quadratischen Formen. Der Hauptsatz dieser Theorie liefert mit den Matrixgleichungen eine fundamentale Beziehung zwischen Produkten von Hilbert-Symbolen [Gln. (H), S. 84], in die außer den Invarianten n und λ der gegebenen λ-Ebene noch die Anzahl der Γ-Klassen sowie die Anzahlen der Elemente der Γ-Klassen eingehen. Diese Beziehung enthält alle bisher bekannten Nichtexistenzsätze für endliche projektive Ebenen, insbesondere also den bekannten Satz von BRUCK und RYSER ([*4*], theorem 1, S. 88), aber auch die von CHOWLA und RYSER in [*6*] gegebenen Verallgemeinerungen auf λ-Ebenen. Sie liefert aber noch mehr; z.B. folgt die Nichtexistenz von nichttrivialen taktischen Zerlegungen mit lauter gleichmächtigen Klassen in vielen λ-Ebenen, z.B. in projektiven Ebenen der Ordnung 10.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden mit wenigen Ausnahmen durch ganz elementare Schlußweisen gewonnen, nämlich durch die für die Untersuchung endlicher Strukturen typischen abzählenden Methoden. Lediglich im letzten Abschnitt werden tieferliegende zahlentheoretische Hilfsmittel benutzt. Andererseits hat die hier entwickelte Theorie selbst interessante rein zahlentheoretische Konsequenzen: man kann mit ihrer Hilfe leicht mehrere Aussagen über die quadratischen Restcharaktere der Teiler von Zahlen des Typs $p^{2r}+p^r+1$ gewinnen.

Es sei hier erwähnt, daß einige Resultate des letzten Abschnittes der Arbeit kürzlich auch von D. R. HUGHES in [*10*] angekündigt worden sind.

Herrn Professor BAER, von dem die Anregung zu der Beschäftigung mit dem vorliegenden Problemkreis ausgegangen ist, bin ich für viele wertvolle Ratschläge und Hinweise zu großem Dank verpflichtet.

1. Taktische Zerlegungen von λ-Ebenen

1.1. Grundbegriffe

Unter einer *verallgemeinerten Inzidenzstruktur* verstehen wir ein Tripel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$ von Mengen mit den Eigenschaften $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{G} = \emptyset$, $I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$. Die Elemente von $\mathfrak{P}$ heißen *Punkte*, die von $\mathfrak{G}$ *Geraden*. Punkte werden stets mit großen, Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ein Paar (P, g) von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$ heißt *inzident* oder *nichtinzident*, je nachdem ob es zu I gehört oder nicht. Statt $(P, g) \in I$ schreiben wir auch $P\,I\,g$ oder $g\,I\,P$, und diesen Sachverhalt drücken wir auch durch die Redeweisen „P liegt auf g", „g geht durch P" usw. aus.

Eine Gerade, die durch zwei verschiedene Punkte P und Q geht, heißt eine *Verbindungsgerade* von P und Q, ein Punkt, der auf zwei verschiedenen Geraden g und h liegt, ein *Schnittpunkt* von g und h. Im allgemeinen brauchen Schnittpunkte und Verbindungsgeraden vorgegebener Elementepaare weder zu existieren noch eindeutig zu sein. (Bei den von PICKERT in [*12*], S. 2 so bezeichneten „Inzidenzstrukturen" schlechthin wird Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung gefordert.)

In dieser Arbeit werden nur *endliche* verallgemeinerte Inzidenzstrukturen betrachtet, d.h. solche, bei denen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{G}$ und damit auch I endliche Mengen sind. Die Attribute „endlich" und „verallgemeinert" werden wir künftig meist weglassen; das Wort „Inzidenzstruktur" soll aber niemals in dem Pickertschen, sondern stets in dem oben erklärten weiteren Sinne verstanden werden. Manchmal werden wir noch kürzer einfach „Struktur" sagen.

Eine Inzidenzstruktur heißt (nach CARMICHAEL [5]) *taktische Konfiguration*, wenn $|I \cap (P \times \mathscr{G})|$ für jeden Punkt P gleich derselben Zahl r und dual dazu $|I \cap (\mathscr{P} \times g)|$ für jede Gerade g gleich derselben Zahl k ist, d.h. wenn durch jeden Punkt genau r Geraden gehen und auf jeder Geraden genau k Punkte liegen. Dabei dürfen r und k durchaus auch gleich Null sein. Eine einfache Abzählung von $|I|$ ergibt

$$k|\mathscr{G}| = r|\mathscr{P}| \tag{1}$$

für jede taktische Konfiguration.

Unter einer *taktischen Zerlegung* einer endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$ verstehen wir eine Klasseneinteilung von $\mathscr{P} \cup \mathscr{G}$ in Punkt- und Geradenklassen (keine Klasse soll Punkte *und* Geraden enthalten) derart, daß für jedes Paar $\mathfrak{P}, \mathfrak{g}$ ungleichartiger Klassen die durch $I' = (\mathfrak{P} \times \mathfrak{g}) \cap I$ definierte Teilstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{g}, I')$ von $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$ eine taktische Konfiguration wird. Punktklassen taktischer Zerlegungen werden stets durch große, Geradenklassen durch kleine deutsche Buchstaben bezeichnet, und die bei (1) eingeführten Zahlen r und k werden für die durch eine taktische Zerlegung definierte taktische Konfiguration $(\mathfrak{P}, \mathfrak{g}, I')$ mit $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})$ bzw. $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})$ bezeichnet, d.h. auf jeder Geraden der Klasse $\mathfrak{g}$ liegen $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})$ Punkte der Klasse $\mathfrak{P}$, und durch jeden Punkt der Klasse $\mathfrak{P}$ gehen $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})$ Geraden der Klasse $\mathfrak{g}$.

Die Bedeutung des Begriffes der taktischen Zerlegung beruht auf dem nachfolgenden Satz 1. Wir definieren zunächst: Eine *Kollineation* einer Inzidenzstruktur $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$ ist eine Permutation σ von $\mathscr{P} \cup \mathscr{G}$ mit $\mathscr{P}^\sigma = \mathscr{P}$, $\mathscr{G}^\sigma = \mathscr{G}$, $I^\sigma = I$. Dabei ist unter $(P, g)^\sigma$ natürlich das Paar (P^σ, g^σ) zu verstehen. Die sämtlichen Kollineationen von $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$ bilden eine Gruppe; jede Untergruppe dieser Gruppe heißt eine *Kollineationsgruppe* von $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$.

Satz 1. *Die Ttransitivitätsklassen jeder Kollineationsgruppe einer beliebigen endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur bilden eine taktische Zerlegung.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß die Transitivitätsklassen (oder „Transitivitätsgebiete" oder „Transitivitätsbereiche"; für die Definition dieses und anderer Begriffe aus der Theorie der Permutationsgruppen vergleiche man etwa WIELANDT [15]) entweder nur Punkte oder nur Geraden enthalten. Sei $\mathfrak{P}$ eine Punkttransitivitätsklasse und $\mathfrak{g}$ eine Geradentransitivitätsklasse. Wir müssen zeigen, daß die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ gebildete Teilstruktur eine taktische Konfiguration ist. Dazu genügt es aus Dualitätsgründen, zu beweisen, daß jede Gerade von $\mathfrak{g}$ gleichviele Punkte von $\mathfrak{P}$ trägt. Das aber folgt sofort aus der für alle Kollineationen σ gültigen trivialen Tatsache, daß m Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ genau dann auf einer Geraden g liegen, wenn ihre Bilder $P_1^\sigma, P_2^\sigma, \ldots, P_m^\sigma$ auf g^σ liegen.

9272-69

In der vorliegenden Arbeit werden taktische Zerlegungen einer speziellen Klasse von Inzidenzstrukturen untersucht, die wir jetzt definieren: Eine *λ-Ebene* ist eine taktische Konfiguration $\mathfrak{E} = (\mathscr{P}, \mathscr{G}, I)$ mit $r = k \neq 0$ sowie

$$|I \cap (P \times \mathscr{G}) \cap (Q \times \mathscr{G})| = \lambda < k$$

für jedes Paar verschiedener Punkte P, Q. Die Gesamtzahl der Punkte von $\mathfrak{E}$, die wegen (1) und $r = k$ auch gleich der der Geraden ist, wird mit v bezeichnet. Man kann zeigen (vgl. etwa [12], S. 288), daß für jede λ-Ebene weiterhin

$$|I \cap (\mathscr{P} \times g) \cap (\mathscr{P} \times h)| = \lambda$$

gilt; in einer λ-Ebene haben je zwei verschiedene Punkte also genau λ Verbindungsgeraden und je zwei verschiedene Geraden genau λ Schnittpunkte. Ferner besteht die Beziehung

$$k(k-1) = \lambda(v-1). \tag{2}$$

Unter der *Ordnung* einer λ-Ebene $\mathfrak{E}$ verstehen wir die Zahl $n = k - \lambda$. Im Falle $n = 1$ ist die Struktur von $\mathfrak{E}$ durch die Angabe von v eindeutig bestimmt: aus (2) folgt $k = v - 1$ und $\lambda = v - 2$, und die Punkte und Geraden lassen sich so numerieren, daß $I = \mathscr{P} \times \mathscr{P} - \{(P_1, g_1), (P_2, g_2), \ldots, (P_v, g_v)\}$ wird. Wir wollen daher den Fall $n = 1$ von nun an ausschließen und unter einer λ-Ebene stets eine solche mit $n \geq 2$ verstehen. Es gilt sodann stets $0 < \lambda < k - 1 < v - 1$. Aus (2) folgt weiter die später benötigte Beziehung

$$k^2 = (n + \lambda)^2 = n + \lambda v. \tag{3}$$

Wir bemerken noch, daß die λ-Ebenen mit $\lambda = 1$ gerade die (nichtausgearteten) endlichen projektiven Ebenen sind.

Jede λ-Ebene besitzt taktische Zerlegungen, nämlich einmal die, deren sämtliche Klassen aus je einem Element bestehen, und zum anderen die aus nur zwei Klassen (der aller Punkte und der aller Geraden) bestehende Zerlegung. Diese beiden Typen von taktischen Zerlegungen wollen wir *triviale Zerlegungen* nennen.

Man könnte meinen, daß jede taktische Zerlegung gemäß Satz 1 von einer Kollineationsgruppe erzeugt wird. Daß das nicht der Fall ist, zeigt schon das Beispiel der trivialen Zerlegung mit nur zwei Klassen bei einer endlichen projektiven Ebene über einem echten Fastkörper. Jede solche Ebene besitzt nämlich eine ausgezeichnete Gerade, für die als Achse der kleine Satz des DESARGUES gilt; diese Gerade muß bei jeder Kollineation festbleiben, da die Ebene sonst — nach HALL [7], S. 25 — eine Moufang-Ebene (Definition in [12], S. 186), also wegen der Endlichkeit sogar desarguessch und somit keine Ebene über einem *echten* Fastkörper wäre. Aber auch nichttriviale taktische Zerlegungen brauchen nicht von Kollineationsgruppen herzurühren, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige nicht-desarguessche endliche projektive Ebene der Ordnung n, ferner (Z, a) ein inzidentes Paar von $\mathfrak{E}$ derart, daß $\mathfrak{E}$ nicht (Z, a)-transitiv ist. (Vgl. BAER [1]. Ein solches Paar existiert

9272 - 69

immer, da die Ebene sonst desarguessch wäre.) Wir numerieren die Punkte $\neq Z$ von a und die Geraden $\neq a$ durch Z irgendwie von 1 bis n: $P_1, P_2, \ldots, P_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ und definieren folgende Punkt- und Geradenklassen: $\mathfrak{P}_i = \{P_i\}$, $\mathfrak{g}_i = \{g_i\}$, $\mathfrak{P}_{n+i} = \{\text{Punkte} \neq Z \text{ von } g_i\}$, $\mathfrak{g}_{n+i} = \{\text{Geraden} \neq a \text{ durch } P_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; und $\mathfrak{P}_{2n+1} = \{Z\}$, $\mathfrak{g}_{2n+1} = \{a\}$. Man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß so eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ definiert wird. Diese kann aber nicht von einer Kollineationsgruppe herrühren, denn eine solche müßte aus zentralen Kollineationen mit Zentrum Z und Achse a bestehen und transitiv auf den Punkten $\neq Z$ jeder der Geraden g_i sein. Das aber würde heißen, daß die Ebene doch (Z, a)-transitiv wäre, entgegen unserer Voraussetzung.

Im folgenden bezeichnen wir taktische Zerlegungen meist durch das Symbol Γ, dementsprechend reden wir auch von den „Γ-Klassen" einer λ-Ebene. Für den Fall, daß die Zerlegung gemäß Satz 1 von einer Kollineationsgruppe herrührt, werden wir das Symbol Γ auch zur Bezeichnung dieser Gruppe verwenden; das wird nirgends zu Mißverständnissen führen.

1.2. Die Grundgleichungen

Es sei nun eine beliebige taktische Zerlegung einer beliebigen λ-Ebene der Ordnung n gegeben. Wir wollen eine Anzahl von Beziehungen herleiten, die zwischen den Zahlen $|\mathfrak{X}|, |\mathfrak{x}|$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ und den Invarianten v, k, λ, n der Ebene immer bestehen müssen, nämlich die folgenden

Grundgleichungen:

(G 1) $$(\mathfrak{P}\mathfrak{g})\,|\mathfrak{g}| = (\mathfrak{g}\mathfrak{P})\,|\mathfrak{P}| \qquad \textit{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{g}.$$

(G 2) $$\sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x}\mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{X}\mathfrak{g}) = k \qquad \textit{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{g}.$$

(G 3) $$\sum_{\mathfrak{X}} |\mathfrak{X}| = \sum_{\mathfrak{x}} |\mathfrak{x}| = v.$$

(G 4a) $$\sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{Q}) = \lambda\,|\mathfrak{P}| + n\,\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \qquad \textit{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}.$$

(G 4b) $$\sum_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{g}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{h}) = \lambda\,|\mathfrak{g}| + n\,\delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \qquad \textit{für alle } \mathfrak{g}, \mathfrak{h}.$$

Dabei soll die Funktion δ wie üblich die Werte Eins oder Null annehmen, je nachdem ob ihre Argumente gleich oder verschieden sind.

(G 1) ist genau die Gl. (1) mit der auf S. 62 eingeführten Bezeichnungsweise. (G 2) und (G 3) folgen sofort aus den Tatsachen, daß jedes Element mit genau k andersartigen inzidiert und daß die Anzahl aller gleichartigen Elemente v ist. Also bleiben nur die Beziehungen (G 4) zu beweisen, und dazu genügt es aus Dualitätsgründen, nur (G 4a) herzuleiten.

Es sei Q ein beliebiger Punkt der Punktklasse $\mathfrak{Q}$ und g eine Gerade durch Q, die der Geradenklasse $\mathfrak{x}$ angehören möge. Auf g liegen $(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - \delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ von Q verschiedene Punkte der Punktklasse $\mathfrak{P}$, welche von $\mathfrak{Q}$ nicht verschieden zu sein braucht, und durch Q gehen $(\mathfrak{x}\mathfrak{Q})$ Geraden von $\mathfrak{x}$. Die Anzahl inzidenter Paare (P, x) mit $x \mathrel{I} Q \neq P \in \mathfrak{P}$ und $x \in \mathfrak{x}$ ist also gleich $[(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - \delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})]\,(\mathfrak{x}\mathfrak{Q})$.

Durch Summation über alle Geradenklassen (diejenigen Geradenklassen $\mathfrak{y}$, die keine Geraden durch Q schicken, geben dabei wegen $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{Q})=0$ keinen Beitrag) erhält man die Anzahl aller inzidenten Paare (P, z) mit $z\,I\,Q \neq P \in \mathfrak{P}$. Diese ist aber, da jeder der $|\mathfrak{P}|-\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ von Q verschiedenen Punkte von $\mathfrak{P}$ mit Q genau λ Verbindungsgeraden hat, auch gleich $\lambda[|\mathfrak{P}|-\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})]$. Damit haben wir die Beziehung

$$\lambda[|\mathfrak{P}|-\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})]=\sum_{\mathfrak{x}}[(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})-\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})]\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q}),$$

aus der (G 4a) durch triviale Umformungen mit (G 2) folgt.

Für später brauchen wir noch die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})\,|\mathfrak{x}|=k\,|\mathfrak{P}|, \qquad \sum_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{g}\,\mathfrak{X})\,|\mathfrak{X}|=k\,|\mathfrak{g}|; \tag{4}$$

man erhält sie sofort aus (G 1) durch Summation und Benutzung von (G 2).

1.3. Anzahl der Klassen einer taktischen Zerlegung

Aus den Grundgleichungen ergibt sich leicht der folgende wichtige Satz:

Satz 2. *Die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung einer λ-Ebene ist gleich der ihrer Geradenklassen.*

Beweis. Man setze $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}=\mathfrak{X}$ in (G 4a) und summiere über alle $\mathfrak{X}$, wegen (G 3) folgt

$$\sum_{\mathfrak{x},\,\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})=\lambda v+nt, \tag{5}$$

wobei t die Anzahl der Punktklassen bezeichnet. Dual erhält man aus (G 4b), daß die in (5) links stehende Summe auch gleich $\lambda v+nt'$ ist, mit t' gleich der Anzahl der Geradenklassen. Also folgt $t=t'$, q.e.d.

Die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung Γ, d.h. also auch die der Geradenklassen, wird von nun an durch das Symbol $t=t(\Gamma)$ bezeichnet.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt bei $t(\Gamma)=1$ sofort:

Satz 3. *Eine Kollineationsgruppe einer λ-Ebene ist genau dann auf den Punkten transitiv, wenn sie auf den Geraden transitiv ist.*

Tiefer liegt der entsprechende Satz über zweifache Transitivität:

Satz 4. *Eine Kollineationsgruppe einer λ-Ebene ist genau dann auf den Punkten zweifach transitiv, wenn sie auf den Geraden zweifach transitiv ist.*

Beweis. Wir treffen zunächst folgende Verabredungen: Ist G eine beliebige Permutationsgruppe der Menge M, so werde die Untergruppe aller derjenigen Permutationen von G, die ein bestimmtes Element $x \in M$ festlassen, mit G_x bezeichnet. Weiter soll x^U die Menge aller x^σ mit $\sigma \in U \subseteq G$ bedeuten. Sodann gilt, wie wir hier ohne Beweis bemerken (man vergleiche etwa Wielandt [15], S. 9):

$$|G|=|G_x|\,|x^G|. \tag{6}$$

Es sei nun Γ eine Kollineationsgruppe einer λ-Ebene $\mathfrak{E}$, die auf der Menge $\mathscr{P}$ der Punkte von $\mathfrak{E}$ zweifach transitiv ist. Sodann ist Γ sicher transitiv auf $\mathscr{P}$, also nach Satz 3 auch transitiv auf der Menge $\mathscr{G}$ der Geraden von $\mathfrak{E}$. Folglich ist $|P^\Gamma| = |g^\Gamma| = v$ für alle $P \in \mathscr{P}$, $g \in \mathscr{G}$. Nach (6) ist daher auch $|\Gamma_P| = |\Gamma_g|$. Anwendung von (6) auf die Gruppen Γ_P, Γ_g ergibt nun wegen $(\Gamma_P)_g = \Gamma_P \cap \Gamma_g = (\Gamma_g)_P$ die Beziehung

$$|P^{\Gamma_g}| = |g^{\Gamma_P}|. \tag{7}$$

Da Γ zweifach transitiv auf $\mathscr{P}$ ist, ist jede Γ_P noch transitiv auf den von P verschiedenen Punkten von $\mathscr{P}$, d.h. die taktische Zerlegung Γ_P hat zwei Punktklassen. Also hat sie nach Satz 2 auch zwei Geradenklassen; eine von diesen muß aus den k Geraden durch P, die andere aus den $v-k$ übrigen Geraden bestehen. Aus (7) folgt nun, daß für eine feste Gerade g die Zahl $|P^{\Gamma_g}|$ gleich k ist, wenn $P \mathrel{I} g$, und gleich $v-k$, wenn $P \mathrel{\not I} g$. Die Gruppe Γ_g zerlegt $\mathscr{P}$ also in zwei Punktklassen. Also folgt aus Satz 2, daß Γ_g die Menge $\mathscr{G}$ in zwei Geradenklassen zerlegt. Von diesen besteht eine aus g allein, also ist Γ_g transitiv auf den von g verschiedenen Geraden. Das bedeutet aber zusammen mit der Transitivität von Γ auf $\mathscr{G}$, daß Γ zweifach transitiv auf $\mathscr{G}$ ist. Da es aus Dualitätsgründen genügt, nur diesen Beweis zu liefern, ist Satz 4 damit bewiesen.

1.4. Beziehungen zwischen verschiedenen taktischen Zerlegungen

Wir kehren nun zu beliebigen taktischen Zerlegungen von λ-Ebenen zurück. Wir beweisen zunächst einige zahlentheoretische Eigenschaften der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$, $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{x}|$.

Es sei Γ eine taktische Zerlegung der λ-Ebene $\mathfrak{E}$ der Ordnung n mit $t(\Gamma) \geq 2$, und es seien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ vier verschiedene Γ-Klassen. Wir definieren D als den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{g}) - (\mathfrak{X}\mathfrak{h})$, ferner d als den g.g.T. aller $(\mathfrak{x}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{Q})$, $D' =$ g.g.T. aller $(\mathfrak{g}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{h}\mathfrak{X})$ und $d' =$ g.g.T. aller $(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\mathfrak{x})$. Sodann gilt:

Lemma 1. (a) *D und d, und im Falle $t(\Gamma) > 2$ auch D' und d', sind Teiler von n.*

(b) *Es gilt stets:*

$$\begin{cases} n \equiv \lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv k(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \bmod d' \\ n \equiv \lambda(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv k(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \bmod D', \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv \varepsilon k(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \bmod d' \\ \varepsilon\lambda(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv \varepsilon k(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv 0 \bmod D' \end{cases} \tag{9}$$

mit $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t(\Gamma) > 2 \\ 2 & \text{wenn } t(\Gamma) = 2. \end{cases}$

(c) *Ist $t(\Gamma) = 2$, so sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ die einzigen Γ-Klassen, und es gilt*

$$n = [(\mathfrak{P}\mathfrak{g}) - (\mathfrak{P}\mathfrak{h})][(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\mathfrak{Q})]. \tag{10}$$

Beweis. Nach (G 4a) ist

$$n = \lambda|\mathfrak{P}| + n - \lambda|\mathfrak{P}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})\,[(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})] \equiv 0 \bmod d,$$

und analog folgt, daß D Teiler von n ist. Ist $t(\Gamma) > 2$, so existiert außer $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ noch eine weitere Punktklasse $\mathfrak{R}$; mit dieser erhält man

$$\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x})]\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{R}) \equiv 0 \bmod d'$$

[womit die erste Kongruenz (9) für $t > 2$ bewiesen ist], und daraus folgt

$$n \equiv n + \lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x})]\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) \equiv 0 \bmod d'.$$

Also ist auch d' Teiler von n. Für D' läuft der Beweis dual. Damit ist (a) bewiesen.

Es sei nun $t(\Gamma) = 2$. Sodann erhält man wie oben

$$\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) + n = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x})]\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) \equiv 0 \bmod d'$$

und

$$\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) - n = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x})]\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q}) \equiv 0 \bmod d';$$

daraus folgt durch Addition und Subtraktion

$$2n = 2\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \bmod d'.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$2k(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = 2(n + \lambda)(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \bmod d',$$

womit die erste Kongruenz (9) auch für $t(\Gamma) = 2$ bewiesen ist. Der Beweis der zweiten Kongruenz (9) verläuft dual. Wegen $k = n + \lambda$ ist damit im Falle $t(\Gamma) > 2$ auch (8) erledigt, es bleibt also (8) für $t(\Gamma) = 2$ zu beweisen. Wie oben gezeigt, gilt $2n \equiv 0 \bmod d'$ und $\lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) + n \equiv 0 \bmod d'$, folglich ist $n \equiv \lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \bmod d'$. Der verbleibende Teil von (8) folgt wieder aus $k = n + \lambda$. Damit ist (b) bewiesen.

Im Falle $t(\Gamma) = 2$ gilt nach (G 4a), daß

$$n = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})\,[(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})] + (\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})\,[(\mathfrak{h}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{h}\,\mathfrak{Q})]$$

ist. Andererseits ist $(\mathfrak{h}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{h}\,\mathfrak{Q}) = -[(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})]$ wegen (G 2). Kombination dieser Beziehungen ergibt (10). Damit ist Lemma 1 vollständig bewiesen.

Lemma 2. *Ist Γ eine taktische Zerlegung einer beliebigen λ-Ebene mit $(\Gamma) \geq 2$, und sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ vier verschiedene Γ-Klassen, so gibt es unter den Zahlen $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x})$ und unter den Zahlen $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{X}) - (\mathfrak{h}\,\mathfrak{X})$ mindestens je eine, und unter den Zahlen $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}) - (\mathfrak{X}\,\mathfrak{h})$ mindestens je zwei von Null verschiedene.*

Beweis. Wären z. B. alle $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x}) = 0$, so würden (8) und (9) „modulo Null" gelten, d. h. man könnte in (8) und (9) das Kongruenzzeichen durch das

Gleichheitszeichen ersetzen. Das würde in (9) wegen $\varepsilon\lambda \neq 0$ ergeben, daß $|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{Q}|$ wäre, also würde aus (8) folgen, daß $n = 0$ ist, ein Widerspruch. Daß es unter den $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})$ sogar zwei von Null verschiedene geben muß, folgt aus (G 2): es ist

$$\sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{x}\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})] = k - k = 0;$$

verschwinden in dieser Summe alle Glieder bis auf eines, so muß auch dieses letzte verschwinden, und das haben wir schon als unmöglich erkannt. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Das wesentliche Ergebnis des vorliegenden Paragraphen ist der folgende Satz, der es erlaubt, in der Menge aller taktischen Zerlegungen einer λ-Ebene auf natürliche Weise eine teilweise Ordnung einzuführen:

Satz 5. *Es seien Γ und Γ' zwei (nicht notwendig verschiedene) taktische Zerlegungen derselben λ-Ebene. Sodann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *Zu jeder Γ-Punktklasse $\mathfrak{P}$ existiert eine Γ'-Punktklasse $\mathfrak{P}'$ derart, daß $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{P}'$.*

(ii) *Zu jeder Γ-Geradenklasse $\mathfrak{g}$ existiert eine Γ'-Geradenklasse $\mathfrak{g}'$ derart, daß $\mathfrak{g} \subseteqq \mathfrak{g}'$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß (ii) aus (i) folgt. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine λ-Ebene mit zwei taktischen Zerlegungen Γ und Γ', für die (i), aber nicht (ii) gilt, d.h. es gäbe eine Γ-Geradenklasse $\mathfrak{g}$ und zwei verschiedene Γ'-Geradenklassen $\mathfrak{g}_1'$ und $\mathfrak{g}_2'$ derart, daß $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_i' \neq \emptyset$, für $i = 1, 2$. Wir werden diese Möglichkeit ad absurdum führen.

Wir zeigen zunächst, daß für diese Geradenklassen und beliebige Γ'-Punktklassen $\mathfrak{X}'$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\quad (\mathfrak{X}'\,\mathfrak{g}_1')' \neq 0,$

(b) $\quad (\mathfrak{X}'\,\mathfrak{g}_2')' \neq 0.$

(c) $\quad$ Es existiert eine Γ-Punktklasse $\mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{X}'$ mit $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}) \neq 0$.

Sei $i = 1$ oder 2 und $(\mathfrak{X}'\,\mathfrak{g}_i')' \neq 0$, ferner $g \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_i'$. Auf g liegen Punkte von $\mathfrak{X}'$; sei P ein solcher und $\mathfrak{X}$ die durch ihn bestimmte Γ-Punktklasse. Wegen (i) ist sodann $\mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{X}'$; ferner ist $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}) \neq 0$, da $g \in \mathfrak{g}$ und $g \mathrel{I} P \in \mathfrak{X}$. Also folgt (c) aus jeder der Aussagen (a), (b).

Ist umgekehrt $\mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{X}'$ und $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}) \neq 0$, so enthält jede Gerade von $\mathfrak{g}$ Punkte von $\mathfrak{X}$, also erst recht solche von $\mathfrak{X}'$; ist also $g_i \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_i'$, so enthält g_i Punkte von $\mathfrak{X}'$. Daher ist $(\mathfrak{X}'\,\mathfrak{g}_i')' \neq 0$, $i = 1, 2$. Also folgen sowohl (a) als auch (b) aus (c), und die Äquivalenz von (a), (b), (c) ist bewiesen.

Nach Lemma 2 gibt es nun eine Γ'-Punktklasse $\mathfrak{P}'$, für die $(\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_1')' \neq (\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_2')'$ gilt. Eine dieser beiden Zahlen ist von Null verschieden, also wegen der Äquivalenz von (a) und (b) auch die andere. Wegen der Äquivalenz von (a) und (b) mit (c) folgt weiter die Existenz gewisser Γ-Punktklassen $\mathfrak{P}_j \subseteqq \mathfrak{P}'$, mit $j = 1, 2, \ldots, h$; $h \geq 1$, für die $(\mathfrak{P}_j\,\mathfrak{g}) \neq 0$ gilt. Für alle von den $\mathfrak{P}_j$ verschiedenen Γ-Punktklassen $\mathfrak{X}$ gilt wegen (i) und (a), (b), (c) entweder $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{P}' = \emptyset$

oder $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}) = 0$. Ist nun $g_i \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_i'$, $i = 1, 2$, so liegen auf g_1 wie auf g_2 genau $(\mathfrak{P}_j\,\mathfrak{g})$ Punkte von $\mathfrak{P}_j$, und aus den angegebenen Eigenschaften der $\mathfrak{P}_j$ folgt

$$(\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_1')' = \sum_{j=1}^{h} (\mathfrak{P}_j\,\mathfrak{g}) = (\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_2')',$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_1')' \neq (\mathfrak{P}'\,\mathfrak{g}_2')'$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist nachstehende

Folgerung. *Stimmen zwei taktische Zerlegungen derselben λ-Ebene in den Punktklassen oder in den Geradenklassen überein, so sind sie identisch.*

2. Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$

2.1. Definitionen

Es sei $\mathfrak{E}$ eine λ-Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$. Wir definieren: Zwei ungleichartige Γ-Klassen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ bilden ein *inzidentes Paar* oder ein *nichtinzidentes Paar*, je nachdem ob $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g}) \neq 0$ oder $= 0$ ist. [Wegen (G 1) könnte man auch $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P}) \neq 0$ bzw. $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P}) = 0$ zur Definition benutzen.] Bezüglich der so definierten Inzidenzrelation werden die Γ-Klassen von $\mathfrak{E}$ zu den Elementen einer neuen endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur; diese nennen wir die *nach Γ abgeleitete Struktur* von $\mathfrak{E}$ und bezeichnen sie mit $\mathfrak{E}/\Gamma$. Die Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ besitzt $t(\Gamma)$ „Punkte" und ebensoviele „Geraden". Da wir bei den nachfolgenden Untersuchungen stets die zugrundeliegende λ-Ebene $\mathfrak{E}$ sowie die taktische Zerlegung Γ im Auge behalten wollen, werden wir die Elemente von $\mathfrak{E}/\Gamma$ nicht „Punkte" und „Geraden", sondern weiterhin „Punktklassen" und „Geradenklassen" nennen und dementsprechend auch von „Schnittklassen" und „Verbindungsklassen" reden.

Wir werden später sehen (vgl. das Beispiel S. 77), daß $\mathfrak{E}/\Gamma$ keineswegs wieder eine λ'-Ebene zu sein braucht. Insbesondere können verschiedene Γ-Klassen mit verschieden vielen andersartigen inzidieren, und verschiedene Paare von Punkt- bzw. Geradenklassen können verschieden viele Verbindungs- bzw. Schnittklassen besitzen. Um für das weitere eine bequeme Sprechweise zu besitzen, definieren wir die Zahlen $[\mathfrak{X}]$ bzw. $[\mathfrak{x}]$ als die Anzahlen von mit $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{x}$ inzidenten Geraden- bzw. Punktklassen, und die Zahlen $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ bzw. $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ als die Anzahlen von Verbindungsklassen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. von Schnittklassen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, wobei natürlich $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$ sein soll. Es ist klar, daß $[\mathfrak{X}]$ und $[\mathfrak{x}]$ stets ≥ 1 sind. Daß auch $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ und $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ stets ≥ 1 sind, ist leicht zu sehen: Eine Verbindungsgerade eines Punktes von $\mathfrak{X}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{Y}$ spannt eine Verbindungsklasse von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf; und die Existenz von Schnittklassen folgt aus der dualen Überlegung. Für den Fall der Eindeutigkeit der Verbindungsklasse von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. der Schnittklasse von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wollen wir diese durch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eindeutig bestimmten Γ-Klassen mit $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{x} \cap \mathfrak{y}$ bezeichnen. Der Gebrauch dieser Symbole soll umgekehrt die Eindeutigkeit mit ausdrücken.

2.2. Der Hauptsatz

Wir werden nun zeigen, daß die Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung in $\mathfrak{E}/\Gamma$ ein recht selten auftretendes Phänomen ist:

Satz 6. *Sind Schnitte und Verbindungen in der abgeleiteten Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ einer λ-Ebene $\mathfrak{E}$ nach einer taktischen Zerlegung Γ mit $t(\Gamma)>3$ eindeutig, so ist $\lambda=1$, also $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene. Ist auch $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine (nichtausgeartete) projektive Ebene, so besteht jede Γ-Klasse aus einem Element, d.h. $\mathfrak{E}/\Gamma$ ist isomorph zu $\mathfrak{E}$.*

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus, aus denen wir außer Satz 6 noch andere Folgerungen werden ziehen können.

Lemma 3. *Es seien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ vier verschiedene Klassen einer taktischen Zerlegung einer λ-Ebene. Dann gilt:*

Die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{g}$ sind äquivalent:		*Die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, und $\mathfrak{P}$ sind äquivalent:*	
(i)	$\mathfrak{g}=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}$	(i′)	$\mathfrak{P}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$
(ii)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{P}\rvert=(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})\,(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})$	(ii′)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{g}\rvert=(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})\,(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})$
(iii)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{Q}\rvert=(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{g})\,(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})$	(iii′)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{h}\rvert=(\mathfrak{h}\,\mathfrak{P})\,(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})$
(iv)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{g}\rvert=(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})\,(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})$.	(iv′)	$\lambda\,\lvert\mathfrak{P}\rvert=(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})\,(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})$.

Beweis. Aus Dualitätsgründen genügt es, die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iv) zu beweisen. Ist $\mathfrak{g}=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}$, so ist insbesondere $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{Q}$, und aus (G 4a) folgt $\lambda\,\lvert\mathfrak{P}\rvert=\sum_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})$. Da $\mathfrak{g}$ eindeutige Verbindungsklasse ist, gilt für alle $\mathfrak{x}\neq\mathfrak{g}$ entweder $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})=0$ oder $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q})=0$. Also folgt (ii). Ebenso folgt (iii) aus (i). Umgekehrt ergibt (G 4a) zusammen mit (ii) bzw. (iii), daß $\mathfrak{g}$ eindeutige Verbindungsklasse von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ist. Damit ist die Gleichwertigkeit der Aussagen (i), (ii), (iii) bewiesen. Multiplikation von (ii) mit $\lvert\mathfrak{g}\rvert$ und Anwendung von (G 1) auf die rechte Seite ergibt nach Herauskürzen von $\lvert\mathfrak{P}\rvert$ die Gl. (iv), und analog folgt (ii) aus (iv). Damit ist alles bewiesen.

Für das weitere benötigen wir noch nachstehende

Folgerung. *Aus $\mathfrak{g}=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$ folgt $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})=(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})$.*

Das ergibt sich unmittelbar durch Vergleich von (iv) und (ii′).

Lemma 4. *Sind Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{E}/\Gamma$ eindeutig und ist $t(\Gamma)>2$, so gibt es in $\mathfrak{E}/\Gamma$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck.*

Beweis. Wäre das nicht der Fall, so müßten alle Punktklassen mit derselben Geradenklasse $\mathfrak{g}$ und alle Geradenklassen mit derselben Punktklasse $\mathfrak{P}$ inzident sein; und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ wären die einzigen Γ-Klassen, die mit mehr als einer andersartigen inzidieren. Wegen $t(\Gamma)>2$ müßte es nun zwei Punktklassen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ geben, die mit keiner anderen Geradenklasse als $\mathfrak{g}$ inzident sind, d.h. es müßte gelten $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{X})=(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Y})=k$. Einerseits würde nun aus Lemma 3, (ii) folgen, daß $\lambda\,\lvert\mathfrak{X}\rvert=(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g})\,(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Y})=k\,(\mathfrak{X}\,\mathfrak{g})$, andererseits ergibt (G 4a), daß

$\lambda|\mathfrak{X}| = (\mathfrak{X}\mathfrak{g})(\mathfrak{g}\mathfrak{X}) - n = k(\mathfrak{X}\mathfrak{g}) - n$ ist. Das ist ein Widerspruch, der Lemma 4 beweist.

Das folgende Lemma 5 ist das Kernstück des Beweises von Satz 6:

Lemma 5. *Es sei Γ eine taktische Zerlegung der λ-Ebene $\mathfrak{E}$ der Ordnung n. Gibt es sodann eine Γ-Klasse, die mit allen gleichartigen Γ-Klassen eindeutige Verbindungs- bzw. Schnittklassen besitzt und die mit mindestens drei andersartigen Klassen inzidiert, von denen ihrerseits mindestens zwei außer mit der gegebenen noch mit einer weiteren inzident sind, so ist $\lambda = 1$ und die gegebene Γ-Klasse besteht entweder aus einem oder aus n^2 Elementen. Im letzteren Falle gibt es genau eine mit der gegebenen nicht inzidierende andersartige Klasse, und diese besteht aus einem Element.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die gegebene Γ-Klasse als Punktklasse $\mathfrak{P}$ angenommen werden. Die Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ besagen dann:

(a) $[\mathfrak{P}, \mathfrak{X}] = 1$ für alle $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{P}$,

(b) $[\mathfrak{P}] > 2$.

(c) Es gibt zwei verschiedene Geradenklassen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ mit $(\mathfrak{P}\mathfrak{g}) \neq 0 \neq (\mathfrak{P}\mathfrak{h})$ und $[\mathfrak{g}] > 1 < [\mathfrak{h}]$.

Das bedeutet, daß es in $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine aus $\mathfrak{P}$ und zwei weiteren Punktklassen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sowie aus $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und einer weiteren Geradenklasse $\mathfrak{y}$ bestehende Konfiguration gibt, deren Inzidenzen in Fig. 1 illustriert sind:

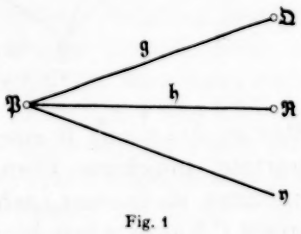


Fig. 1

Alle Schnitte und Verbindungen in dieser Konfiguration sind eindeutig: $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{y} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{y} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{P} + \mathfrak{R}$. Wegen der Folgerung von Lemma 3 ergibt sich aus diesen Beziehungen: $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{h}\mathfrak{R}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{g})$; alle diese Zahlen sind also gleich derselben von Null verschiedenen Konstanten j, und es ist bewiesen:

Aus $(\mathfrak{P}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{X}) \neq 0$ folgt $(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{X}) = j$.

Nun ist nach Lemma 3,(ii) einerseits $\lambda|\mathfrak{P}| = (\mathfrak{P}\mathfrak{g})(\mathfrak{g}\mathfrak{Q}) = j^2$, andererseits nach (G 4a) und (G 2) auch

$$\lambda|\mathfrak{P}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{P}) - n = j \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x}\mathfrak{P}) - n = jk - n,$$

denn wegen (G 1) ist genau dann $(\mathfrak{x}\mathfrak{P}) = 0$, wenn $(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) = 0$ ist. Also ergibt sich für j die quadratische Gleichung

$$j^2 - kj + n = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $j = (k \pm q)/2$, wobei $q^2 = k^2 - 4n$ ist. Es muß also $k \equiv q \bmod 2$ und die Zahl $k^2 - 4n$ eine Quadratzahl sein.

Nun ist $q^2 = k^2 - 4n < k^2$, also $q \leq k - 1$. Andererseits ist wegen $k = n + \lambda$ auch $q^2 = (k-2)^2 + 4(\lambda - 1) \geq (k-2)^2$. Wäre nun $\lambda > 1$, so würde in der letzten Ungleichung nur das „Größer"-Zeichen gelten, und es ergäbe sich

$q \geq k-1$, d.h. mit dem oben gewonnenen Ergebnis zusammen $q = k-1$. Das aber ist ein Widerspruch zu $k \equiv q \bmod 2$. Damit ist $\lambda = 1$ bewiesen.

Es folgt nun weiter $q = k-2 = n-1$, also $j = 1$ oder $j = n$. Aus $\lambda |\mathfrak{P}| = |\mathfrak{P}| = j^2$ ergibt sich also $|\mathfrak{P}| = 1$ oder $|\mathfrak{P}| = n^2$. Es bleibt zu zeigen, daß die Ebene im Falle $|\mathfrak{P}| = n^2$ genau eine Gerade enthält, auf der keine Punkte von $\mathfrak{P}$ liegen. Dazu benutzen wir die in 1.2. bewiesene Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})\,|\mathfrak{x}| = k\,|\mathfrak{P}|. \tag{4}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist im vorliegenden Falle $j \sum_{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}| = n \sum_{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}|$, die rechte Seite ist $(n+1)\,n^2$. Es folgt $\sum_{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}| = n(n+1)$, oder $\sum_{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}) = 0} |\mathfrak{x}| = v - n(n+1) = 1$. Also gibt es nur eine Geradenklasse $\mathfrak{g}$ mit $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g}) = 0$, und diese besteht aus genau einer Geraden. Damit ist Lemma 5 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 6. Wegen Lemma 4 folgt aus der Voraussetzung $t(\Gamma) > 3$ die Existenz eines nichtausgearteten Dreiecks. Also ergibt sich: Entweder ist $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine nichtausgeartete projektive Ebene, oder es gibt zwei ausgezeichnete Γ-Klassen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ mit den in Fig. 2 angedeuteten Inzidenzverhältnissen, insbesondere also mit $[\mathfrak{P}] > 2 < [\mathfrak{g}]$, da $t(\Gamma) > 3$.

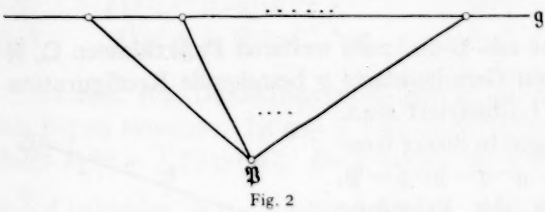


Fig. 2

In jedem Falle gibt es Γ-Klassen, die die Voraussetzungen von Lemma 5 erfüllen. Also ist $\lambda = 1$ und $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene. Ist auch $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine (nichtausgeartete) projektive Ebene, so kann keine Klasse mehr als ein Element enthalten, da es sonst nach Lemma 5 nur eine nicht mit ihr inzidente andersartige Γ-Klasse geben könnte. Das aber ist in einer nichtausgearteten projektiven Ebene nicht möglich. Damit ist Satz 6 bewiesen.

2.3. Ergänzungssätze

Während bisher die Frage im Vordergrund stand, unter welchen Umständen man aus der Voraussetzung der Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung in $\mathfrak{E}/\Gamma$ schließen kann, daß $\lambda = 1$ ist, wollen wir nun $\lambda = 1$ voraussetzen und untersuchen, was man über die Typen von taktischen Zerlegungen aussagen kann, deren abgeleitete Strukturen eindeutige Schnitte und Verbindungen haben. Wir werden zeigen (man vergleiche dazu die Definition von S. 63):

Satz 7. *Die nichttrivialen taktischen Zerlegungen Γ mit $t(\Gamma) > 2$ einer projektiven Ebene der Ordnung n, deren abgeleitete Strukturen eindeutige Schnitte und Verbindungen haben, sind genau diejenigen, welche eine Klasse mit genau n^2 Elementen besitzen.*

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Lemma 6. *Erfüllt die taktische Zerlegung Γ der endlichen projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ die Bedingungen*

(a) $t(\Gamma) = 3$,

(b) $[\mathfrak{X}] = [\mathfrak{x}] = 2$ *für alle* $\mathfrak{X}, \mathfrak{x}$,

(c) $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] = 1$ *für alle* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, *oder*
$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = 1$ *für alle* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$,

so besteht eine Γ-Klasse aus n^2 Elementen.

Die beiden Eigenschaften (c) sind natürlich gleichwertig.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, daß die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ ein nichtausgeartetes Dreieck ist. Wir bezeichnen die Punktklassen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die Geradenklassen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ derart, daß

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{c}) = 0$$

ist (vgl. Fig. 3).

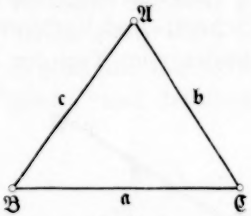


Fig. 3

Wir machen nun die Annahme

(*) $\quad |\mathfrak{X}| > 1 < |\mathfrak{x}|$ für alle $\mathfrak{X}, \mathfrak{x}$.

Dann folgt zunächst, daß jede Γ-Klasse drei Elemente in allgemeiner Lage enthalten muß, denn wären z.B. alle Punkte einer Punktklasse $\mathfrak{X}$ mit einer Geraden g kollinear, so müßte g eine Geradenklasse für sich bilden. Gäbe es nämlich noch eine weitere Gerade h in der von g aufgespannten Geradenklasse, so könnte auf dieser höchstens ein Punkt von $\mathfrak{X}$ liegen; das aber kann nicht sein, da ja g mehr als einen Punkt von $\mathfrak{X}$ enthält. Es sei nun b eine beliebige Gerade von $\mathfrak{b}$ und ferner $A \in \mathfrak{A}$ derart, daß $A \nmid b$. Einen solchen Punkt gibt es, da $\mathfrak{A}$ drei Punkte in allgemeiner Lage enthält. Auf b liegen genau $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{b})$ Punkte von $\mathfrak{C}$, und die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit A, die wegen $\lambda = 1$ eindeutig sind, müssen zu $\mathfrak{b}$ gehören, da sie Punkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ enthalten. Da sie alle durch denselben Punkt A gehen, folgt $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}) \geq (\mathfrak{C}\,\mathfrak{b})$. Wegen Voraussetzung (c) ist nun die Folgerung von Lemma 3 anwendbar, sie ergibt $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{a})$. Also folgt $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}) \geq (\mathfrak{C}\,\mathfrak{b})$, und aus Symmetriegründen muß sogar $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{b})$ gelten. Ebenso folgt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{a})$, und dual dazu $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{B})$. Wir zeigen nun, daß alle von Null verschiedenen $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$ gleich derselben Konstanten r sind. Aus Symmetrie- und Dualitätsgründen braucht dazu nur noch z.B. $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{c})$ bewiesen zu werden. Das geht mit der Folgerung von Lemma 3 und den oben gefundenen Beziehungen: $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{c})$. Aus Lemma 4,(ii) folgt nun wegen $\lambda = 1$, daß $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{x}| = r^2$, also $3r^2 = n^2 + n + 1$, ferner aus (G 2) und Voraussetzung (b): $2r = n + 1$. Kombination dieser beiden Beziehungen aber ergibt $n = 1$, wonach alle Γ-Klassen aus nur einem Element bestehen würden, im Widerspruch zu (*). Also gibt es eine Klasse mit nur einem Element, z.B. die Klasse $\mathfrak{a}$. Alle nicht auf der einzigen Geraden

von $\mathfrak{a}$ liegenden Punkte gehören sodann zu nicht mit $\mathfrak{a}$ inzidenten Punktklassen. Da es genau n^2 solche Punkte und genau eine solche Punktklasse, nämlich $\mathfrak{A}$, gibt, folgt daraus die Behauptung des Lemma 6.

Beweis von Satz 7. Ist zunächst Γ eine taktische Zerlegung mit einer Klasse — o.B.d.A. einer Punktklasse $\mathfrak{P}$ —, die n^2 Elemente enthält, so folgt wie beim Beweis von Lemma 5 mit Benutzung von (4), daß es genau eine Geradenklasse $\mathfrak{g}$ gibt, die mit $\mathfrak{P}$ nicht inzidiert, und diese Geradenklasse besteht aus einem Element. Es ist nun klar, daß die von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Punktklassen, die ja alle aus kollinearen Punkten bestehen müssen, sowohl unter sich als auch mit $\mathfrak{P}$ eindeutige Verbindungsklassen haben. Andernfalls nämlich müßte es außer der einzigen Geraden von $\mathfrak{g}$ noch andere Verbindungsgeraden von nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkten geben, was in einer projektiven Ebene nicht möglich ist.

Sei nun umgekehrt Γ eine nichttriviale taktische Zerlegung mit eindeutigen Schnitt- und Verbindungsklassen. Wegen $t(\Gamma)>2$ und Lemma 4 ist $\mathfrak{E}/\Gamma$ entweder vom Typ der Fig. 2 oder vom Typ der Fig. 3. Im ersteren Falle ist die Existenz einer Γ-Klasse mit n^2 Elementen durch Lemma 5, im letzteren durch Lemma 6 gesichert. Damit ist Satz 7 bewiesen.

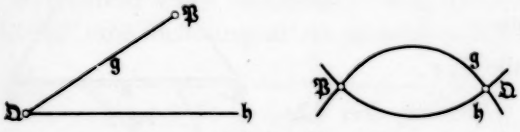


Fig. 4 a u. b

Satz 6 und 7 geben vollständige Auskunft über alle möglichen Typen von taktischen Zerlegungen Γ von projektiven Ebenen, deren abgeleitete Strukturen wieder (eventuell ausgeartete) projektive Ebenen sind, vorausgesetzt, daß $t(\Gamma)>2$ ist. Es liegt nun nahe, jetzt auch noch den Fall $t=2$ zu untersuchen (der Fall $t=1$ ist natürlich uninteressant) und festzustellen, unter welchen Umständen auch hier Schnitte und Verbindungen eindeutig sind. Für die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ sind offenbar nur noch zwei Typen möglich (vgl. Fig. 4), von denen der erste eindeutige Schnitte und Verbindungen hat.

Wir zeigen, daß in vielen Fällen auch für $t=2$ noch die Aussage des Satzes 7 von der Existenz einer Klasse mit n^2 Elementen erhalten bleibt.

Satz 8. *Sei Γ eine taktische Zerlegung einer projektiven Ebene der Primzahlordnung p derart, daß $t(\Gamma)=2$. Dann sind Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{E}/\Gamma$ eindeutig, und eine der Γ-Klassen enthält n^2 Elemente.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ die Γ-Klassen. Dann gilt nach Lemma 1, Gl. (10) und wegen $n=p$, daß eine der Zahlen $|(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})-(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})|$, $|(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})-(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})|$ gleich p, die andere gleich 1 ist. O.B.d.A. nehmen wir $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})-(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})=p$ und $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{P})-(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q})=1$ an. Nach (G 2) ist dann $p=(\mathfrak{P}\,\mathfrak{g})-(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})=p+1-(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{g})-(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})$, $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})+(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{g})=1$. Da sowohl $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})$ wie $(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{g})$ nicht negativ und ganzzahlig sind, muß eine dieser Zahlen verschwinden und die andere $=1$ sein. Es folgt, daß Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{E}/\Gamma$ eindeutig sind, d.h. $\mathfrak{E}/\Gamma$ ist vom Typ der Fig. 4a. Denn in einer Struktur vom Typ der Fig. 4b müssen alle $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$ von Null verschieden sein, da jede Klasse mit jeder andersartigen inzidiert.

Ist nun $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 1$ und $(\mathfrak{Q}\mathfrak{g}) = 0$, so ist wegen (G 1) auch $(\mathfrak{g}\mathfrak{Q}) = 0$, und es folgt $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) = 1$, da $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\mathfrak{Q}) = 1$. Also ist $|\mathfrak{g}| = (\mathfrak{g}\mathfrak{P})(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 1$ nach Lemma 3, und es folgt $|\mathfrak{g}| = 1$. Ist $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 0$ und $(\mathfrak{Q}\mathfrak{g}) = 1$, so folgt $(\mathfrak{h}\mathfrak{P}) = 0$ wegen (G 1), und daraus $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) = p + 1$ wegen (G 2). Nun folgt weiter $p + 1 = (\mathfrak{g}\mathfrak{Q}) + (\mathfrak{h}\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - 1 + (\mathfrak{h}\mathfrak{Q}) = p + (\mathfrak{h}\mathfrak{Q})$, also ist $(\mathfrak{h}\mathfrak{Q}) = 1$, und Lemma 3 ergibt nun wieder $|\mathfrak{h}| = (\mathfrak{h}\mathfrak{Q})(\mathfrak{Q}\mathfrak{g}) = 1$, also $|\mathfrak{h}| = 1$. In jedem Falle enthält also eine Γ-Klasse nur ein Element, woraus wie beim Beweis von Lemma 6 die Existenz einer Klasse mit n^2-Elementen folgt, q.e.d.

Wir zeigen als nächstes, daß im allgemeinen aus $t(\Gamma) = 2$ nicht $\lambda = 1$ zu folgen braucht. Dazu betrachte man einen beliebigen endlichen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{R}$ als λ-Ebene $\mathfrak{E}$ aufgefaßt werden kann, wenn man unter den Punkten von $\mathfrak{E}$ die Punkte von $\mathfrak{R}$ und unter den „Geraden" von $\mathfrak{E}$ die Ebenen von $\mathfrak{R}$ versteht, während Inzidenz in $\mathfrak{E}$ durch Inzidenz in $\mathfrak{R}$ erklärt ist. Für die so erhaltene λ-Ebene $\mathfrak{E}$ gilt $v = q^3 + q^2 + q + 1$, wobei q eine Primzahlpotenz ist, ferner $k = q^2 + q + 1$, $\lambda = q + 1$ und $n = q^2$. Insbesondere ist also $\lambda > 1$; aber es gibt eine taktische Zerlegung Γ mit $t(\Gamma) = 2$: Man betrachte einen festen Punkt P und definiere Punktklassen:

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad \mathfrak{Q} = \{\text{Alle Punkte} \neq P\}$$

und „Geraden"klassen:

$$\mathfrak{g} = \{\text{Alle mit } P \text{ inzidenten Ebenen von } \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{h} = \{\text{Alle übrigen Ebenen von } \mathfrak{R}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Klasseneinteilung tatsächlich eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ definiert. Die Werte der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ sind in folgendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{P}$	1	0
$\mathfrak{Q}$	$q^2 + q$	$q^2 + q + 1$

$(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{g}$	$q^2 + q + 1$	$q + 1$
$\mathfrak{h}$	0	q^2

Wir zeigen nun weiter, daß die Aussagen von Satz 8 für zusammengesetzte n nicht mehr allgemein richtig sind. Wir werden für die beiden in Fig. 4 illustrierten Typen von abgeleiteten Strukturen $\mathfrak{E}/\Gamma$ mit $t(\Gamma) = 2$ Beispiele angeben, bei denen jede Klasse mehr als ein Element enthält. Die beiden zu behandelnden Klassen von Beispielen rühren von Teilebenen bzw. von Ovalen endlicher projektiver Ebenen her.

2.4. Durch Teilebenen projektiver Ebenen definierte taktische Zerlegungen

Es sei $\mathfrak{E}$ eine endliche nichtausgeartete projektive Ebene der Ordnung n und $\mathfrak{E}'$ eine nichtausgeartete projektive Teilebene von $\mathfrak{E}$. Die Teilebene $\mathfrak{E}'$ ist dann ebenfalls endlich; ihre Ordnung bezeichnen wir mit m. Für diese

Situation gibt es viele Beispiele: Jede Ebene $\mathfrak{E}$ über einem Galois-Feld der Ordnung p^r, wo $r>1$, besitzt eigentliche Teilebenen der Ordnung p^d, mit $d|r$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(I) *Jeder Punkt von $\mathfrak{E}$ ist mit einer Geraden von $\mathfrak{E}'$ inzident.*

Wir definieren eine taktische Zerlegung Γ von $\mathfrak{E}$ folgendermaßen: $\mathfrak{P}=$ {Punkte von $\mathfrak{E}'$}, $\mathfrak{Q}=$ {alle übrigen Punkte}, $\mathfrak{g}=$ {Geraden von $\mathfrak{E}'$}, $\mathfrak{h}=$ {alle übrigen Geraden}. Es ist klar, daß die so definierte Klasseneinteilung eine taktische Zerlegung ist; die Werte der Zahlen $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$ sind in nachstehendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{P}$	$m+1$	1
$\mathfrak{Q}$	$n-m$	n

$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{g}$	$m+1$	1
$\mathfrak{h}$	$n-m$	n

Daß z.B. $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})=1$ ist, folgt so: $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})$ ist >0 nach Voraussetzung (I), und wäre $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{h})>1$, so wäre jede $\mathfrak{h}$-Gerade Verbindungsgerade von Punkten von $\mathfrak{E}'$, gehörte also selbst zu $\mathfrak{E}'$, entgegen unserer Annahme.

Aus den Grundgleichungen folgt nun der bekannte Satz (vgl. BAER [2], theorem 5), daß $m^2=n$ sein muß: $|\mathfrak{P}|$ ist die Anzahl der Punkte der projektiven Ebene $\mathfrak{E}'$, also gleich m^2+m+1. Andererseits ist nach (G 4a) auch

$$|\mathfrak{P}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q}) = m+1+n,$$

also folgt $m^2=n$. Umgekehrt hat jede Teilebene der Ordnung m mit $m^2=n$ die Eigenschaft (I). Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ ist vom zweiten der in Fig. 4 dargestellten Typen.

(II) *Es gibt Punkte von $\mathfrak{E}$, die auf keiner Geraden von $\mathfrak{E}'$ liegen.*

Wir definieren wieder eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$: Die Punktklassen sind $\mathfrak{P}=$ {Punkte von $\mathfrak{E}'$}, $\mathfrak{Q}=$ {Punkte, die nicht zu $\mathfrak{E}'$ gehören, aber auf Geraden von $\mathfrak{E}'$ liegen}, $\mathfrak{R}=$ {alle übrigen Punkte}, und die Geradenklassen dual: $\mathfrak{g}=$ {Geraden von $\mathfrak{E}'$}, $\mathfrak{h}=$ {Geraden, die nicht zu $\mathfrak{E}'$ gehören, aber durch Punkte von $\mathfrak{E}'$ gehen}, $\mathfrak{k}=$ {alle übrigen Geraden}. Wieder ist klar, daß so eine taktische Zerlegung definiert wird; die Zahlen $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$ sind in nachstehendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{P}$	$m+1$	1	0
$\mathfrak{Q}$	$n-m$	m^2	m^2+m+1
$\mathfrak{R}$	0	$n-m^2$	$n-m^2-m$

$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{g}$	$m+1$	1	0
$\mathfrak{h}$	$n-m$	m^2	m^2+m+1
$\mathfrak{k}$	0	$n-m^2$	$n-m^2-m$

Da $(\mathfrak{R}\,\mathfrak{k})\geq 0$ sein muß, folgt $m^2+m\leq n$. Diese Tatsache ist auf anderem Wege auch von BRUCK gefunden worden (vgl. [3], Lemma 3.1). Die von BRUCK angegebene Formel $(n-m)(n-m^2)$ für die Anzahl der mit keiner

Geraden von $\mathfrak{E}'$ inzidenten Punkte von $\mathfrak{E}$ folgt hier unmittelbar durch Anwendung von (G 4a):

$$|\mathfrak{R}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{R}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{Q}) = (n-m)\,(n-m^2).$$

Fig. 5 zeigt die beiden möglichen Typen von abgeleiteten Strukturen $\mathfrak{E}/\Gamma$ im Falle (II). Die Existenz von abgeleiteten Strukturen des Typs der Fig. 5a ist gesichert, denn es gibt projektive Ebenen mit Teilebenen, für die (II) gilt und $m^2+m<n$ ist. Wir haben also ein Beispiel einer abgeleiteten Struktur, in der die Zahlen $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$, $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$, $[\mathfrak{X}]$, $[\mathfrak{x}]$ nicht alle gleich sind (vgl. S. 69). Da man keine projektiven Ebenen kennt, deren Ordnung eine Zahl des Typs $m(m+1)$ ist, bleibt die Frage offen, ob eine solche Ebene Teilebenen der

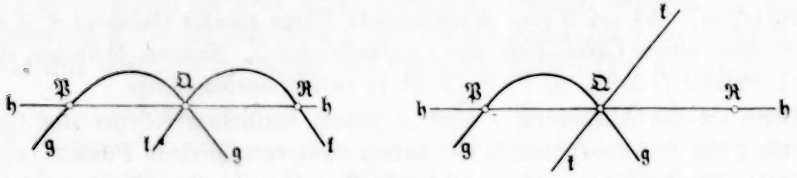


Fig. 5 a u. b

Ordnung m besitzen kann. Die Frage der Existenz von abgeleiteten Strukturen des Typs der Fig. 5b ist also auf diese Weise nicht zu entscheiden. Man sieht aber leicht, daß die abgeleitete Struktur der folgendermaßen definierten taktischen Zerlegung einer endlichen projektiven Ebene vom Typ der Fig. 5b ist:

Punktklassen: $\mathfrak{R} = \{$ein fester Punkt $R\}$,
$\mathfrak{P} = \{$alle Punkte einer festen Geraden g, die nicht durch R geht$\}$,
$\mathfrak{Q} = \{$alle übrigen Punkte$\}$.

Geradenklassen: $\mathfrak{g} = \{g\}$,
$\mathfrak{h} = \{$alle Geraden durch $R\}$,
$\mathfrak{k} = \{$alle übrigen Geraden$\}$.

2.5. Durch Ovale definierte taktische Zerlegungen

Wir wenden uns nun einer anderen Klasse vin Beispielen zu. Ein *Oval* einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung n ist eine Menge von $n+1$ Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind. Von den $n+1$ Geraden durch einen beliebigen Ovalpunkt müssen also n noch einen weiteren Punkt des Ovals enthalten, jede solche Gerade heißt eine *Sekante*. Es folgt, daß durch jeden Ovalpunkt genau eine Gerade geht, die außer diesem keine weiteren Ovalpunkte enthält, jede solche Gerade heißt eine *Tangente*. Die Anzahl der Tangenten ist $n+1$, die der Sekanten gleich $n(n+1)/2$, also bleiben noch $n(n-1)/2$ weitere Geraden, diese enthalten keine Ovalpunkte und werden *Passanten* genannt.

Wir wollen die Ovale zur Definition gewisser taktischer Zerlegungen heranziehen. Dabei unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

(I') *n ist gerade.*

In diesem Falle hat QVIST in [*12*], theorem 5, S. 10, gezeigt, daß alle Tangenten eines Ovals durch einen Punkt gehen müssen. Dieser Punkt bildet zusammen mit den $n+1$ Ovalpunkten eine Menge $\mathfrak{P}$ von $n+2$ Punkten, von denen keine drei kollinear sind. (Man sagt statt dessen auch: die Punkte von $\mathfrak{P}$ befinden sich „in allgemeiner Lage".) QVIST [*12*] zeigt weiter, daß es $n+2$ Punkte in allgemeiner Lage in einer projektiven Ebene der Ordnung n höchstens dann geben kann, wenn n gerade ist. Daß es tatsächlich Ebenen gerader Ordnung n mit $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage gibt, zeigt folgendes

Beispiel. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine desarguessche Ebene gerader Ordnung n, d.h. eine Ebene über einem Galois-Feld der Charakteristik 2. Sodann befinden sich die $n+2$ Punkte $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(x:x^2:1)$ in allgemeiner Lage.*

Denn da die Abbildung $x \to x^2$ in jedem endlichen Körper der Charakteristik 2 ein Automorphismus ist, haben zwei verschiedene Punkte $(x:x^2:1)$, $(y:y^2:1)$ verschiedene erste *und* verschiedene zweite Koordinaten, sind also weder mit $(1:0:0)$ noch mit $(0:1:0)$ kollinear. Und wären drei Punkte $(x:x^2:1)$, $(y:y^2:1)$, $(z:z^2:1)$ mit $x \neq y \neq z \neq x$ kollinear, so würde für den Koeffizienten m der Gleichung $m x_1 + x_2 + b x_3 = 0$ ihrer Verbindungsgeraden folgen:

$$m = (y^2 - x^2)(y - x)^{-1} = (z^2 - x^2)(z - x)^{-1},$$

d.h. $y = z$, ein Widerspruch.

Es sei nun $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene gerader Ordnung und $\mathfrak{P}$ eine Menge von $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage von $\mathfrak{E}$. Weiter sei $\mathfrak{Q}$ die Menge der n^2-1 nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkte, $\mathfrak{g}$ die Menge der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$-Punkten und $\mathfrak{h}$ die Menge der nicht zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Geraden. Sodann bilden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$, mit folgenden Werten für die $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$:

$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{P}$	2	0	$\mathfrak{g}$	$n+1$	$(n+2)/2$
$\mathfrak{g}$	$n-1$	$n+1$	$\mathfrak{h}$	0	$n/2$

Wir verifizieren nur, daß $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{Q}) = (n+2)/2$ ist. [Daraus folgt sofort $(\mathfrak{h}\,\mathfrak{Q}) = n/2$, und die übrigen Beweise sind ganz einfach.] Wir müssen zeigen, daß durch jeden nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkt Q genau $(n+2)/2$ Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$-Punkten gehen, und dazu genügt der Nachweis, daß auf jeder Verbindungsgeraden von Q mit einem Punkt $P \in \mathfrak{P}$ noch ein weiterer Punkt $P' \neq P$ von $\mathfrak{P}$ liegt. Das aber ist klar: andernfalls blieben für die $n+1$ von P verschiedenen Punkte von $\mathfrak{P}$ nur n Geraden durch P, auf denen sie liegen müßten. Nach dem Schubfachschluß würde folgen, daß es eine Gerade durch P mit zwei von P verschiedenen Punkten von $\mathfrak{P}$ geben müßte. Das aber widerspricht der Annahme, daß die Punkte von $\mathfrak{P}$ sich in allgemeiner Lage befinden.

Die nach der oben erklärten taktischen Zerlegung Γ abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ ist, da $(\mathfrak{P}\mathfrak{h})=0$, vom Typ der Fig. 4a, sie besitzt aber im allgemeinen keine Klassen mit nur einem Element; vielmehr ist $|\mathfrak{P}|=n+2$, $|\mathfrak{Q}|=n^2-1$, $|\mathfrak{g}|=(n+1)(n+2)/2$, $|\mathfrak{h}|=n(n-1)/2$. Diese Zahlen sind bei $n\geq 4$ alle größer als 1. Also kann es bei $n\geq 4$ auch keine Klasse mit n^2 Elementen geben.

(II′) *n ist ungerade.*

Für diesen Fall hat QVIST gezeigt ([*12*], theorem 3, S. 8), daß durch einen Schnittpunkt zweier Tangenten eines Ovals keine weiteren Tangenten mehr gehen können. Die Menge der Punkte von $\mathfrak{E}$ zerfällt also in drei Klassen: Die Klasse $\mathfrak{P}$ der Ovalpunkte, die Klasse $\mathfrak{Q}$ der *äußeren Punkte*, das sind die Tangentenschnittpunkte, und die Klasse $\mathfrak{R}$ aller übrigen Punkte; diese heißen *innere Punkte*, durch sie geht keine Tangente. Nennen wir nun die Klasse der Tangenten $\mathfrak{g}$, die der Sekanten $\mathfrak{h}$, und die der Passanten $\mathfrak{k}$, so bilden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ eine taktische Zerlegung mit folgenden Zahlen $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$:

$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{P}$	1	2	0
$\mathfrak{Q}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$
$\mathfrak{R}$	0	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$

$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{g}$	1	2	0
$\mathfrak{h}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$
$\mathfrak{k}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$

Die abgeleitete Struktur ist wieder vom Typ der Fig. 5a. Wir haben also hier noch ein Beispiel dafür, daß die abgeleiteten Strukturen ganz verschiedener Typen von taktischen Zerlegungen dieselben sein können.

3. Die Matrizen einer taktischen Zerlegung

3.1. Die Matrix-Grundgleichungen

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige λ-Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$. Wir numerieren die Γ-Klassen in willkürlicher Weise von 1 bis $t=t(\Gamma)$: $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_t$ seien die Punktklassen und $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_t$ die Geradenklassen. Um dauernde Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir in diesem Abschnitt stets voraussetzen, daß $t>1$ ist. Wir definieren vier Matrizen P, G, A, B folgendermaßen (i ist der Zeilen-, k der Spaltenindex, und δ_{ik} das Kronecker-Symbol):

$$P=(|\mathfrak{P}_i|\,\delta_{ik}), \qquad G=(|\mathfrak{g}_i|\,\delta_{ik}).$$

$$A=((\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{g}_k)), \qquad B=((\mathfrak{g}_i\,\mathfrak{P}_k)).$$

Diese Matrizen nennen wir die Γ-Matrizen; sie sind sämtlich t-reihige quadratische Matrizen. Beispiele für Γ-Matrizen A, B sind im zweiten Abschnitt schon aufgetreten (vgl. S. 75, 76, 76, 78, 79). Wir merken an, daß im Falle $t=v$, d.h. wenn jede Γ-Klasse aus einem Element besteht, die Matrix A gerade die bekannte Inzidenzmatrix von $\mathfrak{E}$ und B ihre Transponierte A^T ist.

Wir werden in diesem Paragraphen Beziehungen herleiten, die zwischen den Γ-Matrizen jeder taktischen Zerlegung Γ bestehen müssen, nämlich die folgenden

Matrix-Grundgleichungen

(M 1) $$GA^T = BP, \qquad PB^T = AG,$$

(M 2) $$AB = \lambda PJ + nE, \qquad BA = \lambda GJ + nE.$$

Hier bedeutet E die t-reihige Einheitsmatrix und J diejenige t-reihige quadratische Matrix, deren sämtliche Elemente gleich Eins sind.

(M 3) $$AGA^T = \lambda PJP + nP, \quad BPB^T = \lambda GJG + nG.$$

Die Beweise ergeben sich sofort aus den Grundgleichungen (G 1) und (G 4): Die Beziehung (G 1) besagt $(\mathfrak{P}_i \mathfrak{g}_k)\,|\mathfrak{g}_k| = (\mathfrak{g}_k \mathfrak{P}_i)\,|\mathfrak{P}_i|$ für alle i, k. In Matrixform geschrieben heißt das gerade $AG = (BP)^T$, und die Beziehungen (M 1) folgen nun sofort aus der Tatsache, daß P und G Diagonalmatrizen, also gleich ihren Transponierten sind. Die Gln. (M 2) ergeben sich ebenso direkt aus (G 4a) und (G 4b). Die Beziehungen (M 3) schließlich folgen aus (M 1) durch Linksmultiplikation mit A bzw. B und Benutzung von (M 2).

Matrizen mit ganzzahligen Elementen können auch als Matrizen über beliebigen Körpern aufgefaßt werden. Wir zeigen:

Lemma 7. *Ist Γ eine taktische Zerlegung einer λ-Ebene der Ordnung n, so sind die Γ-Matrizen A und B über allen Körpern regulär, deren Charakteristik kein Teiler von $n(n+\lambda)$ ist.*

Um das zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Produkt der Determinanten von A und B über solchen Körpern von Null verschieden ist. Nun ist aber

(11) $$\det A \det B = n^{t-1}(n+\lambda)^2,$$

was man z.B. aus (M 2) herleiten kann: Man subtrahiere die letzte Spalte der Matrix AB von allen anderen und addiere sodann die $t-1$ ersten Zeilen zur letzten. Es ergibt sich eine Dreiecksmatrix mit $t-1$ Diagonalstellen n und der letzten Diagonalstelle $n + \lambda \sum_{i=1}^{t} |\mathfrak{P}_i|$; dieser Ausdruck ist wegen (G 3) und (3) gleich $(n+\lambda)^2$. Also folgt (11), und das Lemma 7 ist bewiesen.

Wir merken an, daß A und B also insbesondere über dem Körper der rationalen Zahlen regulär sind.

3.2. Zahlentheoretische Eigenschaften der $|\mathfrak{X}|, |\mathfrak{x}|$

In diesem Paragraphen ziehen wir einige erste elementare Folgerungen aus den Matrixgrundgleichungen. Wir definieren zunächst D als den größten gemeinsamen Teiler aller $|\mathfrak{X}|$, d als den g.g.T. aller $|\mathfrak{x}|$, wobei wie immer $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ die Klassen einer taktischen Zerlegung sind.

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine λ-Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$. Sodann gilt:*

(a) *Ist p eine Primzahl, die weder n noch $k = n + \lambda$ teilt, so geht p in ebensovielen $|\mathfrak{X}|$ wie $|\mathfrak{x}|$ auf. Insbesondere gilt $p \mid D$ genau dann, wenn $p \mid d$ gilt, und in diesem Falle geht p in D und d gleich oft auf.*

(b) *Sind v und k teilerfremd, so ist $D=d$.*

(c) *Gibt es eine Primzahl p, die eine der Zahlen D, d teilt und deren Quadrat nicht in n aufgeht, so teilt sie auch die andere.*

(d) *Die Zahl* $n^{t-1}\prod_{\mathfrak{X}}|\mathfrak{X}|\prod_{\mathfrak{x}}|\mathfrak{x}|$ *ist stets eine Quadratzahl.*

Beweis. Über jedem Körper, über dem A und B reguläre Matrizen sind, haben P und $\lambda GJG+nG=BAG$ sowie G und $\lambda PJP+nP=ABP$ wegen (M3) gleiche Ränge. Das sind nach Lemma 7 gerade die Körper, deren Charakteristik Null oder eine Primzahl ist, die weder n noch k teilt. AB und BA sind über jedem solchen Körper regulär, also folgt Gleichheit der Ränge von P und G. Da P und G Diagonalmatrizen sind, besagt die Gleichheit ihrer Ränge Gleichheit der Anzahlen von Null verschiedener ihrer Elemente. Ist also p eine weder n noch k teilende Primzahl, so folgt: Es gibt ebensoviele $|\mathfrak{X}|\not\equiv 0 \bmod p$ wie $|\mathfrak{x}|\not\equiv 0 \bmod p$. Also geht p in ebensovielen $|\mathfrak{X}|$ wie $|\mathfrak{x}|$ auf, und insbesondere geht p genau dann in allen $|\mathfrak{X}|$ auf, wenn p in allen $|\mathfrak{x}|$ aufgeht. Ist das der Fall, und ist p^r die größte in allen $|\mathfrak{X}|$ und in allen $|\mathfrak{x}|$ aufgehende Potenz von p, so sind die Zahlen $p^{-r}|\mathfrak{X}|$, $p^{-r}|\mathfrak{x}|$ alle noch ganz. Also sind die Matrizen $p^{-r}P$ und $p^{-r}G$ ebenso wie P und G ganzzahlig. Es folgt nun wie oben, daß $p^{-r}P$ und $p^{-r}G$ die gleichen Ränge haben. Wegen der Maximaleigenschaft von r gibt es unter den Zahlen $p^{-r}|\mathfrak{X}|$, $p^{-r}|\mathfrak{x}|$ mindestens eine, die nicht durch p teilbar ist, d.h. mindestens eine der Matrizen $p^{-r}P$, $p^{-r}G$ hat von Null verschiedenen Rang. Dann müssen sie aber beide von Null verschiedenen Rang haben, d.h. es gibt sowohl ein $p^{-r}|\mathfrak{X}|\not\equiv 0 \bmod p$ als auch ein $p^{-r}|\mathfrak{x}|\not\equiv 0 \bmod p$. Also ist genau dann $p^r|D$, wenn $p^r|d$ gilt. Damit ist (a) bewiesen.

Nach (G3) sind sowohl D als auch d Teiler von v. Andererseits folgt aus (4), daß d ein Teiler aller $k|\mathfrak{X}|$, also ein Teiler von kD ist; dual dazu ist D ein Teiler von kd. Sind nun v und k teilerfremd, so folgt, daß D und d einander teilen, also gleich sind. Damit ist (b) bewiesen.

Sei p eine Primzahl, die d teilt, deren Quadrat aber kein Teiler von n ist. Wäre p kein Teiler von D, so gäbe es eine Punktklasse $\mathfrak{P}$ mit $p\nmid|\mathfrak{P}|$; wegen (4) müßte dann $p|k$ folgen. Daraus und aus der oben bewiesenen Beziehung $d|v$ würde mit (2) weiter $p|\lambda$ und daraus $p^2|(k^2-\lambda v)$ folgen; das aber ist ein Widerspruch gegen (3), wonach $k^2-\lambda v=n$ ist. Damit ist (c) bewiesen.

Aus (M1) erhält man durch Multiplikation mit BP und Determinantenbildung unter Berücksichtigung von (11) die Gleichung $n^{t-1}k^2\det PG=(\det BP)^2$. Daraus folgt wegen

$$\det PG=\prod_{\mathfrak{X}}|\mathfrak{X}|\prod_{\mathfrak{x}}|\mathfrak{x}|$$

sofort die Behauptung (d), und damit ist Satz 9 vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch, daß die Voraussetzung von (b) im Falle $\lambda=1$ der projektiven Ebenen immer erfüllt ist. Für jede taktische Zerlegung einer endlichen projektiven Ebene ist also der g.g.T. aller $|\mathfrak{X}|$ gleich dem aller $|\mathfrak{x}|$. Ferner bemerken wir, daß aus (d) der bekannte Satz folgt (vgl. etwa HALL [7],

S. 66), daß die Ordnung einer λ-Ebene mit geradem v ein Quadrat sein muß; dazu betrachte man einfach die triviale Zerlegung mit $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{x}| = \text{const} = 1$. Nennt man weiter eine taktischer Zerlegung Γ *symmetrisch*, wenn es eine Numerierung der Γ-Klassen derart gibt, daß $|\mathfrak{P}_i| = |\mathfrak{g}_i|$ ist für alle i (man vergleiche die Beispiele von S. 76, 76, 79), so folgt aus (d), daß die Zahl n^{t-1} bei symmetrischen Zerlegungen ein Quadrat sein muß. Insbesondere gilt also, in Verallgemeinerung des erwähnten Satzes:

Folgerung. *Besitzt eine λ-Ebene eine symmetrische taktische Zerlegung Γ mit geradzahligem $t(\Gamma)$, so ist ihre Ordnung n ein Quadrat.*

Die Aussagen des Satzes 9 werden besonders für den Fall interessant, daß alle $|\mathfrak{X}|$ und alle $|\mathfrak{x}|$ Potenzen derselben Primzahl p sind; eine solche taktische Zerlegung wollen wir eine *p-Zerlegung* nennen. Dieser Fall tritt z.B. dann ein, wenn die Zerlegung gemäß Satz 1 von einer p-Gruppe von Kollineationen herrührt: Wegen der Beziehung (6) von S. 65 müssen alle $|\mathfrak{X}|$ und alle $|\mathfrak{x}|$ Teiler der Gruppenordnung sein. Ein $|\mathfrak{X}|$ bzw. $|\mathfrak{x}|$, welches nicht durch p teilbar ist, muß also im Falle der p-Zerlegung gleich Eins sein. Bezeichnen wir mit F bzw. f die Anzahlen der $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{X}| = 1$ bzw. $|\mathfrak{x}| = 1$ (für den Fall, daß die Zerlegung von einer p-Gruppe von Kollineationen herrührt, sind F und f die Anzahlen von Fixpunkten bzw. Fixgeraden der Gruppe), so gilt für jede p-Zerlegung

$$F \equiv f \equiv v \bmod p, \tag{12}$$

wie man sofort aus (G3) folgert. Aus Satz 9 und der Kongruenz (12) erhält man nun weiter:

Satz 10. *Ist Γ eine p-Zerlegung einer λ-Ebene der Ordnung n, so gilt:*

(a') *Sind v und k teilerfremd, so ist genau dann $F = 0$, wenn $f = 0$ ist.*

(b') *Teilt p weder n noch k, oder ist $t(\Gamma) \leq p$, so ist $F = f$.*

(c') *Ist $\lambda = 1$ und $F \neq f$, so ist p ein Teiler von n.*

Beweis. Sind v und k teilerfremd, so ist nach Satz 9 (b) der g.g.T. aller $|\mathfrak{X}|$ gleich dem aller $|\mathfrak{x}|$. In einer p-Zerlegung ist ein solcher g.g.T. genau dann gleich Eins, wenn es wirklich eine Klasse mit nur einem Element gibt. Also folgt (a'). Daß $F = f$ ist, wenn $p \nmid kn$, folgt aus Satz 9 (a). Sei nun $t(\Gamma) \leq p$. Nach (12) gilt sodann $F = f + jp$, o.B.d.A. kann $j \geq 0$ angenommen werden. Da $F \leq t(\Gamma)$ ist, folgt weiter $f + jp \leq p$, also ist entweder $j = 0$, in welchem Falle $F = f$, also nichts zu beweisen ist, oder $j = 1$, $f = 0$. Dieser letztere Fall kann aber nicht eintreten, denn dann würde $F = p = t$ folgen, was bedeuten würde, daß jede Punktklasse nur ein Element enthält. Das ist wegen Satz 2 mit $f = 0$ unverträglich.

Es bleibt (c') zu beweisen. Man überlegt sich leicht, daß im Falle $\lambda = 1$, also dem der projektiven Ebene, diejenigen Punkte und Geraden, welche Γ-Klassen für sich allein bilden, eine eventuell ausgeartete Teilebene bilden. Ist nun $F \neq f$, so muß diese Teilebene mindestens ein Element enthalten, ja nach (a') sogar mindestens einen Punkt und mindestens eine Gerade. [$k = n + 1$ und $v = n(n+1) + 1$ sind nämlich teilerfremd.] Ferner ist diese Teilebene

ausgeartet, und es gibt in ihr eine ausgezeichnete Gerade g, die mit allen Punkten, und einen ausgezeichneten Punkt P, der mit allen Geraden der Teilebene inzident ist. Die aus der ausgezeichneten Geraden g allein bestehende Klasse nennen wir $\mathfrak{g}$. Offenbar ist $|\mathfrak{g}| = 1$, also folgt aus (G1) für alle $\mathfrak{X}$ mit $(\mathfrak{X}\mathfrak{g}) \neq 0$, daß $(\mathfrak{X}\mathfrak{g}) = |\mathfrak{X}|$ ist. Da aber für alle $\mathfrak{X}$ entweder $|\mathfrak{X}| = 1$ oder $|\mathfrak{X}| \equiv 0 \bmod p$ gilt, ergibt sich aus (G2) die Kongruenz $F \equiv k = n + 1 \bmod p$. Wegen (12) ist aber auch $F \equiv v = n(n+1) + 1 \bmod p$. Subtraktion dieser beiden Kongruenzen ergibt $n^2 \equiv 0 \bmod p$, also ist $p \mid n$, q.e.d.

3.3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von taktischen Zerlegungen

Aus der Matrix-Grundgleichung (M3), die schon beim Beweis von Satz 9 wesentlich benutzt wurde, lassen sich noch sehr viel weitergehende Folgerungen ziehen. Betrachtet man nämlich z.B. die (symmetrischen) Matrizen G und $ABP = \lambda PJP + nP$ als Koeffizientenmatrizen zweier quadratischer Formen $g(x) = x^T G x$ und $h(y) = y^T ABPy$, wobei x und y unbestimmte t-stellige Spaltenvektoren sind, so folgt aus (M3), daß die Substitution $x = Ay$ die Formen g und h ineinander überführt. Man nennt solche Formen und auch die zugehörigen Matrizen *kongruent*, wenn die Substitutionsmatrix A regulär ist. Die Beziehungen (M3) liefern also wegen Lemma 7 die Kongruenz von G mit $\lambda PJP + nP$ und die Kongruenz von P mit $\lambda GJG + nG$ über dem Körper der rationalen Zahlen. Minkowski und Hasse haben nun notwendige (und hinreichende, diese letztere Tatsache interessiert uns hier aber nicht) Bedingungen für die rationale Kongruenz von Matrizen aufgestellt. Diese Bedingungen können wir auf unseren Fall anwenden. Der Formulierung des (recht komplizierten) Ergebnisses dieser Anwendung der Hasse-Minkowskischen Theorie auf (M3) müssen wir einige Definitionen vorausschicken.

Es sei p eine ungerade Primzahl und a und b zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen. Sodann ist $a = a' p^\alpha$, $b = b' p^\beta$ für gewisse a', $b' \not\equiv 0 \bmod p$ und $\alpha, \beta \geq 0$. Wir definieren das *p-Hilbert-Symbol* $(a, b)_p$ von a und b durch

$$(a, b)_p = (-1 \mid p)^{\alpha\beta} (a' \mid p)^\beta (b' \mid p)^\alpha;$$

hier bedeuten $(-1 \mid p)$, $(a' \mid p)$, $(b' \mid p)$ Legendresche quadratische Restsymbole. (Für andere Möglichkeiten der Definition des Hilbert-Symboles sowie für die Beweise der unten angegebenen Rechenregeln für Hilbert-Symbole vergleiche man etwa Jones [11], Chapter 2.) Das Hilbert-Symbol hat die folgenden Eigenschaften:

$$(13) \quad \begin{cases} (a, b)_p = (b, a)_p \\ (a r^2, b s^2)_p = (a, b)_p \\ (a, bc)_p = (a, b)_p (a, c)_p \\ (ar, br)_p = (a, b)_p (r, -ab)_p \\ (a, a-1)_p = (a, a)_p = (a, -1)_p \\ (a, 1)_p = 1. \end{cases}$$

Wir führen noch folgende für das weitere bequeme Abkürzungen ein:

$$\gamma_i = n + \lambda \sum_{j=1}^{i} |\mathfrak{g}_j|, \quad \pi_i = n + \lambda \sum_{j=1}^{i} |\mathfrak{P}_j| \qquad (i = 1, \ldots, t) \tag{14}$$

und bemerken, daß $\gamma_t = \pi_t = n + \lambda v = k^2 = (n+\lambda)^2$. Das angekündigte Hauptresultat lautet nun:

Satz 11. *Die Punktklassen $\mathfrak{P}_i$ und die Geradenklassen $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, \ldots, t > 1)$ einer taktischen Zerlegung einer λ-Ebene der Ordnung n genügen den folgenden Beziehungen:*

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2})_p \prod_{i=1}^{t-1} \left(\prod_{j=1}^{i} |\mathfrak{P}_j|, |\mathfrak{P}_{i+1}| \right)_p \left(\prod_{j=1}^{i} |\mathfrak{g}_j|, |\mathfrak{g}_{i+1}| \right)_p \\ \quad = \left(n, \gamma_1 \prod_{i=1}^{t-1} |\mathfrak{g}_{i+1}|^t \right)_p \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -|\mathfrak{g}_i||\mathfrak{g}_{i+1}|\gamma_{i+1})_p \\ \quad = \left(n, \pi_1 \prod_{i=1}^{-1} |\mathfrak{P}_{i+1}|^t \right)_p \prod_{i=1}^{t-1} (\pi_i, -|\mathfrak{P}_i||\mathfrak{P}_{i+1}|\pi_{i+1}))_p \end{cases}$$

für jede ungerade Primzahl p.

Beweis. Der oben erwähnte Hasse-Minkowskische Satz lautet in der für unsere Zwecke bequemsten Formulierung:

Gibt es zu zwei t-reihigen ganzzahligen symmetrischen Matrizen R und S eine ganzzahlige reguläre Matrix C derart, daß $CRC^T = S$ ist, so gilt für jede ungerade Primzahl p:

$$\prod_{i=1}^{t-1} (R_i, -R_{i+1})_p = \prod_{i=1}^{t-1} (S_i, -S_{i+1})_p;$$

hierbei bedeuten R_i und S_i die i-ten Hauptminoren von R bzw. S.

(Zum Beweis vergleiche man HASSE [9] oder auch JONES [11], Chapter 2.) Dieser Satz ist wegen (M3) und Lemma 7 auf die Matrizen P und $\lambda GJG + nG$ bzw. G und $\lambda PJP + nP$ anwendbar. Wie haben die Hauptminoren dieser Matrizen zu berechnen. Es ist klar, daß $P_i = \prod_{j=1}^{i} |\mathfrak{P}_j|$, $G_i = \prod_{j=1}^{i} |\mathfrak{g}_j|$ ist, denn P und G sind Diagonalmatrizen. Weiter ist

$$(\lambda PJP + nP)_i = (\lambda PJ + nE)_i P_i = (AB)_i P_i$$

wegen (M2); und analog folgt $(\lambda GJG + nG)_i = (BA)_i G_i$. Auf dieselbe Art wie im Beweis von Lemma 7 für $\det AB$ kann man weiter zeigen, daß

$$(AB)_i = n^{i-1}\left(n + \lambda \sum_{j=1}^{i} |\mathfrak{P}_j|\right) = \pi_i n^{i-1}$$

und $(BA)_i = \gamma_i n^{i-1}$ ist. Der Hassesche Satz gibt also die Beziehung:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{t-1} (P_i, -P_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1}\gamma_i G_i, n^i \gamma_{i+1} G_{i+1}) \\ \prod_{i=1}^{t-1} (G_i, -G_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1}\pi_i P_i, n^i \pi_{i+1} P_{i+1}). \end{cases} \tag{15}$$

Dabei haben wir den Index p der Hilbert-Symbole weggelassen, was nicht zu Mißverständnissen führen wird. Die rechte Seite der ersten Gl. (15) läßt sich unter Benutzung der Rechenregeln (13) für Hilbert-Symbole in folgende drei Produkte aufspalten:

$$\prod_{i=1}^{t-1}(n^{i-1}\gamma_i, n^i\gamma_{i+1}) \prod_{i=1}^{t-1}(n^{i-1}\gamma_i, G_{i+1})(G_i, n^i\gamma_{i+1}) \prod_{i=1}^{t-1}(G_i, -G_{i+1}).$$

Das erste dieser Produkte wird weiter zerlegt in

$$\left[\prod_{i=1}^{t-1}(n^{i-1}, -n^i)\right](n, \gamma_1)\left[\prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, n^{2(i-1)})\right](n^{t-2}, \gamma_t)\prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, -\gamma_{i-1})$$
$$= (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2}\gamma_1)\prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, -\gamma_{i-1}).$$

Das zweite Produkt wird gleich

$$(G_1, n\gamma_2)\left[\prod_{i=2}^{t-1}(G_i, n^i\gamma_{i+1}n^{i-2}\gamma_{i-1})\right](n^{t-2}\gamma_{t-1}, G_t)$$
$$= (n, |\mathfrak{g}_1| G_t^t)(|\mathfrak{g}_1|, \gamma_2)(\gamma_{t-1}, G_t)\prod_{i=2}^{t-1}\left(\prod_{j=1}^{i}|\mathfrak{g}_j|, \gamma_{i-1}\gamma_{i+1}\right)$$
$$= (n, |\mathfrak{g}_1| G_t^t)(|\mathfrak{g}_1|, \gamma_1)(\gamma_{t-1}, |\mathfrak{g}_1| G_t)\prod_{j=2}^{t-1}\left(|\mathfrak{g}_j|, \prod_{i=j}^{t-1}\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}\right)$$
$$= (n, |\mathfrak{g}_1| G_t^t)\prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, |\mathfrak{g}_i|\,|\mathfrak{g}_{i+1}|).$$

Genau so läßt sich die zweite Gl. (15) behandeln, es folgt also:

$$(16)\quad \begin{cases} \prod_{i=1}^{t-1}(P_i, -P_{i+1})(G_i, -G_{i+1}) \\ \quad = (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2}\gamma_1|\mathfrak{g}_1| G_t)\prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, -|\mathfrak{g}_i|\,|\mathfrak{g}_{i+1}|\gamma_{i+1}) \\ \quad = (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2}\pi_1|\mathfrak{P}_1| P_t)\prod_{i=1}^{t-1}(\pi_i, -|\mathfrak{P}_i|\,|\mathfrak{P}_{i+1}|\pi_{i+1}). \end{cases}$$

Da $P_{i+1} = |\mathfrak{P}_{i+1}| P_i$ ist, läßt sich auf die Hilbert-Symbole im ersten der Produkte (16) noch einmal die vierte Rechenregel (13) anwenden:

$$(17)\qquad \prod_{i=1}^{t-1}(P_i, -P_{i+1})(G_i, -G_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1}(P_i, |\mathfrak{P}_{i+1}|)(G_i, |\mathfrak{g}_{i+1}|).$$

Aus (16) und (17) folgt die behauptete Beziehung (H) nun ganz einfach.

Wir bemerken noch, daß die Beziehung (H) sich im Falle einer symmetrischen Zerlegung, d.h. wenn $|\mathfrak{P}_i| = |\mathfrak{g}_i|$ für alle i, auf folgende einfachere Form reduziert:

$$(\mathrm{H_s})\qquad \left(n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2}\gamma_1\prod_{i=1}^{t-1}|\mathfrak{g}_{i+1}|^t\right)_p = \prod_{i=1}^{t-1}(\gamma_i, -|\mathfrak{g}_i|\,|\mathfrak{g}_{i+1}|\gamma_{i+1})_p.$$

Die Gln. (H) sind notwendige Bedingungen für die Existenz einer taktischen Zerlegung mit vorgegebenen $|\mathfrak{P}_i|$ und $|\mathfrak{g}_i|$. Sie enthalten alle bisher bekannten Nichtexistenzsätze für λ-Ebenen. Wir geben hier nur ein Beispiel:

Folgerung (Satz von BRUCK und RYSER [4], theorem 1). *Hat eine endliche projektive Ebene die Ordnung* $n \equiv 1$ *oder* $2 \bmod 4$, *so ist jede im quadratfreien Teil von* n *aufgehende ungerade Primzahl von der Form* $4j+1$.

Beweis. Man betrachte die triviale taktische Zerlegung der Ebene in lauter Klassen mit je einem Element. Dann ist $t = v = n^2 + n + 1$ und $(t-1)(t-2)/2 \equiv -1 \bmod 2$; ferner gilt, da $\lambda = 1$, daß $\gamma_i = n + i$, $i = 1, \ldots, t$. Da die Zerlegung natürlich symmetrisch ist, ist (H_s) anwendbar. Es ergibt sich:

$$(n, -[n+1])_p = \prod_{i=1}^{t-1} (n+i, -[n+i+1])_p .$$

Mit der dritten und fünften der Rechenregeln (13) folgt weiter:

$$(18) \qquad (n, -1)_p (n+1, -1)_p = \prod_{i=1}^{t-1} (n+i, -1)_p (n+i+1, -1)_p .$$

Faßt man nun die rechts stehenden Hilbert-Symbole in geeigneter Weise zusammen und beachtet man noch, daß $n + t = n + v = (n+1)^2$ ist, so bleibt wegen der zweiten und der letzten der Regeln (13) auf der rechten Seite von (18) nur $(n+1, -1)$ übrig. Also folgt $(n, -1)_p = 1$ für alle p. Ist nun p ein Teiler des quadratfreien Teiles von n, so daß $n = n' p^m$ mit $n' \not\equiv 0 \bmod p$ und $m \equiv 1 \bmod 2$ wird, so ergibt sich aus der Definition des Hilbert-Symbols schließlich, daß $(-1 \mid p) = 1$, also p von der Form $4j+1$ ist, q.e.d.

3.4. Vollsymmetrische taktische Zerlegungen

Die Anwendung der Beziehungen (H) ist im allgemeinen recht kompliziert und erfordert viele Fallunterscheidungen. In der folgenden Untersuchung, bei der wir uns an sich auch auf die Beziehungen (H) stützen könnten, schlagen wir daher einen anderen Weg ein.

Eine taktische Zerlegung einer beliebigen λ-Ebene soll *vollsymmetrisch* heißen, wenn alle ihre Klassen gleichviele Elemente enthalten. Vollsymmetrische taktische Zerlegungen werden insbesondere von halbtransitiven (Definition in [15]) Kollineationsgruppen erzeugt, also z.B. von zyklischen Kollineationsgruppen mit Primzahlordnung ohne Fixelemente. Bei der Behandlung der vollsymmetrischen Zerlegungen läßt sich die schwerfällige Behandlung mit (H_s) durch eine andere Methode ersetzen, deren wesentliches Hilfsmittel folgender von CHOWLA und RYSER stammender Satz ist:

Es sei $t > 1$ *ungerade und* $a, b > 0$ *ganze Zahlen. Gibt es sodann eine* t*-reihige Matrix* C *derart, daß* $CC^T = aJ + bE$ *ist, so besitzt die Gleichung*

$$b x^2 + (-1)^{(t-1)/2} a y^2 = z^2$$

nichttriviale ganzzahlige Lösungen x, y, z.

Zum Beweis vergleiche man [6], theorems 4, 5.

Wir benutzen dieses Resultat zum Beweis des folgenden Satzes:

Satz 12. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine λ-Ebene der Ordnung n und Γ eine vollsymmetrische taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ mit $t = t(\Gamma) > 1$. Ist sodann t gerade, so ist n eine Quadratzahl. Ist t ungerade und bezeichnet s die Anzahl der Elemente jeder Γ-Klasse, so gilt:*

(i) *Für die ungeraden Primteiler p des quadratfreien Faktors $(\lambda s)^*$ von λs ist $n \equiv 0 \bmod p$ oder $(n|p) = 1$.*

(ii) *Für die ungeraden Primteiler p des quadratfreien Faktors n^* von n ist $\lambda s \equiv 0 \bmod p$ oder $(\lambda s|p) = (-1)^{(t-1)(p-1)/4}$.*

Die jeweils erste Alternative tritt dabei höchstens dann auf, wenn $\lambda > 1$ ist.

Beweis. (a) Daß n für gerades t ein Quadrat sein muß, ist ein Spezialfall der Folgerung von Satz 9. Da alle $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{x}| = s$, folgt aus (G 1), daß $(\mathfrak{X}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ für jedes Paar $\mathfrak{X}, \mathfrak{x}$ von Γ-Klassen gelten muß. Das bedeutet gerade $B = A^T$. Weiter ist $P = G = sE$, also $PJ = GJ = sJ$. M 2) ergibt nun:

$$AA^T = \lambda s J + nE.$$

Da A über dem Körper der rationalen Zahlen regulär ist, ist der Chowla-Rysersche Satz mit $a = \lambda s$ und $b = n$ anwendbar. Es gibt also ein nichttriviales Tripel x, y, z ganzer Zahlen mit

$$n x^2 + (-1)^{(t-1)/2} \lambda s y^2 = z^2. \tag{19}$$

(b) Es sei nun $\lambda s = s^* r^2$ und s^* quadratfrei. Division von (19) durch das Quadrat des g.g.T. von x, ry, z ergibt eine nichttriviale Gleichung

$$n\xi^2 + (-1)^{(t-1)/2} s^* \eta^2 = \zeta^2,$$

in der ξ, η, ζ teilerfremd sind. Ist nun $p | s^*$, so folgt zunächst $(p, \xi) = 1$, denn aus $p|\xi$ und $p|s^*$ würde $p|\zeta^2$, also $p^2|\zeta^2$ folgen. Außerdem wäre $p^2|\xi^2$, also auch $p^2|s^*\eta^2$. Da s^* quadratfrei ist, würde daraus $p|\eta$ folgen, d.h. ξ, η und ζ hätten den gemeinsamen Teiler p, im Gegensatz zu der Voraussetzung. Es gibt also eine ganze Zahl ϱ mit $\varrho\xi \equiv 1 \bmod p$; Multiplikation unserer Gleichung mit ϱ^2 ergibt

$$(\varrho\zeta)^2 = n(\varrho\xi)^2 + (-1)^{(t-1)/2} s^* (\varrho\eta)^2 \equiv n \bmod p,$$

und daraus folgt, daß entweder $n \equiv 0 \bmod p$ oder $(n|p) = 1$ ist.

(c) Aus (19) folgt durch Division mit dem Quadrat des g.g.T. von mx, y, z, wobei $n = n^* m^2$ mit quadratfreiem n^*, eine nichttriviale Beziehung

$$n^*\xi^2 + (-1)^{(t-1)/2} \lambda s \eta^2 = \zeta^2$$

mit teilerfremden ξ, η, ζ. Daraus ergibt sich wie unter (b), daß entweder $\lambda s \equiv 0 \bmod p$ oder $\left((-1)^{(t-1)/2} \lambda s | p\right) = 1$ sein muß für jeden ungeraden Primteiler p von n^*; wegen $(-1|p) = (-1)^{(p-1)/2}$ folgt daraus die Behauptung (ii) von Satz 12. [Die Beweisteile (b) und (c) sind PICKERT [*12*], S. 297 nachgebildet.]

(d) Es bleibt zu zeigen, daß im Falle $\lambda = 1$ die Zahlen n und $\lambda s = s$ teilerfremd sind. Das aber folgt sofort aus der Teilerfremdheit von $v = n(n+1)+1$ und n sowie der Tatsache, daß $v = st$. Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Für den Fall, daß Γ die triviale taktische Zerlegung ist, deren sämtliche Klassen aus einem Element bestehen, ist die Aussage (b) von Satz 12 äquivalent zu den von CHOWLA und RYSER bewiesenen notwendigen Kriterien für die Existenz von λ-Ebenen. Satz 12 besagt die Nichtexistenz von vollsymmetrischen taktischen Zerlegungen in vielen endlichen projektiven Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist; z. B. kann eine Ebene der Ordnung 10, wenn sie existiert, keine vollsymmetrische Zerlegung besitzen, wie man leicht nachprüft.

Zum Abschluß leiten wir aus Satz 12 einige rein zahlentheoretische Folgerungen her:

Satz 13. *Es sei p eine ungerade Primzahl, $n = p^r$ mit ungeradem r, und $v = n^2+n+1$. Sodann gilt für alle ungeraden Primteiler q von v:*

(a) $(p|q) = 1$

und für alle echten Teiler d von v:

(b) $(d|p) = (-1)^{(p-1)(v-d)/4d}$.

(c) *Aus* $v \equiv -1 \bmod 4$ *folgt* $(d|p) = (-d|p) = 1$.

(d) *Aus* $p \equiv 1 \bmod 4$ *folgt* $(d|p) = 1$.

(e) *Aus* $(d|p) = -1$ *folgt* $p \equiv d \equiv -1 \bmod 4$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{E}$ die Desarguessche projektive Ebene der Ordnung n. Nach einem Satz von SINGER ([*14*]; für den Beweis vergleiche man auch PICKERT [*12*], S. 303) ist $\mathfrak{E}$ zyklisch, d.h. es existiert eine auf den Punkten von $\mathfrak{E}$ transitive zyklische Kollineationsgruppe Γ von $\mathfrak{E}$. Da abelsche transitive Permutationsgruppen regulär sind (vgl. WIELANDT [*15*], S. 9), muß Γ die *Ordnung* v haben. Es sei σ ein erzeugendes Element von Γ und d ein echter Teiler von v. Sodann erzeugt die von σ^d erzeugte Untergruppe Δ von Γ eine vollsymmetrische taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ mit $t(\Delta) = d$ und $s = v/d$.

Für jeden echten Primteiler q von v läßt sich nun d so wählen, daß q im quadratfreien Faktor von s aufgeht. Also ist $(n|q) = 1$ nach Satz 12, (i); wegen $\lambda = 1$ kann nämlich nicht $n \equiv 0 \bmod q$ sein. Aus $n = p^r$ und $r = 2j+1$ folgt sodann $(p|q) = 1$, d.h. die Behauptung (a).

Der quadratfreie Faktor von n besteht aus der Primzahl p allein; die Behauptung (b) ist gerade die Aussage (ii) von Satz 12.

Ist $v = n^2+n+1 \equiv -1 \bmod 4$, so folgt $n \equiv 1 \bmod 4$, da p ungerade, und weiter $p \equiv 1 \bmod 4$, da r ungerade ist. Also ist $(-1|p) = 1$ und folglich $(d|p) = (d|p)(-1|p) = (-d|p)$. Da andererseits nach Satz 13, (ii) eines der Legendre-Symbole $(d|p)$, $(-d|p)$ gleich Eins sein muß, folgt die Behauptung (c).

Die Behauptungen (d) und (e) sind ebenfalls direkte Folgerungen der Aussage (ii) von Satz 12.

Literatur

[1] Baer, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137–152 (1942). — [2] Baer, R.: Projectivities with fixed points on every line of the plane. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 273–286 (1946). — [3] Bruck, R. H.: Difference sets in a finite group. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 464–481 (1955). — [4] Bruck, R. H., and H. J. Ryser: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1**, 88–93 (1949). — [5] Carmichael, R. D.: Introduction to the theory of groups of finite order. Boston 1937. — [6] Chowla, S., and H. J. Ryser: Combinatorial problems. Canad. J. Math. **2**, 93–99 (1950). — [7] Hall jr., M.: Projective planes and related topics. California Institute of Technology 1954. — [8] Hall, M., and H. J. Ryser: Cyclic Incidence Matrices. Canad. J. Math. **3**, 495–502 (1951). — [9] Hasse, H.: Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. Crelle's J. reine u. angew. Math. **152**, 205–224 (1923). — [10] Hughes, D. R.: Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 350, 552 (1956). — [11] Jones, B. W.: The arithmetic theory of quadratic forms. Carus Monographs, New York 1950. — [12] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955. — [13] Qvist, B.: Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sci. Fenn. **134** (1952). — [14] Singer, J.: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 377–385 (1938). — [15] Wielandt, H.: Permutationsgruppen. Vorlesungsausarbeitung von J. André, Tübingen 1954/55.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 22. Mai 1957)

KLEE, V. L. jr.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 90–104 (1958)

Extremal structure of convex sets. II[1])

By
V. L. KLEE, jr.

1. Introduction

The present paper (a sequel to [12]) is a potpourri of results, examples, and questions concerning the extremal structure of convex sets. It deals mainly with exposed points of convex sets (in the sense of STRASZEWICZ [15]) but treats other matters also. Some of its principal results are incomplete, but are published in their present form in the hope that some interested reader may be able to improve them. Among the main contributions are perhaps the examples which illuminate the relationship between exposed points and extreme points, and the list of unsolved problems.

As in [12], attention will generally be restricted to convex sets which are linearly closed and contain no line. The notation and terminology of [12] will be employed without further explanation, but some additions are necessary. An *exposed point* of a set X in a topological linear space is a point $p \in X$ such that X is supported at p by a closed hyperplane which intersects X only at p. Thus an exposed point is simultaneously a special sort of extreme point and a special sort of support point. Note that (in contrast to that of extreme point) this notion depends in an essential way on the topology of the containing space and not merely on the linear structure of X. An *exposed ray* of X is a closed half-line $\varrho < X$ such that $\varrho = H \cap X$ for some closed supporting hyperplane H of X. The set of all exposed points of X will be denoted by $\exp C$ and the union of all exposed rays by $\operatorname{rexp} C$. We deal also with $\operatorname{su} X$, the set of all support points of X, and $\operatorname{sm} X$, the set of all smooth points of X. A point $p \in X$ is in $\operatorname{su} X$ [resp. $\operatorname{sm} X$] provided there is a [unique] closed hyperplane which supports X at p.

The most important "positive" results of the paper are in § 2, where it is proved that $\operatorname{ext} C < cl \exp C$ and $C = cl \operatorname{conv} (\exp C \cup \operatorname{rexp} C)$ whenever C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, and C contains no line. The relationship between $\operatorname{ext} C$ and $\exp C$ is studied further in § 3. In § 4 is a description of the duality between the operators "exp" and "sm", and use of this to derive the existence of exposed points from theorems on the existence of smooth points. A few more remarks, problems, and examples appear in § 5. The concluding § 6 describes a construction method for convex functions, and applies it to produce a three-demensional compact convex body C such that $\operatorname{bdry} C \sim \operatorname{ext} C$, $\operatorname{ext} C \sim \exp C$, and $\exp C$ are all dense in $\operatorname{bdry} C$.

[1]) Based on research sponsored in part by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA-04-200-ORD-292, and supported in part by a fellowship from the Sloan Foundation.

2. Exposed points and rays

We begin with

(2.1) Theorem[2]). *If C is a compact convex subset of a normed linear space E, then ext $C \subset cl$ exp C and $C = cl$ conv exp C.*

Proof. We assume without loss of generality that E is separable. By a theorem of DAY [5, p. 519] the topology of E can be generated by a norm whose unit cell is both smooth and strictly convex. We assume that E is metrized by such a norm $\| \|$. Now let A be the set of all $q \in C$ such that q is farthest in C from some $p \in E$. (Since C is compact, A is nonempty.) From the strict convexity of $\| \|$ it follows that q is an exposed point of the set $\{u: \|u-p\| \leq \|q-p\|\}$, and hence of C. Thus $A \subset \exp C$. And since the second statement of (2.1) implies the first (see [2], or (1.1) of [12]), to complete the proof of (2.1) it suffices to show that cl conv $A = C$.

Let $B = cl$ conv A and suppose there exists $x \in C \sim B$. Let z be the point of B nearest to x and let H be the hyperplane through $y = \frac{1}{2}(x+z)$ such that $H + (z-y)$ separates $\{v: \|v-x\| \leq \|z-x\|\}$ from B. For each positive integer n, let $z_n = y + n(z-y)$ and let K_n be the open cell $\{w: \|w-z_n\| < \|y-z_n\|\}$. Then K_α is an increasing sequence of open sets whose union is the entire open halfspace which contains B and is bounded by H. (This follows from the fact that the unit cell is smooth, whence $y \in \text{sm } K_n$.) Since B is compact, there exists m for which $B \subset K_m$. For each $b \in B$ we then have $\|b-z_m\| < \|y-z_m\| = \|x-z_m\| - \|x-y\|$, whence we conclude that the point of C farthest from z_m is not in B. This is a contradiction and completes the proof.

The preceding proof is quite similar to that of STRASZEWICZ [15], who proved the theorem in E^n. A stronger result will be established in § 4, but by a less direct argument involving duality.

To deal with exposed rays we need the following remark ((5.1) of [10]).

(2.2) *A closed convex subset of a normed linear space is locally compact if and only if each of its bounded closed subsets is compact.*

The following is the principal theorem of this paper, and should be compared with (3.4) and (3.5) of [12].

(2.3) Theorem. *Suppose C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, and C contains no line. Then* ext $C \subset cl$ exp C *and* $C = cl$ conv (exp $C \cup$ rexp C).

Proof. Consider $p \in \text{ext } C$ and $\varepsilon > 0$, and let $K = \{x \in C: \|x-p\| \leq 1\}$. Then of course $p \in \text{ext } K$, and K is compact by (2.2), so from (2.1) we deduce the existence of $q \in \exp K$ with $\|q-p\| < \varepsilon$. Thus there is a closed hyperplane H supporting K at q such that $H \cap K = \{q\}$. It is then evident that $H \cap C = \{q\}$ and $q \in \exp C$, whence we conclude that ext $C \subset cl$ exp C.

[2]) We should point out that no novelty is claimed for the proofs of (2.1) and (4.5), which are included here for the sake of completeness. The first of these is a direct extension of the argument of STRASZEWICZ [15], the second a modification of proofs of YOSIDA and FUKAMIYA [16] and MILMAN [14].

Now let $A = cl\,\mathrm{conv}\,(\exp C \cup \mathrm{rexp}\, C)$, and suppose $A \neq C$. Then there are a continuous linear functional F on E and a real constant k such that $k \in FC$ but $k+1 < \inf FA$. Let $B = C \cap F^{-1}]-\infty, k+1]$ and note that $F^{-1}]-\infty, k+1[\cap \mathrm{ext}\, B \subset \mathrm{ext}\, C \subset cl \exp C$, whence we conclude that $\mathrm{ext}\, B \subset F^{-1}(k+1)$. From (3.3) of [12] it follows that $C \cap F^{-1}k$ has an extreme point and then (again by the result established in the first paragraph of this proof) that $C \cap F^{-1}k$ has an exposed point y. Since $y \notin \mathrm{ext}\, B$, there exists $x \in C$ such that $Fx < k$ and $[x, 2y-x] \subset B$. With $D = \{t: y + t(x-y) \in C\}$, we see readily that the endpoints of $y + D(x-y)$ must lie in $\mathrm{ext}\, C$. If $\sup D = s < \infty$ we have $y + s(x-y) \in \mathrm{ext}\, B \sim F^{-1}(k+1)$, an impossibility. It follows that $\sup D = \infty$ and (since C contains no line) $\inf D > -\infty$. Now since y is an exposed point of $C \cap F^{-1}k$, there is a closed hyperplane H in $F^{-1}k$ such that H supports the set $C \cap F^{-1}k$ and $H \cap C = \{y\}$. Let J be the hyperplane $H + R(x-y)$ in E. It is easy to check that $J \cap C = y + D(x-y)$, whence $y + D(x-y)$ is an exposed ray of C. But then A intersects B and the contradiction completes the proof.

3. Exposed points and extreme points

We observed in (2.3) that for certain sets C, $\exp C$ is dense in $\mathrm{ext}\, C$. Simple examples suggest that, in fact, $\exp C$ includes "almost all" of $\mathrm{ext}\, C$ in terms of category or measure. We have no satisfactory results on this, but will proceed to some further remarks on the subject. Proof of the following is left to the reader.

(3.1) *If C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, then $\mathrm{ext}\, C$ is a G_δ set in C.*

Thus $\mathrm{ext}\, C$ is topologically complete and $\exp C$ is dense in $\mathrm{ext}\, C$. If, in addition, $\exp C$ is a G_δ set in C (or at least contains a dense G_δ subset of $\mathrm{ext}\, C$) then we can say that, in terms of category, $\exp C$ includes "almost all" of $\mathrm{ext}\, C$. Unfortunately, we have only partial results in this direction.

(3.2) *Suppose C is a closed convex body with boundary B, and C is finite-dimensional and smooth* ($\mathrm{sm}\, C = B$) *or C is two-dimensional. Then* $\exp C$ *is a G_δ set in B and* $\mathrm{ext}\, C \sim \exp C$ *is a first category F_σ set in* $\mathrm{ext}\, C$.

Proof. For the two-dimensional case, observe that each member of $\mathrm{ext}\, C \sim \exp C$ must be an endpoint of a maximal segment of B, and there are only countably many such segments.

Now suppose C is finite-dimensional and smooth, and for each $x \in B$ let H_x be the unique hyperplane which supports C at x. For each $\varepsilon > 0$, let B_ε be the set of all $x \in B$ for which the diameter of $H_x \cap B$ is at least ε. It is easy to check that each set B_ε is closed and that $\exp C = B \sim \bigcup_1^\infty B_{1/n}$. Since $\exp C$ is dense in $\mathrm{ext}\, C$, each set $B_{1/n} \cap C$ is nowhere dense in $\mathrm{ext}\, C$, and the desired conclusion follows.

In § 6 we shall construct a nonsmooth three-dimensional C for which $\exp C$ is not a G_δ set. However, the possibility remains that $\exp C$ may always contain a G_δ set dense in $\mathrm{ext}\, C$, so the following question is still open.

(3.3) Problem. *If C is a finite-dimensional closed convex body, must* exp C *be of the second category in* ext C?

We show next that even for a two-dimensional C it is possible for ext $C \sim$ exp C to be dense in ext C.

(3.4) Example. *For $n \geq 2$, there is in E^n a smooth bounded convex body C such that* ext C *is closed and* ext $C \sim$ exp C *is dense in* ext C.

Proof. Since it is easy to construct such a set in E^{k+1} from one in E^k, we restrict our attention to the case $k=2$. An argument similar to but a bit simpler than the one below will produce an unbounded C with the stated properties.

Let I_α be a sequence of nondegenerate pairwise disjoint closed intervals whose union is dense in $]0, 1[$. In any of various ways (which we leave to the reader), one can establish the existence of a continuous monotone map F of $[0, 1]$ onto $[-1, 0]$ such that $F0 = -1$, $F1 = 0$, and $\{I_i\}_1^\infty$ is the collection of all nondegenerate level sets of F (members of $\{F^{-1}t: t \in [-1, 0]\}$). Let g be a continuous strictly monotone map of $[-1, 0[$ onto $[0, \infty[$ with $g(-1) = 0$ and $\int_0^1 (g \circ F) < \infty$. (Existence of such a g will be established below.) For each $x \in [0, 1]$, let $hx = \int_0^x (g \circ F)$. Then h is differentiable on $[0, 1[$ and continuous on $[0, 1]$, with $h' = g \circ F$, monotone, so h is convex. And since $\{I_i\}_1^\infty$ is the set of nondegenerate level sets of h', it is clear that with $J = \{(x, y): x \in [0, 1], y \geq Fx\} < E^2$, ext J and exp J are merely the restrictions of F to the complements in $[0, 1]$ of $\bigcup_1^\infty \operatorname{int} I_i$ and $\bigcup_1^\infty I_i$ respectively. Then with $C = \{(x, y): |x| \leq 1, |y| \leq |Fx|$, it is easy to check that C has the desired properties.

To complete the proof of (3.4), we need merely produce g as described. Since $F \bigcup_1^\infty I_i$ is countable, there is a sequence s_α in $[0, 1[\sim F \bigcup_1^\infty I_i$ such that $s_0 = 0$ and always $s_k > s_{k-1} > 1 - 2^{-2k}$. Then Fs_α is a strictly increasing sequence in $[0, 1[$ and there is a continuous strictly monotone function g on $[-1, 0[$ to $[0, \infty[$ such that always $g(Fs_k) = 2^k$. We then have

$$\int_0^1 (g \circ F) < \sum_1^\infty g(Fs_k)(s_k - s_{k-1}) < \sum_1^\infty 2^k (1 - s_{k-1}) < \sum_1^\infty 2^{-k} < \infty.$$

Although exp C may be a proper dense subset of ext C, in the two-dimensional case it cannot be a proper dense subset of the boundary B of C, for ext C is closed for two-dimensional C, and ext $C = B$ implies exp $C = B$. However, we produce in § 6 a three-dimensional convex body C for which $B \sim$ ext C, ext $C \sim$ exp C, and exp C are all dense in B.

Let us next consider a convex cone C with vertex $\emptyset$. Clearly no point other than $\emptyset$ is an extreme point of C, and $\emptyset \in$ ext C if and only if $C \cap -C = \{\emptyset\}$. When must $\emptyset$ be an exposed point of C?

From (2.5) and (2.7) of [*11*] we obtain

(3.5) *Suppose C is a closed convex cone with vertex $\emptyset$ in the locally convex Hausdorff linear space E. Suppose $\emptyset$ is an extreme point of C and either C is locally compact or E is separable and normable. Then $\emptyset$ is an exposed point of C.*

For E normable but nonseparable, the conclusion need not hold, as is seen by inspection of the positive cones in the spaces $c_0\aleph_1$ and $l^p\aleph_1$ for $p\in]1,\infty[$. This suggests

(3.6) Problem. *Must each nonseparable normed linear space contain a closed convex cone C such that $\emptyset\in \operatorname{ext} C\sim \exp C$?*

The following result is somewhat related to the previous discussion and will be used also in § 4.

(3.7) *In each infinite-dimensional separable normed linear space E there is a closed convex body K which has no exposed point and just one extreme point.*

Proof. Let H be a hyperplane through $\emptyset$ in E, and Rz a line supplementary to H in E. We wish to construct a total sequence $\{F_n\}_0^\infty$ of continuous linear functionals on H such that $\{F_n\}_1^\infty$ is not total and such that for each $k\neq 0$, $\liminf_{n\to\infty}\{\|x\|: F_0x=k, F_nx=0\}=\infty$. Suppose for the moment that this has been done, and let us see how to proceed.

For $x\in H$, let $\varphi_0x=0$ when $F_0x\leq 0$, $\varphi_0x=(F_0x)^2$ when $F_0x\geq 0$, and $\varphi_nx=|F_nx|$ for $n\geq 1$. Let $\{a_n\}_0^\infty$ be a sequence of positive numbers such that $\sum_0^\infty a_i\varphi_ix\leq 1$ whenever $\|x\|\leq 1$, and let $g=\sum_0^\infty a_i\varphi_i$. Then g is a continuous convex function on H and the set $K=\bigcup_{x\in H}(\{x\}+[gx,\infty[z)$ is a closed convex body in E.

Observe that if $x\in H\sim\{\emptyset\}$ then the segment $]-x,x[$ crosses at least one of the hyperplanes $F_j^{-1}0$, for $\{F_n\}_0^\infty$ is total. From the definition of φ_j we see that φ_j is not linear on $]-x,x[$, so neither is g. Since g is not linear on any open segment through $\emptyset$, we conclude that $\emptyset$ is an extreme point of K.

To show that K has no extreme point other than $\emptyset$, we show that for each $y\in H\sim\{\emptyset\}$, g is linear on some open segment through y. When $F_0y=0$, this is obvious, for each φ_n is then linear on the entire ray $]0,\infty[\,y$. On the other hand, if $F_0y=k\neq 0$, it follows from one of the conditions on $\{F_n\}_0^\infty$ that the set $J=\{j: F_jy=0\}$ is finite and $y\notin cl\bigcup_{k\notin J}F_k^{-1}0$. Thus y is an inner point of a segment which lies in $F_0^{-1}k\cap\bigcap_{j\in J}F_j^{-1}0$ and misses $\bigcup_{k\notin J}F_k^{-1}0$. Each φ_n is linear on this segment, so g must be also.

Now since $\{F_n\}_1^\infty$ is not total, there exists $u\in H$ such that $F_0u\neq 0$ but $F_nu=0$ for all $n\geq 1$. And $g|\mathrm{R}u=\varphi_0|\mathrm{R}u$, which is differentiable on $\mathrm{R}u$ and is linear on either $[0,\infty[\,u$ or $]-\infty,0]\,u$. It follows that $\emptyset$ is not an exposed point of K, and to complete the proof of (3.7) it remains only to produce $\{F_n\}_0^\infty$ as described.

Let P be a hyperplane through $\emptyset$ in H and Rq a line supplementary to P in H, so that each point x of P has a unique expression in the form $x=x_1+x_2q$, with $x_1\in P$ and $x_2\in R$. Let $\{u_i\}_1^\infty$ be a total sequence of continuous linear

functionals on P, each of norm one. Now for each $x \in H$, let $F_0 x = x_2$ and let $F_n x = u_n x_1 + n x_2$ for $n \geq 1$. It is easy to check that $\{F_n\}_1^\infty$ has the desired properties, and the proof of (3.7) is complete.

4. Exposed points and smooth points

An alternative approach to the existence of exposed points is by way of a dual relationship between the operators "exp" and "sm", quite analogous to that between the notions of strict convexity and smoothness for normed linear spaces. These and similar dualities are discussed in [*3*, *4*, *5*, *8*, *16*]. The duality between "exp" and "sm" is indicated in the following proposition, which employs the terminology of [*3*].

(4.1) *Suppose the real linear spaces E and F are dual with respect to a bilinear form $\langle , \rangle$. Suppose A is an E-closed convex subset of F, with $\emptyset \in A$, A^0 is its polar $\{x \in E: \langle x, a \rangle \leq 1$ for all $a \in A\}$, $u \in A$, and the set $u^* = \{x \in A^0: \langle x, u \rangle = 1\}$ is nonempty. Then $u \in \operatorname{sm} A$ implies that u^* intersects $\exp A^0$, and $u \in \exp A$ implies that u^* intersects $\operatorname{sm} A^0$.*

Proof. If $u \in A$ and $x \in u^*$, the set $\{v \in F: \langle x, v \rangle = 1\}$ is an E-closed hyperplane in F which supports A at u. With $u \in \operatorname{sm} A$, we conclude that u^* consists of a single point z and thus the set $\{y \in E: \langle y, u \rangle = 1\}$ is an F-hyperplane which supports A^0 and intersects A^0 only at z. Thus $u^* < \exp A^0$.

Now suppose $u \in \exp A$, so there exists $y \in E \sim \{\emptyset\}$ having $\langle y, v \rangle \leq \langle y, u \rangle$ for all $v \in A$, with equality only for $v = u$. Since $\emptyset \in A$, $\langle y, u \rangle \geq 0$. If $\langle y, u \rangle > 0$, let $z = (\langle y, u \rangle)^{-1} y$. If $\langle y, u \rangle = 0$, pick $x \in u^*$ and let $z = x + y$. In either case it can be verified that $\langle z, v \rangle \leq 1 = \langle z, u \rangle$ for all $v \in A$, with equality only for $v = u$. It follows that $z \in u^* \cap \operatorname{sm} A^0$ and the proof of (4.1) is complete.

In applying (4.1), the following remark will be useful.

(4.2) *Suppose E and F are dual under a bilinear form $\langle , \rangle$ and C is an F-compact convex subset of E with $\emptyset \in C$. Then for each $u \in C^0 \sim \operatorname{core} C^0$ there exists $x \in C$ with $\langle x, u \rangle = 1$.*

Proof. Observe first that since C is F-bounded, $\emptyset \in \operatorname{core} C^0$. Now consider $u \in C^0 \sim \operatorname{core} C^0$ and n a positive integer. Then $\left(1 + \frac{1}{n}\right) u \notin C^0$ and since C^0 is E-closed and convex it follows by the separation theorem that there exists $x_n \in E$ with $\left\langle x_n, \left(1 + \frac{1}{n}\right) u \right\rangle = 1$ and $\langle x_n, v \rangle \leq 1$ for all $v \in C^0$. But then of course $x_n \in (C^0)^0 = C$, and by compactness of C, the sequence x_α must have a cluster point $x \in C$. Since $\langle x_n, u \rangle = n/(n+1)$, we see that $\langle x, u \rangle = 1$ and the proof is complete.

In conjunction with (4.1) we employ the following slight extension of MAZUR's smoothness theorem [*13*], which can be proved by an easy adaptation of his argument.

(4.3) *Suppose P is a closed convex body in a topological linear space G, B is its boundary, H is a set of continuous linear functionals on G, and J is the set of points in B at which P can be supported by more than one H-hyperplane*

(i.e., a hyperplane of the form $h^{-1}c$ for $h \in H$). Suppose there is a countable subset of G which is not contained in any intersection $(h^{-1}0) \cap (k^{-1}0)$ for $h, k \in H$. Then J is of the first category in B.

We use also the following result, stated by ARMS [1]:

(4.4) *Suppose G is a uniformly smooth Banach space, H is its conjugate space, and P, B, and J are as in* (4.3). *Then J is of the first category in B.*

A space is uniformly smooth in the sense of ARMS [1] if and only if it is uniformly flattened in the sense of DAY [4], and this in turn is equivalent to the condition that its conjugate space is uniformly convex ([4], p. 144 of [3]).

We now deduce an extension of (2.1).

(4.5) Theorem[3]. *Suppose C is a weakly compact convex subset of a Banach space E, and E is either separable or uniformly convex. Then cl conv* $\exp C = C$.

Proof. We assume without loss of generality that $\emptyset \in C$. Let F be the conjugate space of E and use subscripts to indicate the various topologies on E and F (n for the norm topology, w for the weak topology, etc.). Then E_w and F_{w^*} are dual in the usual way, so that (4.1) will apply. Let $K = cl$ conv $\exp C$, $P = C^0$, and $Q = K^0$. Then P is a w^*—closed convex subset of F (hence is also n-closed), and since C is bounded the neutral element of F must be n^*-interior to P. Now with B denoting the n^*-boundary of P, B must be n^*-complete, and from (4.3) and (4.4) we see that the set J of all points of B at which P can be supported by more than one E-hyperplane is of the first category in B_{n^*}. Thus $B \sim J$ is n^*-dense in B.

Since $C = P^0$ and $K = Q^0$, to complete the proof it suffices to show that $P = Q$. Suppose $P \neq Q$. Then since $P \subset Q$, both sets are convex, and P has nonempty n^*-interior, there exists $F \in (B \sim J) \cap \operatorname{int}_{n^*} Q$. By (4.2) it follows that $Fx = 1$ for some $x \in C$, and thus $F \in \operatorname{sm} P$ (relative to support by E-hyperplanes). Now [in the notation of (4.1)] we have $F^* = \{x\}$, and $x \in \exp P^0 = \exp C \subset K$. But since $[\emptyset, F] \subset \operatorname{int}_{n^*} Q$, there exists $\delta > 1$ for which $\delta F \in Q$ and we have $\delta F x > 1$, a contradiction since $x \in K$ and $\delta F \in K^0$. The proof is complete.

The hypotheses of (4.5) seem unnecessarily strong, but even the following appears to be open:

(4.6) Problem. *Suppose C is a bounded closed convex body in a reflexive Banach space. Must C have an exposed point, or a smooth point?*

This may be related to the problem [5] of whether every reflexive space is strictly convexifiable, or smoothable.

It would be nice to have a useful characterization of those locally convex Hausdorff linear spaces in which "every compact convex subset is the closed convex hull of its set of exposed points". Some condition rather close to normability may be needed. In any case, metrizability is inadequate even in the separable case, for in the locally convex separable metrizable space $R^{\aleph_0}$, the compact cube $[-1, 1]^{\aleph_0}$ has no exposed points. The proof of (4.5) shows that

[3] See footnote number 2.

the space $E^*_{w^*}$ has the property "..." for each separable Banach space E, and separability seems essential here, for the space $(l^1 \aleph_1)^*_{w^*}$ lacks the property.

From (4.5) and the converse to the KREIN-MILMAN theorem ([2], or (1.1) of [12]) we conclude

(4.7) *With C and E as in* (4.5), exp C *is weakly dense in* ext C. *If C is norm-compact, then* exp C *is norm-dense in* ext C.

When C is merely weakly compact, exp C need not be norm-dense in ext C. To see this, let E be an infinite-dimensional separable reflexive space, K as in (3.7), p the lone extreme point of K, and C the intersection of K with the unit cell centered at p. Alternatively, carry out the same construction with $p = \emptyset$ and K the positive cone in $l^2 \aleph_1$.

5. Further remarks and problems

This section contains a few remarks which don't seem to fit in anywhere else. We first mention the possibility of defining a hierarchy of notions of exposed point, weaker than our present notion but still stronger than the notion of extreme point. The weakest of these is as follows: a point p of a convex set C is an *algebraically exposed point* of C provided for each two-dimensional flat V through p, p is an exposed point in V of $C \cap V$ (equivalently, $C \cap V$ is supported in V by a line L such that $L \cap C \cap V = \{p\}$). The following problem seems to be open.

(5.1) Problem. *Must a compact convex set (in a Hausdorff linear space) have an algebraically exposed point?*

Even in locally convex spaces, (5.1) is open, as the extreme points produced by the usual construction need not be algebraically exposed. And for spaces which are not locally convex, (5.1) is unsolved even with "algebraically exposed" replaced by "extreme".

Even for a compact convex subset of Hilbert space, an algebraically exposed point need not be a support point, and can be a support point without being exposed. The second type of behavoir is exhibited also by the origin relative to the positive cone in the space $l^2 \aleph_1$. However, we do have the following result, whose proof is quite similar to that of (2.7) in [11].

(5.2) Theorem. *For a closed convex body in a separable normed linear space, each algebraically exposed point is actually exposed.*

For a closed convex body C in a finite-dimensional normed linear space E, it is known that ext $C \subset$ su C and that su C is empty only when $C = E$. Known examples [3] show that neither of these statements need hold when E is infinite-dimensional. The example given below handles both of these matters, and appears to be more perspicuous than previous examples, though similar to them.

(5.3) Example. *Let T be the linear transformation of l^2 into itself with $(Tx)^i = 2^{-i} x^i$ for each $x = (x^1, x^2, \ldots) \in l^2$. Let C be the unit cell $\{x : \|x\| \leq 1\}$ of l^2 and S the unit sphere $\{x : \|x\| = 1\}$. Let L be the linear set of all $x \in l^2$ having $\sum_{i=1}^{\infty} (2^i x^i)^2 < \infty$, and M a dense linear subspace of l^2 which is supplementary to L.*

Then TC is a compact convex subset of l^2 whose set of extreme points is TS and whose set of support points is $T(S \cap L)$. And $T(C \cap M)$ is a precompact closed subset of the prehilbert space TM, whose set of extreme points is $T(S \cap M)$ and whose set of support points is empty.

Proof. Since C is weakly compact, TC is also weakly compact and hence closed in l^2. And TC is a subset of the compact parallelotope $\{x: |x^i| \leq 2^{-i}\}$, so TC must be compact. Since T is linear, it is evident that TC is convex and has TS as its set of extreme points. Now suppose TC can be supported at the point Tq, where $q \in C$. Then there exists $y \in l^2$ such that $\sup_{x \in TC} (y, x) = (y, Tq) = 1$. And $(y, Tx) | x \in l^2$ is a continuous linear functional on l^2 whose maximum value on C is 1 and is attained at q, whence $(y, Tx) = (q, x)$ for all $x \in l^2$. Thus $\sum y^i 2^{-i} x^i = \sum q^i x^i$ for all x, and it follows that $y^i 2^{-i} = q^i$. But then $\sum (2^i q^i)^2 = \sum (y^i)^2 < \infty$, whence $q \in L$ and $Tq \in TL$. Thus every support point of TC is a point of $T(S \cap L)$, and since the reverse inclusion is easily established, the first assertion of (5.3) has been proved.

Now since $T(C \cap M) = TC \cap TM$ and TC is compact, it is clear that $T(C \cap M)$ is a precompact convex subset of TM, closed relative to TM. It remains to show that in TM, $T(C \cap M)$ has no support points. If a non-trivial continuous linear functional on TM attains a maximum on $T(C \cap M)$, then it determines such a functional f on l^2. And since $T(C \cap M)$ is dense in $TC \cap M$, this implies that some point of TM is a support point of TC, a contradiction completing the proof.

We remark that the only points $q \in S$ such that $T^n q$ is a support point of $T^n C$ for each n, are those which have only finitely many non-zero coordinates. We note also that for each $q \in TS$, there is a linear functional f on l^2 such that $\sup_{TC} f = fq = 1$. The point is that this f can be continuous only for $q \in T(S \cap L)$.

The following problem is open.

(5.4) Problem. *Suppose C is a bounded closed convex subset of a Banach space. Must C be supported at some point?*

Even in E^3 (and to some extent in the plane), there are many unsolved problems about the topological structure of convex bodies relative to the operators "ext", "exp", and "sm". In infinite-dimensional spaces, there is much to be learned about the operator "su" as well. We cite the following problem as typical.

(5.5) Problem. *Find a useful and simple characterization of the class $\mathfrak{X}$ of all subsets X of the unit sphere S in E^3 such that there is a homeomorphism of S onto the boundary of a convex body C mapping X onto* ext C.

A relevant result appears in [9]. It is known that each member of $\mathfrak{X}$ is a G_δ set, and that $\mathfrak{X}$ includes each closed subset of S which has at least four points.

There are similar problems involving the other operators mentioned above, and their inter-relationships.

6. A method of construction

We here develop some machinery leading to construction of two examples mentioned in § 3. Rather than working explicitly with convex bodies, we deal instead with convex functions, the idea being to determine an n-dimensional convex function by means of a one-parameter family of $(n-1)$-dimensional convex functions. The general procedure is quite similar to that in the case $n=1$ (the classical convex function of a single real variable). Complications arising in the infinite-dimensional case are not serious, but do seem to justify supplying the proofs in detail. And looking to future applications, it seems desirable to proceed with more generality than is essential for present purposes.

With R denoting the real number field, R^+ will denote $R\cup\{\infty\}$ with the usual arithmetic conventions and, in addition, $0\cdot\infty=0$. An *affine functional* is a function f such that $rng\, f\subset R$, $dmn\, f$ is a flat in some linear space, and $f(rx+(1-r)y)=r(fx)+(1-r)(fy)$ for all $r\in R$, $x, y\in dmn\, f$. A *convex* (resp. *convex*$^+$) function γ is one for which $rng\,\gamma\subset R$ (resp. R^+), $dmn\,\gamma$ is a convex subset of some linear space, and γ is subaffine in the usual way, i.e., $\gamma(rx+(1-r)y)\leq r(\gamma x)+(1-r)(\gamma y)$ for all $r\in[0,1]$, $x, y\in dmn\,\gamma$.

We need the following result, which should be compared with (12.8) of [6] and (2.3) of [7]. (The proof of the latter shows that on each linear space of uncountable dimension there is a positively homogeneous convex$^+$ function which majorizes no affine functional, even though its restriction to each line is lower semicontinuous.)

(6.1) *On a locally convex Hausdorff linear space E, a convex$^+$ function is lower semicontinuous if and only if it is the supremum of a family of continuous affine functionals.*

Proof. Since the "if" part is clear, let us consider a lower semicontinuous convex$^+$ function γ on E, a point $p\in E$, and a number $c<\gamma p$. We wish to produce a continuous affine functional f on E such that $f\leq\gamma$ and $fp>c$. If $\gamma\equiv\infty$ on $E\sim\{p\}$, this is trivial, so we assume that $\gamma q<\infty$ for some $q\in E\sim\{p\}$. Now in $E\times R$, let $K=\{(x,r): r\geq\gamma x\}$, so that K is closed and convex. For each $d\in R$, let S_d denote the segment $[(p,c),(q,d)]$. We wish to show that some S_d misses K. Suppose not. Then there are a sequence t_α of numbers in $[0,1]$ and a sequence e_α of numbers in $]-\infty,0]$ such that $t_\alpha\to t\in[0,1]$, $e_\alpha\to-\infty$, and $(1-t_i)c+t_ie_i\geq\gamma\big((1-t_i)p+t_iq\big)$ for each i. If $t\neq 0$, $t_\alpha e_\alpha\to-\infty$ and from lower semicontinuity of γ we conclude that

$$\gamma\big((1-t)p+tq\big)=-\infty,$$

an impossibility. If $t=0$, then $\gamma p\leq c+\liminf t_\alpha e_\alpha\leq c$, contradicting the fact that $c<\gamma p$. Thus there exists $d\in R$ for which $K\cap S_d=\Lambda$.

With $K\cap S_d=\Lambda$, the separation theorem (9.9) of [6] guarantees the existence of a continuous linear functional F on $E\times R$ for which $\sup_{S_d}F<\inf_K F$. Since $\gamma q<\infty$, we have $(q,\gamma q)\in K$, $F(q,d)<F(q,\gamma q)$, and thus $F(\emptyset,1)>0$, whence it follows as in (12.1) of [6] that the equation $F(x,fx)=\inf_K F(x\in E)$

determines an affine functional f on E such that $f \leq \gamma$ and $fp > c$. And since $F(x, fx) = F(x, 0) + (fx)\,F(\emptyset, 1)$, the simple expression for fx in terms of $F(x, 0)$ can be used to deduce continuity of f from that of F. The proof of (6.1) is complete.

The following remark is also useful.

(6.2) *Suppose γ is a lower semicontinuous convex$^+$ function on a topological linear space E, and $\{x: \gamma x < \infty\}$ is bounded. Then $\inf(\gamma - f) > -\infty$ for each continuous affine functional f on E.*

Proof. It suffices to show that $\inf \gamma > -\infty$ for each γ as described, for $\gamma - f$ is also such a function. If $\gamma \equiv \infty$ there is no problem, so suppose $\gamma x < \infty$ for some $x \in E$ and $\gamma y_\alpha \to -\infty$ for some sequence y_α in E. There is a sequence t_α in $]0, 1[$ such that $t_\alpha \to 0$ and $t_\alpha(\gamma y_\alpha) \to -\infty$. By convexity,

$$\gamma\left((1 - t_\alpha)\,x + t_\alpha y_\alpha\right) \leq (1 - t_\alpha)\,\gamma x + t_\alpha(\gamma y_\alpha) \to -\infty.$$

But y_α is bounded, so $t_\alpha y_\alpha \to \emptyset$ and from lower semicontinuity we conclude that $\gamma x = -\infty$, a contradiction completing the proof.

Now let us fix a locally convex Hausdorff linear space E, a closed hyperplane H through $\emptyset$ in E, and a line Rp supplementary to H in E. Each point $x \in E$ has a unique expression in the form $x = x_1 + x_2 p$ with $x_1 \in H$ and $x_2 \in R$. For $J \subset R$ or $J \in R$, we write $H_J = H + Jp$. Let Γ denote the set of all lower semicontinuous convex$^+$ functions γ such that for some number $\gamma' \in R$, $dmn\,\gamma = H_{\gamma'}$ and $\inf(\gamma - f) > -\infty$ for each continuous affine functional f on $H_{\gamma'}$. For $\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\alpha' \neq \beta'$, $A_{\alpha,\beta}$ will denote the set of all continuous affine functionals f on E such that $f \leq \alpha \cup \beta$ and $\inf(\alpha - f) = 0 = \inf(\beta - f)$. The function $\sup A_{\alpha,\beta}$ will be denoted by $\sigma_{\alpha,\beta}$. [For functions u and v, $u - v$ is the function such that $dmn\,(u - v) = dmn\,u \cap dmn\,v$ and $(u - v)\,x = ux - vx$ for each $x \in dmn\,(u - v)$. We write $u \leq v$ to mean that $ux \leq vx$ for all $x \in dmn\,u \cap dmn\,v$. Other similar conventions are employed throughout this section.]

(6.3) *If $\alpha, \beta, \in \Gamma$ with $\alpha' \neq \beta'$, then $\sigma_{\alpha,\beta}$ is a lower semicontinuous convex$^+$ function on E and $\sigma_{\alpha,\beta} \geq \alpha \cup \beta$.*

Proof Clearly $\sigma_{\alpha,\beta}$ is a lower semicontinuous convex$^+$ function, for it is the supremum of a family of continuous affine functionals. To prove that $\sigma_{\alpha,\beta} \geq \alpha \cup \beta$, it suffices to show that if $y \in H_{\alpha'}$ and $c < \alpha y$, there exists $f \in A_{\alpha,\beta}$ with $fy > c$ (for a similar argument handles points of $H_{\beta'}$). By (6.1), $H_{\alpha'}$ admits a continuous affine functional g such that $gy > c$ and $g \leq \alpha$. For each $x \in H_{\beta'}$, let $hx = g(x + (\alpha' - \beta')\,p)$, so that h is the natural "translate" of g to $H_{\beta'}$. Let $d = \inf(\alpha - g) \geq 0$ and $e = \inf(\beta - h) > -\infty$. Now for each $x \in E$, let

$$fx = g\left(x + (\alpha' - x_2)\,p\right) + (\mu x_2 + \nu),$$

where μ and ν are determined by the conditions that $\mu\alpha' + \nu = d$ and $\mu\beta' + \nu = e$. The function f is easily seen to have the desired properties, and the proof of (6.3) is complete.

(6.4) *Suppose* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *with* $\alpha' < \beta'$. *Let* U *be the set of all convex*$^+$ *functions* u *on* E *such that* $\alpha \leq u \leq \beta$, V *the set of all lower semicontinuous convex*$^+$ *functions* v *on* E *such that* $v \leq \alpha \cup \beta$, *and* W *the set of all convex*$^+$ *functions* w *on* E *such that* $\alpha \geq w \geq \beta$. *Then* $\sigma_{\alpha,\beta}$ *coincides with* $\inf U$ *on* $H_{]-\infty,\alpha']}$, *with* $\sup V$ *on* $H_{[\alpha',\beta']}$, *and with* $\inf W$ *on* $H_{[\beta',\infty[}$.

Proof. Let $\xi = \inf U$, $\eta = \sup V$, $\zeta = \inf W$. From (6.3) it is evident that on all of E, $\sigma_{\alpha,\beta}$ is $\geq \xi$, $\leq \eta$, and $\geq \zeta$. We wish to show that on certain parts of E, the reverse inequalities hold. The arguments concerning ξ and ζ are essentially identical, so we treat only the first of these. Suppose there exists $x \in E$ with $x_2 \leq \alpha'$ and $\sigma_{\alpha,\beta} x > \xi x$. Then there exist $f \in A_{\alpha,\beta}$ and $u \in U$ such that $fx - ux = \varepsilon > 0$. Let $r = (\beta' - \alpha)/(\beta' - x_2) \in]0, 1]$. Since $\inf(\beta - f) = 0$, there exists $z \in H_{\beta'}$ with $\beta z - fz = \delta < r\varepsilon/(1-r)$. Let $y = rx + (1-r)z$, so that $y_2 = \alpha'$. Then since f is affine and u is convex$^+$ we have

$$\begin{aligned} fy = r(fx) + (1-r)(fz) &\geq r(ux + \varepsilon) + (1-r)(\beta z - \delta) \\ &\geq r(ux) + (1-r)uz + [r\varepsilon - (1-r)\delta] \\ &> u\big(rx + (1-r)z\big) = uy \geq \alpha y \geq fy, \end{aligned}$$

a contradiction showing that $\sigma_{\alpha,\beta} = \xi$ on $H_{]-\infty,\alpha')]}$.

To show that $\sigma_{\alpha,\beta} = \eta$ on $H_{[\alpha',\beta']}$, it suffices in view of (6.1) to show that if g is a continuous affine functional on E such that $g \leq \alpha \cup \beta$, then $g \leq \sigma_{\alpha,\beta}$ on $H_{[\alpha',\beta']}$. Let $d = \inf(\alpha - g)$ and $e = \inf(\beta - g)$. Then $d \geq 0 \leq e$, and if f be defined as in the proof of (6.3), it is easy to check that $f \in A_{\alpha,\beta}$ and $g \leq f \leq \sigma_{\alpha,\beta}$ on $H_{[\alpha',\beta']}$, thus completing the proof of (6.4).

(6.5) *For* $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Gamma$ *with* $\alpha' < \beta' < \gamma'$, *the following three inequalities are equivalent:* $\alpha \geq \sigma_{\beta,\gamma}$; $\beta \leq \sigma_{\alpha,\gamma}$; $\gamma \geq \sigma_{\alpha,\beta}$. *Equivalence holds also for the corresponding strict inequalities.*

Proof. We show only that $\alpha \geq \sigma_{\beta,\gamma}$ implies $\beta \leq \sigma_{\alpha,\gamma}$, for the other implications proceed similarly. If $\alpha \geq \sigma_{\beta,\gamma}$, then $\sigma_{\beta,\gamma}$ is a convex$^+$ function which is $\leq \alpha$ and $\geq \beta$ [for $\beta \cup \gamma \subset \sigma_{\beta,\gamma}$ by (6.3)], so it follows by (6.4) that $\sigma_{\beta,\gamma} \geq \sigma_{\alpha,\beta}$ on $H_{[\tau(\beta),\infty[}$. Since $\beta \subset \sigma_{\alpha,\beta}$, this completes the proof.

A subfamily Θ of Γ will be called *admissible* [resp. *strictly admissible*] provided $\alpha = \beta$ whenever $\alpha' = \beta'$ and $\{\alpha, \beta\} \subset \Theta$, and $\beta \leq \sigma_{\alpha,\gamma}$ [resp. $\beta < \sigma_{\alpha,\gamma}$] whenever $\alpha' < \beta' < \gamma'$ and $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Theta$. When $B \subset \Phi \subset \Gamma$, B is said to be *adjacent* in Φ provided there is no $\varphi \in \Phi$ such that φ' lies between two members of the set $\{\beta' : \beta \in B\}$ without actually being a member of this set (i.e., $\{\varphi' : \varphi \in \Phi\} \cap \operatorname{conv}\{\beta' : \beta \in B\} = \{\beta' : \beta \in B\}$).

(6.6) *A finite subfamily* Θ *of* Γ *is admissible* [*resp. strictly admissible*] *if (and obviously only if)* $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ *is admissible* [*resp. strictly admissible*] *whenever* $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ *is an adjacent subset of* Θ.

Proof. We treat only the case of admissibility, since that of strict admissibility is similar. Consider first the situation in which $\Theta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ with $\alpha' < \beta' < \gamma' < \delta'$. The hypothesis is that $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ and $\{\beta, \gamma, \delta\}$ are admissible; to establish admissibility of $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ we must prove that of $\{\alpha, \beta, \delta\}$ and

$\{\alpha, \gamma, \delta\}$. We consider only the second of these, for the first can be treated similarly. We wish to show that $\alpha \geq \sigma_{\gamma,\delta}$. Suppose not. Then there exists $g \in A_{\gamma,\delta}$ and $x \in H_{\alpha'}$ such that $gx > \alpha x$. Since $\{\beta, \gamma, \delta\}$ is admissible, we know that $\beta \geq \sigma_{\gamma,\delta}$ and hence $g \leq \beta$. Let $c = \inf(\beta - g)$ and for each $x \in E$ let

$$fx = gx_1 + c(x_2 + \gamma')/(\gamma' - \beta').$$

It can be verified that $f \in A_{\beta,\gamma}$ and $f \geq g$ on $H_{\alpha'}$. But then $f \leq \sigma_{\beta,\gamma}$ and $fx > \alpha x$, while by admissibility of $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ we have $\alpha \geq \sigma_{\beta,\gamma}$. The contradiction shows that $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ is admissible.

Now let S_n be the assertion that (6.6) is true whenever Θ has no more than n members. We have just proved S_4. Suppose S_n has been proved for all $n < k$ (with $k \geq 5$), and consider a k-membered $\Theta = \{\alpha_i\}_1^k$ with $\alpha_1' < \alpha_2' < \cdots < \alpha_k'$. By the inductive hypothesis, the sets $\{\alpha_i\}_1^{k-1}$ and $\{\alpha_i\}_2^k$ are both admissible; to complete the proof we must show that each set $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_k\}$ is admissible. But admissibility of $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_k\}$ follows from S_4 as applied to $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_j, \alpha_k\}$ when $j > 2$ and $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_{k-1}, \alpha_k\}$ when $j < k-1$, so the proof of (6.6) is complete.

For finite $\Theta \subset \Gamma$, let $\sigma_\Theta = \sup\{\sigma_{\alpha,\beta}\colon \text{adjacent } \{\alpha, \beta\} \subset \Theta\}$.

(6.7) *Suppose Θ is finite and admissible, and V_Θ is the set of all lower semicontinuous convex$^+$ functions on E which are $\leq \cup\Theta$. Then $\sigma_\Theta > \cup\Theta$, $\sup V_\Theta = \sigma_\Theta$ on $H_{\mathrm{conv}\{\vartheta'\colon \vartheta \in \Theta\}}$, and $\sup V_\Theta = \infty$ elsewhere.*

Proof. This is a straightforward application of results (6.3) to (6.6).

(6.8) *A subfamily Θ of Γ is admissible if and only if $\cup\Theta$ is contained in a convex$^+$ function on E. And Θ is strictly admissible if and only if $\cup\Theta$ is contained in a convex$^+$ function γ on E such that $\gamma(tx + (1-t)y) < t\gamma x + (1-t)\gamma y$ whenever $t \in]0, 1[$, $\{x, y\} \subset E$ with $x_2 \neq y_2$, and $\gamma(tx + (1-t)y) < \infty$.*

Proof. Suppose first that Θ is admissible, and for each finite $\Phi \subset \Theta$, let τ_Φ be the largest lower semicontinuous convex$^+$ function on E which is $\leq \cup\Phi$. As directed by inclusion on Φ, the family $\{\tau_\Phi\colon \text{finite } \Phi \subset \Theta\}$ is a decreasing net of convex$^+$ functions on E, with always $\tau_\Phi > \cup\Phi$ by (6.7). It is easy to check that the pointwise limit of this net is a convex$^+$ function on E which contains $\cup\Theta$.

Now suppose conversely that $\cup\Theta$ is contained in a convex$^+$ function w on E, and consider $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Theta$ with $\alpha' < \beta' < \gamma'$. To establish admissibility of Θ, we wish to show that $\gamma \geq \sigma_{\alpha,\beta}$. But $\alpha \geq w \geq \beta$, so it follows from (6.4) that $\sigma_{\alpha,\beta} \leq w$; and since $w > \gamma$, we have $\gamma \geq \sigma_{\alpha,\beta}$.

The case of strict admissibility offers no new difficulty and is left to the reader.

The following result expresses some of the facts already proved in a form which is especially useful for constructing convex functions.

(6.9) *Suppose Θ is a finite admissible subfamily of Γ, and t is a real number with $t \in \{\vartheta'\colon \vartheta \in \Theta\}$. Let $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ be adjacent in Θ and such that $\alpha' < \beta' < t < \gamma' < \delta'$. Then $\sigma_{\alpha,\beta} \leq \sigma_{\beta,\gamma} \geq \sigma_{\gamma,\delta}$ on H_t. If μ is an arbitrary member of Γ such that $\mu' = t$ and $\max(\sigma_{\alpha,\beta}, \sigma_{\gamma,\delta}) \leq \mu \leq \sigma_{\beta,\gamma}$, then $\Theta \cup \{\mu\}$ is admissible. This assertion holds*

also for strict admissibility, with strict inequalitis throughout. (If certain of the functions α, β, γ, and δ do not exist, the corresponding restrictions are regarded as vacuous. Thus, for example, if $t<\vartheta'$ for all $\vartheta \in \Theta$, admissibility of $\Theta \cup \{\mu\}$ repuires merely that $\sigma_{\gamma,\delta} \leq \mu$.)

We proceed now to construct the examples mentioned in § 3, making implicit use of the machinery just developed.

(6.10) Example. *There is in E^3 a compact convex body C for which* exp C *is not a G_δ set.*

Proof. Let E^3 be coordinatized in the usual way, and let E denote the plane $\{x: x^3=0\}$. Let D be the semidisc $\{x: \|x\| \leq 1,\ x^2 \geq 0,\ x^3=0\}$ and J the open semicircle $\{x: \|x\|=1,\ x^2>0,\ x^3=0\}$. Suppose φ is a lower semicontinuous convex function on D with $\varphi \equiv 0$ on J, and K_φ is the set $\{x: (x^1, x^2, 0) \in D,\ x^3 \in [\varphi(x^1, x^2, 0), 1]\}$. Then K_φ is a compact convex body in E^3, and we shall show that for an appropriately constructed φ, exp K_φ is not a G_δ set.

For each $r \in]-1, 1[$ and positive integer n, let r^+ be the point $(r, (1-r^2)^{\frac{1}{2}}, 0)$, $L(r)$ the line $\{x: x^1=r,\ x^2=x^3=0\}$, and $F_{r,n}$ the affine functional on E which has the value $-n$ at Ø and vanishes on the line in E which is tangent to J at r^+. It can be verified that for each $r \in]-1, 1[$, the following statements are equivalent: (i) $r^+ \in \exp K_\varphi$; (ii) for some $n>0$, $\varphi \geq F_{r,n}$ on D; (iii) for some $n>0$, $\varphi \geq F_{r,n}$ on $[(r, 0, 0), r^+]$. For each n, let X_n be the set of all $r \in]-1, 1[$ for which $\varphi \geq F_{r,n}$ on D. Then each X_n is closed and $J \cap \exp K_\varphi = \{x^+: x \in \bigcup_1^\infty X_n\}$. We show below that there exists a lower semicontinuous convex φ for which both $\bigcup_1^\infty X_n$ and $]-1, 1[\sim \bigcup_1^\infty X_n$ are dense in $]-1, 1[$. For such a φ, exp K_φ is not a G_δ set, since $]-1, 1[$ cannot contain disjoint dense G_δ sets.

Let V be a countable dense subset of $]-1, 1[$, and $\{v_i\}_1^\infty$ an enumeration of the members of V. Let M be the set of all pairs (i, j) of positive integers with $j \leq i$, and $\prec$ the antireflexive lexicographic ordering on M. Clearly there exist $w_{11} \in]0, 1[\cap N_1 v_1 \sim V$ and continuous convex γ_{11} on $L(w_{11})$ such that $\gamma_{11} w_{11}^+ = 0$, $\gamma_{11} < 0$ on $L(r) \cap D \sim \{w_{11}^+\}$, $\gamma_{11} y_{11} < F_{v_{11}} y_{11}$ for some $y_{11} \in D$, and $\gamma_{11} \geq F_{w_{11}, n_{11}}$ for some $n_{11}>0$. We wish to proceed by induction to choose $w_{ij}, \gamma_{ij}, y_{ij}$, and n_{ij} for all $(i, j) \in M$. Suppose this has been done for all $(i, j) \prec (a, b) \in M$ in such a way that the following conditions are satisfied: (1) the γ_{ij}'s already chosen are continuous and convex, form an admissible family, vanish where defined on J, and have values <0 where defined on $D \sim J$; (2) $dmn\, \gamma_{ij} = L(w_{ij})$, and $w_{ij} \in]0, 1[\cap N_{1/j} v_i \sim \big(V \cup \{w_{cd}: (c, d) \prec (i, j)\}\big)$; (3) $y_{ij} \in D \cap L(w_{ij})$ and $\gamma_{ij} y_{ij} < F_{v_i, j}$; (4) n_{ij} is a positive integer and $\gamma_{ij} \geq F_{w_{ij}, n_{ij}}$. Then it is not hard (though a bit tedious) to establish the existence of $\varepsilon>0$ such that for each $r \in N_\varepsilon v_a \sim (V \cup \{w_{ij}: (i, j) \prec (a, b)\})$, the desired $w_{ab}, \gamma_{ab}, y_{ab}$, and n_{ab} can be obtained with $w_{ab}=r$. Thus we may continue, to obtain for all $(i, j) \in M$ the $w_{ij}, \gamma_{ij}, y_{ij}$, and n_{ij} satisfying conditions (1) to (4) above.

It can be verified that the function $\bigcup_{(i,j)\in M} \gamma_{ij}$ has a unique lower semicontinuous convex$^+$ extension ξ to $\bigcup_{r\in[1,1]} L(r)$, with $\xi \equiv 0$ on J. Let φ be the restriction of ξ to D. Then with the X_n's as defined above, it is clear that $\bigcup_1^\infty X_n > \{w_{ij}: (i,j)\in M\}$ and $J \sim \bigcup_1^\infty X_n > V$. The proof of (6.10) is complete.

We conclude with

(6.11) Example. *There is in E^3 a compact convex body C with boundary B such that $B \sim \operatorname{ext} C$, $\operatorname{ext} C \sim \exp C$, and $\exp C$ are all dense in B.*

Proof. Let $E, D, J, V, \{v_i\}_1^\infty, r^+$, and $L(r)$ be as in the proof of (6.11). Then construct (by use of mathematical induction) a *strictly* admissible family $\{\gamma_i\}_1^\infty$ of continuous convex functions such that for each n, $dmn\,\gamma_n = L(v_n)$, $\gamma_n v_n^+ = 0$, $\gamma_n < 0$ on $L(v_n) \cap D \sim \{v_n^+\}$, and such that within a distance of $< 1/n$ from each point of γ_n there are exposed points of γ_n, extreme points of γ_n which are not exposed, and nonextreme points of γ_n. Let ζ be the lower semicontinuous extension of $\bigcup_1^\infty \gamma_n$ to E. Since $\{\gamma_i\}_1^\infty$ is *strictly* admissible, it is clear that $\exp \gamma_n \subset \exp \zeta$, $\operatorname{ext} \gamma_n \subset \operatorname{ext} \zeta$. Thus with

$$C = \{x: (x^1, |x^2|, 0) \in D, |x^3| \leq |\zeta(x^1, |x^2|, 0)\},$$

we see that C has the desired properties.

It seems probable that a more careful construction in (6.11) would produce a smooth C with the properties described, but this has not been checked in detail.

References

[1] ARMS, R. J.: Convex bodies, tangential points. Bull. Amer. math. Soc. **61**, 136, Abstract 217 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Espaces Vectoriels Topologiques (v. 1). Actual. sci. industr. 1189, Paris (1953). — [3] BOURBAKI, N.: Espaces Vectoriels Topologiques (v. 2). Actual. sci. industr. 1229, Paris (1955). — [4] DAY, M. M.: Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. of Math. **45**, 375–385 (1944). — [5] DAY, M. M.: Strict convexity and smoothness of normed spaces. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 516–528 (1955). — [6] KLEE jr., V. L.: Convex sets in linear spaces. Duke math. J. **18**, 443–466 (1951). — [7] KLEE jr., V. L.: Convex sets in linear spaces. III. Duke math. J. **20**, 105–112 (1953). — [8] KLEE jr., V. L.: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 10–43 (1953). — [9] KLEE jr., V. L.: A note on extreme points. Amer. math. Monthly **62**, 30–32 (1955). — [10] KLEE jr., V. L.: Some topological properties of convex sets. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 30–45 (1955). — [11] KLEE jr., V. L.: Separation properties of convex cones. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 313–318 (1955). — [12] KLEE jr., V. L.: Extremal structure of convex sets. I. Archiv der Math. 8, 234–240 (1957). — [13] MAZUR, S.: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math. **4**, 70–84 (1933). — [14] MILMAN, D.: Accessible points of a functional compact set (Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **59**, 1045–1048 (1948). — [15] STRASZEWICZ, S.: Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen. Fund. Math. **24**, 139–143 (1935). — [16] YOSIDA, K., and M. FUKAMIYA: On regularly convex sets. Proc. Imp. Acad. Japan **17**, 49–52 (1941).

Dept. of Math., The University, Seattle, Wash. (USA.)

(Eingegangen am 8. September 1957)

CHEN, Y. M.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 105–120 (1958)

Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants

By
CHEN YUNG-MING

1. Introduction. The classical theory of Fourier constants may be said to date from RIEMANN. The most important general theorems concerning Fourier constants are the PARSEVAL theorem, RIESZ-FISCHER theorem, HAUSDORFF-YOUNG theorem, PALEY's theorem, and the theorems of HARDY and LITTLEWOOD [8, 9].

Recently, the study of Fourier constants for monotone functions and functions defined by trigonometrical series of monotone decreasing Fourier constants has become more and more prominent. In a previous paper [5], the author has discussed some asymptotic integral inequalities and their applications to trigonometrical series, power series, and Laplace transforms. The present paper is concerned with some generalizations of these results and of the integrability theorems of BOAS [1, 2], HEYWOOD [11, 12], IZUMI-SATÔ [13, 14, 15], and SUNOUCHI [20].

In the present paper, a thorough study of integrability theorems by the method of asymptotic approximations of powers is attempted. This method had previously been used by MULHOLLAND [16, 17] to generalize some theorems of HARDY and LITTLEWOOD on Fourier constants and power series. The same method has also been used by BOAS [3, pp. 196–197] to generalize theorems on integral functions. We shall use several special classes of asymptotic functions of a type "sharper" than those used by MULHOLLAND and BOAS. It is easy to see that the method to be used is better than those for obtaining theorems in the "power form" and that this method may be found useful in some other branches of analysis. We shall use the same notation throughout to denote functions of a special class, and shall use K_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ to denote positive absolute constants or positive numbers depending on certain variables.

By $\Phi(x)$ we denote any function $\in P$, where P is the class of functions in which $\Phi(x)$ satisfies:

(1.1.a) $\Phi(x)$ is a non-negative function, such that $\Phi(x)/x$ is non-decreasing as x is increasing from zero to infinity;

(1.1.b) There exists a positive constant $k>1$, such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity.

From (1.1.a) and (1.1.b), it follows that $\Phi'(x)$ exists almost everywhere in any finite interval and $\Phi'(x) \geq \Phi(x)/x = \varphi(x)$, say, $\Phi'(x) < k\,\Phi(x)/x = k\varphi(x)$ $(k>1,\ 0<x<\infty)$, $x \in P$ [i.e. with $\Phi(x)=x$].

By $\Phi_1(x)$ we denote any function $\in P_1$, where P_1 is the sub-class of P in which Φ_1 satisfies (1.1.a), (1.1.b), and

(1.1.c) $\Phi_1(x)/x^{1+\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a sufficiently small constant (depending on Φ_1).

By $\Phi_2(x)$ we denote any function $\in P_2$, where P_2 is the sub-class of P_1 in which Φ_2 satisfies (1.1.a), (1.1.b), (1.1.c) and

(1.1.d) $\Phi_2(x)/x^{2-\delta}$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a small constant.

By $\Psi(x)$ we denote any function $\in Q$, where Q is the class of functions in which $\Psi(x)$ is strictly increasing and $\Psi(x)/x^{1-\delta}$ is strictly decreasing in $(0, \pi)$ for a sufficiently small constant $\delta>0$. Then it follows that $\Psi'(x)>0$, where $\Psi'(x)$ exists almost everywhere in $(0, \pi)$; $\Psi'(x)\leq(1-\delta)\Psi(x)/x=(1-\delta)\psi(x)$, say.

By $\Psi_1(x)$ we denote any function $\in Q_1$, where Q_1 is the class of functions in which $\Psi_1(x)$ satisfies:

(1.2.a) $\Psi_1(x)$ is strictly increasing and tending to positive infinity when x is increasing from zero to infinity;

(1.2.b) $\Psi_1(x)/x^{1-\delta}$ is strictly decreasing to zero when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a small constant.

It follows that $\Psi_1'(x)>0$, where $\Psi_1'(x)$ exists almost everywhere in any finite interval $(0, a)$ and $\Psi_1'(x)\leq(1-\delta)\Psi_1(x)/x=(1-\delta)\,\psi_1(x)$, say.

By $\Psi_2(x)$ we denote any function $\in Q_2<Q_1$, where Q_2 is the class of functions in which Ψ_2 satisfies (1.2.a), (1.2.b), and

(1.2.c) $\Psi_2(x)/x^{\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity.

It follows that $\Psi_2'(x)\geq\delta\,\Psi_2(x)/x=\delta\,\psi_2(x)$, say.

By $\Omega_p(x)$ we denote any positive increasing function depending on $p>1$, and satisfying:

(1.3.a) $\Omega_p(x)/x^{\delta}$ is increasing with x in $(0, \pi)$, where $\delta>0$ is a sufficiently small constant;

(1.3.b) $\Omega_p(x)/x^{p-1-\delta}$ is decreasing when x is increasing from zero to π.

2. Asymptotic Inequalities. In this section we are concerned with some generalizations of the inequalities of HARDY and LITTLEWOOD [*17, 5, 7*; *10*, §§ 326, 327, 330, 346, 347]. For brevity, the complicated proofs of the following lemmas (running in a similar way as in [*17, 5*]) are not given here.

LEMMA 1. *If* $\lambda_i\geq 0$, $\Phi(\ )\in P$, $\Phi_1(x)\in P_1$, *then*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi\left(\sum_1^n\lambda_i\right)}{\Phi_1(n)}\leq K_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(n\,\lambda_n)}{\Phi_1(n)}, \tag{2.1}$$

where $K_1=K_1(\Phi, \Phi_1)$, *depending on* Φ *and* Φ_1.

LEMMA 2. *Let* $H(x)$ *be defined by*

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt \qquad \big(h(t) \geq 0\big). \tag{2.2}$$

Then

$$\int_0^a \frac{\Phi(H(x))}{\Phi_1(x)}\,dx \leq K_2 \int_0^a \frac{\Phi(x\,h(x))}{\Phi_1(x)}\,dx, \tag{2.3}$$

where $K_2 = K_2(\Phi, \Phi_1)$, $a \geq 0$.

LEMMA 3. *Let* $\Re(x)$ *be defined by*

$$\Re(x) = \int_x^a h(t)\,dt \qquad \big(h(t) \geq 0,\ h(t) \in L(0, a)\big). \tag{2.4}$$

Then

$$\int_0^a \frac{\Phi(\Re(x))}{\Psi_1(x)}\,dx \leq K_3 \int_0^a \frac{\Phi(x\,h(x))}{\Psi_1(x)}\,dx. \tag{2.5}$$

LEMMA 4. *If* $\lambda_i \geq 0$, *then*

$$\sum_1^\infty \frac{\Psi\left(\sum_1^n \lambda_i\right)}{\Phi_1(n)} \geq K_4 \sum_1^\infty \frac{\Psi(n\,\lambda_n)}{\Phi_1(n)}, \tag{2.6}$$

where $K_4 = K_4(\Psi, \Phi_1)$.

LEMMA 5. *Under the condition of Lemma 2,*

$$\int_0^a \frac{\Psi(H(x))}{\Phi_1(x)}\,dx \geq K_5 \int_0^a \frac{\Psi(x\,h(x))}{\Phi_1(x)}\,dx, \tag{2.7}$$

where $K_5 = K_5(\Psi, \Phi_1)$.

LEMMA 6. *Under the condition of Lemma 3* (with $a = \pi$),

$$\int_0^\pi \frac{\Psi(\Re(x))}{\Psi_1(x)}\,dx \geq K_6 \int_0^\pi \frac{\Psi(x\,h(x))}{\Psi_1(x)}\,dx, \tag{2.8}$$

where $K_6 = K_6(\Psi, \Psi_1)$.

LEMMA 7 [20], [21]. *If* $u(x)$ *is increasing, and* $v(x)$ *is decreasing for* $x > 0$, $u(+0) = 0$, $v(+\infty) = 0$, *and*

$$\int_0^\infty u(x)\,dv(x) < \infty, \tag{2.9}$$

then

$$\lim_{x\to 0} u(x)\,v(x)=0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x)\,v(x)=0, \tag{2.10}$$

and

$$\int_0^\infty u(x)\,dv(x) = -\int_0^\infty v(x)\,du(x). \tag{2.11}$$

LEMMA 8. *If* $h(x)\geq 0$, $\{x\,h(x)/\Phi_1(x)\}\in L(0,\infty)$, $m(E)>0$, *where* E *is the point set for* $h(x)>0$,

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt, \tag{2.12}$$

then

$$K_7<\left\{\int_0^\infty \frac{H(x)}{\Phi_1(x)}\,dx \Big/ \int_0^\infty \frac{x\,h(x)}{\Phi_1(x)}\,dx\right\}<K_8\ ^{1}). \tag{2.13}$$

LEMMA 9. *If* $h(x)\geq 0$, $\{h(x)\,\Psi_2(x)\}\in L(0,\infty)$, $m(E)>0$, *where* E *is the point set for* $h(x)>0$, *and* $\Re(x)$ *is defined by* (2.4) (with $a=\infty$), *then*

$$K_9<\left\{\int_0^\infty \left\{\frac{\Re(x)}{x}\right\}\Psi_2(x)\,dx \Big/ \int_0^\infty h(x)\,\Psi_2(x)\,dx\right\}<K_{10}. \tag{2.14}$$

3. Lebesgue Integrability Theorems. Suppose that λ_n is positive, and decreases steadily to zero as $n\to\infty$. Denote $\Phi|t|=\Phi(|t|)$,

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_n\cos n\,x, \tag{3.1}$$

$$g(x)=\sum_1^\infty \lambda_n\sin n\,x. \tag{3.2}$$

THEOREM 1. *If* $\lambda_n\downarrow 0$, *and* $g(x)$ *is defined by* (3.2), *then* $\{\Phi|g(x)|/\Psi(x)\}$ *is integrable* $L(0,\pi)$ *if and only if the series*

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi(n\,\lambda_n)}{n^2\,\Psi(n^{-1})} \tag{3.3}$$

is convergent.

PROOF. The argument is analogous to the proof of Theorem 4 in [5]. I shall now present a proof in condensed form.

---

[1]) The integrals may be replaced by summations of positive numbers. Thus, if $\lambda_n\geq 0$, $S_n=\sum_1^n \lambda_\nu$, then, if $\lambda_n\not\equiv 0$,

$$K_7<\left\{\sum_1^\infty \frac{S_n}{\Phi_1(n)} \Big/ \sum_1^\infty \frac{n\,\lambda_n}{\Phi_1(n)}\right\}<K_8.$$

(a) *Necessary condition.* Suppose that $\{\Phi|g(x)|/\Psi(x)\}\in L(0,\pi)$. Then by ([5] Lemma 4) and Lemma 3,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(n^{-1})} &\le K_{11}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi\left|\int_{1/n}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}dt\right|}{n^2\Psi(n^{-1})}\\
&\le K_{12}\sum_{1}^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\frac{\Phi\left(\int_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}dt\right)}{\Psi(x)}dx\\
&\le K_{13}\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi\left(\int_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}dt\right)}{\Psi(x)}dx\\
&\le K_{14}\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi|g(x)|}{\Psi(x)}dx.
\end{aligned}
\right. \tag{3.4}
$$

Hence the result.

(b) *Sufficient condition.* Since $x^2\Psi(x^{-1})\in P_1$, by Lemma 1,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi|g(x)|}{\Psi(x)}dx &\le K_{15}\sum_{1}^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\frac{\Phi(S_n)}{\Psi(n^{-1})}dx\ ^{2})\\
&\le K_{16}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(S_n)}{n^2\Psi(n^{-1})}\\
&\le K_{17}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(n^{-1})},
\end{aligned}
\right. \tag{3.5}
$$

where $S_n=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu$. This completes the proof. By a similar argument, we can derive the following

THEOREM 2. *If $\lambda_n\downarrow 0$, and $f(x)$ is defined by* (3.1), *then a sufficient condition of $\{\Phi|f(x)|/\Psi(x)\}$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of* (3.3).

THEOREM 3. *Suppose that $f(x)$ is defined by* (3.1) *where $\lambda_n\downarrow 0$, and that $\Omega_p(x)$ is defined by* (1.3.a), (1.3.b), *where $p>1$. Then $\Omega_p(x)\{f(x)\}^p$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}\lambda_n^p\Omega_p(n^{-1})$ is convergent.*

PROOF. The proof is similar to that of Theorem 1 in [5]. We have, by (1.3.b) and Lemma 2,

$$
\int_{0}^{a}\Omega_p(x)\left\{\frac{H(x)}{x}\right\}^p dx\le K_{18}\int_{0}^{a}\Omega_p(x)\{h(x)\}^p dx. \tag{3.6}
$$

[2] Cf. [5, (4.2)].

Applying Lemma 2 with $\Phi(t)=t^p$, we can prove this theorem. For brevity, the detailed proof is omitted. By a similar argument, we can derive the following

THEOREM 4. *Under the conditions of Theorem 3, except that $f(x)$ is replaced by $g(x)$, which is defined by (3.2), $\Omega_p(x)\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}\lambda_n^p \Omega_p(n^{-1})$ is convergent.*

THEOREM 5. *Suppose that $f(x)$ is positive and even in $|x|<\pi$, that it is monotone decreasing in $(0,\pi)$, and that a_n are the Fourier cosine coefficients of f. Then $f(x)/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum |a_n|/n\Psi(n^{-1})$ is convergent.*

PROOF. By [22, pp. 214—215], if we denote the integral of $f(t)$ over $(0, x)$ by $F(x)$, then

$$|a_n| \leq 2F(\pi/n), \tag{3.7}$$

$$A_n \geq K_{19} f(\pi/n) \tag{3.8}$$

where

$$A_n = \sum_1^n |a_\nu|.$$

Applying Lemma 8, and by a similar argument as in [20], one can easily prove this theorem.

By a similar way we can prove the following

THEOREM 6. *Suppose that $g(x)$ is odd, and is positive and monotone decreasing in $(0,\pi)$, and that b_n are the Fourier sine coefficients of $g(x)$. Then $g(x)/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum_1^\infty \frac{|b_n|}{n\Psi(n^{-1})}$ is convergent.*

For the proof, it should be remarked that from [20] we have

$$|b_n| \leq \frac{4}{\pi} G(\pi/n), \tag{3.9}$$

where

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt;$$

$$B_n \geq K_{20} g(\pi/n), \tag{3.10}$$

where

$$B_n = \sum_1^n |b_\nu|.$$

Thus the proof of Theorem 6 may be given in a similar way. By the same method, we can further prove the following

THEOREM 7. *Under the conditions of Theorem 5, with an addition that $p>1$, $\{f(x)\}^p/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}|a_\nu|^p/\Psi(n^{-1})$ is convergent.*

The proof is based on (3.7), (3.8) and Lemma 2, and is analogous to the proof of Theorem 1 in [4]. For the sake of brevity, the detailed proof is not given here. There is also a corresponding theorem for odd functions:

THEOREM 8. *Under the conditions of Theorem 6, with an addition that* $p>1$, $\{g(x)\}^p/\Psi(x) \in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|b_n|^p/\Psi(n^{-1})$ *is convergent.*[5]

There are further applications of asymptotic approximators of power to the analogous theorems of Theorem 3, Theorem 4. The results are:

THEOREM 9. *Under the conditions of Theorem 7,* $\Omega_p(x)\{f(x)\}^p \in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|a_n|^p \Omega_p(n^{-1})$ *is convergent.*

THEOREM 10. *Under the conditions of Theorem 8,* $\Omega_p(x)\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|b_n|^p \Omega_p(n^{-1})$ *is convergent.*

4. A Generalized Theorem by Means of Super-Multiplicative Functions[3]. HEYWOOD [12] proved the following theorem:

THEOREM (A). Suppose that $\lambda_n \downarrow 0$. Let $g(x)$ be defined by (3.2). Then for $1<\gamma<2$, $x^{-\gamma}g(x) \in L(0,\pi)$ if and only if $\sum_1^\infty n^{\gamma-1}\lambda_n$ converges.

This theorem is a special case[4] of a theorem of EDMONDS ([6] II, Theorem 13; III, Theorem 16). I shall now prove another more general theorem.

THEOREM 11. *Suppose that the super-multiplicative function* Φ_2 *is the function already defined in* § 1, *that* $g(x)$ *is defined by* (3.2), *and that* $\lambda_n \downarrow 0$. *Then* $\frac{g(x)}{\Phi_2(x)} \in L(0,\pi)$ *if and only if the series*

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \tag{4.1}$$

is convergent.

PROOF. Suppose at first that $\{g(x)/\Phi_2(x)\} \in L(0,\pi)$. Then by Lemma 8 and the relations

$$H(x) = \int_0^x |g(t)|\,dt, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt, \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} H(\pi/n) \geq G(\pi/n) \geq K_{21}\sum_1^\infty (\lambda_n/n)\sin^2(\pi/2n) \\ \qquad \geq K_{22}\sum_{m=[n/3+1]}^{[2n/3]} \left(\frac{\lambda_m}{m} + \frac{\lambda_{m+n}}{m+n} + \cdots\right)\left(\frac{m\pi}{n}\right)^2 \\ \qquad \geq K_{23}\lambda_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

[3] A function Φ is said to be super-multiplicative if $\Phi(xy) \geq \Phi(x)\Phi(y)$ for all x, y, cf. also ([17] p. 266).

[4] Also some of the results in [1] are special cases of EDMONDS' results. But our Theorem 11 does not seem to be contained in EDMONDS' results.

we have .

$$
(4.4)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \le K_{24} \sum_1^\infty \frac{H(\pi/n)}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \\
\displaystyle\le K_{25} \sum_1^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \frac{H(x)\,dx}{x\,\Phi_2(x)} \\
\displaystyle= K_{25} \int_0^\pi \frac{H(x)\,dx}{x\,\Phi_2(x)} \\
\displaystyle\le K_{26} \int_0^\pi \frac{|g(x)|}{\Phi_2(x)}\,dx .
\end{cases}
$$

So the condition is necessary. Conversely, suppose that the series (4.1) is convergent. Then by the properties of the super-multiplicative function $\Phi_2(x)$, we have

$$
(4.5)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^\pi \frac{|g(x)|}{\Phi_2(x)}\,dx \le \int_0^\pi \frac{\left\{\sum_1^\infty \lambda_n |\sin n x|\right\}}{\Phi_2(x)}\,dx \\
\displaystyle= \sum_1^\infty \int_0^{n\pi} \frac{\lambda_n |\sin y|}{n\,\Phi_2(y/n)}\,dy \\
\displaystyle\le \sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \left\{\int_0^\infty \frac{|\sin y|}{\Phi_2(y)}\,dy\right\} \\
\displaystyle\le K_{27} \sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} .
\end{cases}
$$

It follows that $g(x)/\Phi_2(x) \in L(0, \pi)$. Hence the proof of the sufficient condition is complete.

5. Theorems Derived from The Cauchy Integration. We shall now derive some generalizations of the theorems of IZUMI and SATÔ [*13*, *14*, *15*], in which Cauchy integrability and conditional convergence of infinite series are used instead of Lebesgue integrability and absolute convergence of infinite series.

By a proof analogous to that of [*15*], one can easily prove the following generalized form of a lemma due to R. SALEM [*18*, *19*] (I omit the proof here):

LEMMA 10. *Let* $0<M<N$, $0\leq t\leq \pi$. *Then there is an absolute constant* C, *such that*

$$\left|\int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du-\sum_{n=M}^{N}\frac{\cos nt}{\Psi_1(n)}\right|\leq \frac{C}{\Psi_1(M)}. \tag{5.1}$$

THEOREM 12[5]). *Let*

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx\ ^{6}). \tag{5.2}$$

If $\Psi_1(x)$ *is a super-multiplicative function*[7]), *and* $\{f(x)/x\Psi_1(x^{-1})\}\in L(0,\pi)$, *then the series* $\sum_1^{\infty}\lambda_n/\Psi_1(n)$ *converges. The same holds for sine series.*

PROOF. From the formula

$$\lambda_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \tag{5.3}$$

we can derive

$$\left\{\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N}\frac{\lambda_n}{\Psi_1(n)}&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{\Psi_1(n)}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\left\{\sum_{n=M}^{N}\frac{\cos nt}{\Psi_1(n)}\right\}dt\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt\int_M^N\frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du-\\&\quad-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt\left\{\int_M^N\frac{\cos ut}{\Psi_1(t)}\,du-\sum_{n=M}^{N}\frac{\cos nt}{\Psi_1(n)}\right\}\\&=\frac{2}{\pi}(I_1+I_2),\ \text{say.}\end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

In virtue of Lemma 10, we have

$$|I_2|\leq\frac{K_{28}}{\Psi_1(M)}\int_0^{\pi}|f(t)|\,dt=o(1)\qquad(M\to\infty). \tag{5.5}$$

---

[5]) Cf. IZUMI-SATÔ [*15*, Theorem 1].

[6]) I.e. $f(x)\in L(0,2\pi)$.

[7]) It follows that $1/\Psi_1(x)$ is a sub-multiplicative function.

Write

$$I_1 = \int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/L} + \int_{\pi/L}^{\pi} = I_{1,1} + I_{1,2}. \tag{5.6}$$

Since $\Psi_1(x)$ is a super-multiplicative function, $\frac{\cos u}{\Psi_1(u/t)}$ is an oscillating damping function (i.e. having a fixed "period" 2π, but its "amplitude" tends to zero), we have

$$\left\{\begin{aligned} |I_{1,1}| &\leq \int_0^{\pi/L} |f(t)|\,dt \left| \int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du \right| \\ &= \int_0^{\pi/L} t^{-1}|f(t)|\,dt \left| \int_{Mt}^{Nt} \frac{\cos u\,du}{\Psi_1(u/t)} \right| \\ &\leq 2\int_0^{\pi/L} \frac{|f(t)|\,dt}{t\Psi_1(t^{-1})} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\,du}{\Psi_1(u)} \\ &\leq K_{29} \int_0^{\pi/L} \frac{|f(t)|\,dt}{t\Psi_1(t^{-1})}, \end{aligned}\right. \tag{5.7}$$

which tends to zero as L tends to positive infinity. By the second mean value theorem,

$$\left\{\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leq \int_{\pi/L}^{\pi} |f(t)|\,dt \left| \int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du \right| \\ &= \frac{1}{\Psi_1(M)} \int_{\pi/L}^{\pi} |f(t)|\,dt \left| \int_M^{\eta} \cos ut\,du \right| \qquad (M < \eta < N) \\ &= O\left(\frac{1}{\Psi_1(M)} \int_{\pi/L}^{\pi} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \right), \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

which is $o(1)$ for sufficiently large $M = M(L)$. Therefore we have $I_1 + I_2 = o(1)$, as $M \to \infty$, and hence the series $\sum_1^{\infty} \lambda_n/\Psi_1(n)$ converges.

The proof for sine series is similar. The only difference is that in the proof for sine series, all the cosine functions in Lemma 10 should be replaced by sine functions.

THEOREM 13[8]). *Let $f(x)$ be defined by (5.2). If $\Psi_2(x)$ is a super-multiplicative function of x, and the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is absolutely convergent, then*

[8]) This is a generalization of IZUMI-SATÔ's theorem; cf. [*15*, Theorem 2].

$f(x)/x\Psi_2(x^{-1})$ is integrable in the sense of Cauchy. The analogous theorem for sine series also holds.

PROOF. Suppose that the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is convergent. Then by a similar reasoning on oscillating damping functions, we have

$$
(5.9)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{f(t)\,dt}{t\Psi_2(t^{-1})} &= \int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{dt}{t\Psi_2(t^{-1})} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{\Psi_2(n)\cos nt}{t\Psi_2(t^{-1})}\,dt \quad [9] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/N}^{n\pi/M} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/N}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/M}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})} \\
&= J_1 - J_2, \quad \text{say.}
\end{aligned}\right.
$$

Write

$$
(5.10)\qquad J_1 = \sum_{n=1}^{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} = J_{1,1} + J_{1,2}.
$$

$$
(5.11)\qquad |J_{1,1}| \le \sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})} + |S_{N-1}| \int_{(N-1)\pi/N}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})}.
$$

where $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\Psi_2(\nu)}$. Since

$$
(5.12)\qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\,du}{u\Psi_2(u^{-1})} < K_{30} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{u^{1-\delta}} = K_{31},
$$

by the property of super-multiplicative functions, we have

$$
(5.13)\qquad \int_0^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\Psi_2(nu^{-1})} < K_{32} \qquad (n = 1, 2, \ldots).
$$

In (5.10) and (5.11), if we put $S_n \equiv K$, then J_1 is convergent. Therefore, in order to prove that J_1 is convergent, we may, without loss of generality, assume $S_n \to 0$, as $n \to \infty$. Then the second term on the right of (5.11) is $o(1)$

[9] Since $\{t\Psi_2(t^{-1})\}^{-1}$ is bounded and strictly decreasing in $(\pi/N, \pi/M)$, $f(x) \in L(\pi/N, \pi/M)$, the inversion of $\int \sum = \sum \int$ is legitimate ([22] § 4.44). I am indebted to Prof. IZUMI and Prof. SATÔ for pointing this out to me.

when $N \to \infty$, and the first term is less than

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \cdot \left| \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{\Psi_2(n)\cos u}{u\,\Psi_2(n\,u^{-1})}\,du \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \left\{ \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{|\cos u|\,du}{u\,\Psi_2(u^{-1})} \right\} \\
&\leq K_{33} \sum_{n=1}^{N} \frac{|S_n|}{n\,\Psi_2(N/n)} \\
&\leq K_{34} \sum_{n=1}^{N} \frac{|S_n|}{n\,(N/n)^{\delta}} \\
&\leq K_{35} N^{-\delta} \sum_{n=1}^{M(\varepsilon)} n^{\delta-1} + \left(\frac{K_{34}}{\delta}\right)\varepsilon \\
&= o(1),
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

as $N \to +\infty$. Therefore we have

$$
|J_{1,1}| = o(1) \qquad (N \to +\infty). \tag{5.15}
$$

Since the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n^{-1})$ is absolutely convergent and the integral $\int_V^W \frac{\Psi_2(n)\cos u}{u\,\Psi_2(n\,u^{-1})}\,du$ is bounded, we have $J_{1,2} = o(1)$, and hence $J_1 = o(1)$. Similarly, we can prove $J_2 = o(1)$. Hence $f(t)/t\Psi_2(t^{-1})$ is integrable in the Cauchy's sense. This completes the proof.

By the same method, we can generalize the remaining theorems in [15]. The results are the following two theorems (for brevity, the proofs are not given here):

THEOREM 14. *Let $f(x)$ be defined by* (5.2). *Suppose that the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is convergent (not necessarily absolutely convergent), and that Ψ_2 is a super-multiplicative function, moreover,*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\Psi_2(k^{-1})} \operatorname*{Max}_{m} |S_m - S_{[k'M]}| = o(1) \qquad (M \to +\infty), \tag{5.16}
$$

where $[k'M] \leq m \leq [(k'+1)M]$, $k' = k + \frac{1}{2}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\Psi_2(k)$. Then $\frac{f(t)}{t\,\Psi_2(t^{-1})}$ is integrable in Cauchy's sense.

The condition is satisfied when $\Psi_2(x) = x^{\gamma}(1 + b \log^{+} x)^{c}$, $0 < \gamma < 1$, $b > 0$, $c \leq 0$.

THEOREM 15. *Suppose that $f(x)$ is defined by* (5.2), *that $f(t)/t\Psi_2(t^{-1})$ is integrable in Cauchy's sense, where Ψ_2 is a super-multiplicative function, and that*

$$
\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\Psi_2(k)} \operatorname*{Max}_{\xi} \left| \int_{k'\pi/M}^{\xi} \frac{f(t)\,dt}{t\,\Psi_2(t^{-1})} \right| = o(1) \qquad (M \to +\infty), \tag{5.17}
$$

where $k'\pi/M \leq \xi \leq (k'+1)\pi/M$, $k' = k + \frac{1}{2}$. *Then the series* $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ *converges.*

6. Applications to Power Series and Laplace Transforms. The same method of asymptotic approximations of powers can be applied to power series and Laplace transforms. Some of the results (without proof) are stated as follows.

THEOREM 16[10]). *Suppose that* c_n *is positive or zero, and is ultimately non-increasing, and that* $F(x)$ *is defined by*

$$F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n, \tag{6.1}$$

for $0 \leq x < 1$. *Then*

$$\frac{\Phi(F(x))}{\Psi(1-x)} \in L(0,1) \tag{6.2}$$

if and only if the series $\sum_1^\infty \Phi(nc_n)/n^2\Psi(n^{-1})$ *is convergent.*

THEOREM 17[11]). *Suppose that*

(i) $e^{-xt}\theta(t) \in L(0,\infty)$ $(x>0)$;

(ii) $\theta(t) > 0$, *as* $t > 0$, *and is a non-increasing function*;

(iii) $\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\theta(t)\,dt$.

Then $\frac{\Phi(\omega(x))}{\Psi_1(x)}$ *is integrable* $L(1,\infty)$ *if and only if*

$$\frac{\Phi(t\theta(t))}{t^2\Psi_1(t^{-1})} \in L(0,1). \tag{6.3}$$

THEOREM 18[12]). *Under the conditions of Theorem* 17, $\frac{\Phi(\omega(x))}{\Psi(x)} \in L(0,1)$ *if and only if* $\frac{\Phi(t\theta(t))}{t^2\Psi(t^{-1})}$ *is integrable* $L(1,\infty)$.

7. Theorems Derived by the Integration Argument and Functions of Bounded Variation. We are considering a certain class of functions obtained by transformation of the function x^t. This method had previously been used by MULHOLLAND [17] to generalize some inequalities in the "power form". Let $K(t)$ be a non-negative function defined in the interval $0 \leq a < t < b$, which is such that the integral

$$\int_a^b K(t)\,dt \tag{7.1}$$

[10]) This is a generalized HARDY-LITTLEWOOD's theorem [5, Theorem E]. Here we may set $\Phi(x) = x$.

[11]) Cf. [5, Theorem D].

[12]) Cf. [5, Theorem C].

is positive and finite. Define

$$J(x) = J_K(x) = \int_a^b K(t)\, x^t\, dt. \tag{7.2}$$

The detailed properties of $J(x)$ were given in [17].

Corresponding to the arguments given in [17], we can derive the following theorems:

THEOREM 19. *Suppose that a and b in (7.1) are equal to 1 and p respectively, that λ_n decreases steadily to zero, and that $g(x)$ is defined by (3.2). Then for $p>1$,*

$$\int_0^\pi \frac{J|g(x)|}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.3}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J(n\lambda_n)}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.4}$$

converges.

THEOREM 20. *Under the conditions of Theorem 19 and Theorem 2,*

$$\int_0^\pi \frac{J|f(x)|}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.5}$$

if and only if the series (7.4) converges.

THEOREM 21. *Under the conditions of Theorems 19, 5,*

$$\int_0^\pi \frac{J(f(x))}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.6}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J|n a_n|}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.7}$$

is convergent.

THEOREM 22. *Under the conditions of Theorem 6, if a and b in (7.1) are equal to 1 and p respectively then for $p>1$,*

$$\int_0^\pi \frac{J(g(x))}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.8}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J|n b_n|}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.9}$$

converges.

THEOREM 23. *Under the conditions of Theorems* 16, 19,

$$\int_0^1 \frac{J(F(x))}{\Psi(1-x)}\,dx < \infty, \tag{7.10}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J(n c_n)}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.11}$$

is convergent.

There are further analogous theorems for Laplace transforms. The analogous theorems corresponding to Theorems 17, 18 also hold.

SZ.-NAGY [21] proved the following theorem:

THEOREM (B). Suppose that $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ is a periodic function of period 2π, that it is of bounded variation except in some small neighbourhoods of a finite number of singular points (incongruent mod 2π), and that moreover, at each singular point α the integrals

$$\int_0 u^\gamma |dg_\alpha(u)|, \quad \int_0 u^\gamma |dh_\alpha(u)| \qquad (0<\gamma<1) \tag{7.12}$$

exist, where

$$g_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha+u) - f(\alpha-u)], \quad h_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha+u) + f(\alpha-u)]. \tag{7.13}$$

Then $f(x)$ is integrable and the series

$$\sum (|a_n| + |b_n|)/n^\gamma \tag{7.14}$$

converges, where a_n, b_n are the Fourier cosine coefficients, Fourier sine coefficients, respectively.

Corresponding to Theorem (B), I shall now prove

THEOREM 24. *Under the conditions of Theorem* (B), *and, if moreover, at each singular point* α, *the integrals*

$$\int_0 \frac{g_\alpha(u)}{\Psi(u)}\,du, \quad \int_0 \frac{h_\alpha(u)}{\Psi(u)}\,du \tag{7.15}$$

exist, then the series

$$\sum (|a_n| + |b_n|)/n\,\Psi(n^{-1}) \tag{7.16}$$

converges.

PROOF. By the reasoning given in the proof of Theorem (B), we may write $f(x) = \sum_1^N f_k(x)$, in which each f_k corresponds to the function on an interval containing only one singular point. Therefore, without loss of generality, we may assume that there is only one singular point α. Since $f(x)$ is of bounded variation, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, where f_1, f_2 are monotone non-decreasing bounded functions. By Theorems 5, 6, etc., we can derive the

results for $g_\alpha(u)$ and $h_\alpha(u)$, and hence for their sum. Hence the result follows at once.

[I wish to express my thanks to the referee for some remarks which brought to some improvements and corrections in this paper.]

Zusatz bei der Korrektur: In § 1, under the restrictions of (1.1.a) and (1.1.b), the function $\Phi(x)$ must be a continuous function of x. But in a wider sense, in (1.1.b), it is equally well to assume that $\Phi(x)$ is of bounded variation in any finite interval, that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing except at an enumerable number of points, and that at each of these points $\Phi(x)$ has a "jump". The definitions of the functions $\Psi(x)$, $\Phi_1(x)$, etc. can also be defined in this way. Some special cases of several theorems in this paper [with $\Phi(x) = x$] had previously been discussed in: ALJANČIĆ, S., R. BOJANIĆ et M. TOMIĆ: Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **8**, 67–84 (1955).

References

[*1*] BOAS, R. P., jr.: Integrability of trigonometric series. I. Duke Math. J. **18**, 787–793 (1951). — III. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217–221 (1952). — [*2*] BOAS, R. P., jr.: Absolute convergence and integrability of trigonometric series. J. Rational Mechanics and Analysis **5**, 621–632 (1956). — [*3*] BOAS, R. P., jr.: Entire Functions, pp. 196–197. New York 1954. — [*4*] CHEN, Y. M.: On the integrability of functions defined by trigonometrical series. Math. Z. **66**, 9–12 (1956). — [*5*] CHEN, Y. M.: Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems. Math. Z. **68**, 227–244 (1957). — [*6*] EDMONDS, S. M.: The Parseval formulae for monotonic functions. II. Proc. Cambridge Phil. Soc. **46**, 231–248 (1950). — III. Proc. Cambridge Phil. Soc. **46**, 249–267 (1950). — [*7*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. J. für Math. **157**, 141–158 (1927). — [*8*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. Math. Annalen **97**, 159–209 (1926). — [*9*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. **6**, 3–9 (1931). — [*10*] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1952. — [*11*] HEYWOOD, P.: Integrability theorems for power series and Laplace transforms. J. London Math. Soc. **30**, 302–310 (1955). — [*12*] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. I. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **5**, 71–76 (1954). — II. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 77–79 (1955). — [*13*] IZUMI, S.: Some trigonometrical series. III. J. of Math. (Tokyo) **1**, 128–136 (1953). — [*14*] IZUMI, S.: Some trigonometrical series. XI. Tôhoku Math. J. (2) **6**, 73–77 (1954). — [*15*] IZUMI, S., and M. SATÔ: Integrability of trigonometrical series. I. Tôhoku Math. J. (2) **6**, 258–263 (1954). — [*16*] MULHOLLAND, H. P.: The generalization of certain inequality theorems involving powers. Proc. London Math. Soc. (2) **33**, 481–516 (1932). — [*17*] MULHOLLAND, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem. Proc. London Math. Soc. (2) **35**, 257–293 (1933). — [*18*] SALEM, R.: Sur les séries de Fourier des fonctions de carré sommable. Comptes Rendus **197**, 1175–1176 (1933). — [*19*] SALEM, R.: Généralisation de certains lemmes de Van der Corput et applications aux séries trigonométriques. Comptes Rendus **201**, 470–472 (1935). — [*20*] SUNOUCHI, G.: Integrability of trigonometrical series. J. of Math. (Tokyo) **1**, 99–103 (1953). — [*21*] SZ.-NAGY, B.: Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, 118–135 (1949). — [*22*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

Dept. of Math., Nanyang University, Singapore

(Eingegangen am 9. Juni 1957)

BAKER, I. N.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 121–163 (1958)

Zusammensetzungen ganzer Funktionen

Von

IRVINE NOEL BAKER

Inhaltsverzeichnis

Seite

§ 1. Einleitung 121

I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z) = f\{g(z)\}$ für ganze transzendente Funktionen $f(z)$, $g(z)$ von kleiner Ordnung 122

§ 2. Bisherige Ergebnisse 122

§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist 124

§ 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven 130

II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$ 139

§ 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind 139

§ 6. Der Fall e^z 147

§ 7. Ein Problem von SZEKERES 149

§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung in miteinander vertauschbare Funktionen 151

§ 9. Iterationen 152

§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen $f(z)$ der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ 153

§ 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ 158

Literatur 163

§ 1. Einleitung

Unter der Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ verstehen wir die „Substitution" von z durch $g(z)$ in $f(z)$. Wir nehmen an, die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$, die analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen sein mögen, seien so beschaffen, daß die „Substitution" in einem gewissen z-Gebiet sinnvoll ist. Diese Bildung ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. es gilt nicht immer $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$.

Obwohl solche Zusammensetzungen häufig in der Mathematik auftreten (z.B. zur Vereinfachung vieler elementarer Rechnungen), sind sie in voller Allgemeinheit wenig untersucht worden. Erst 1870 hat SCHRÖDER [1], [2] den Fall der „natürlichen Iterierten" $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ einer gegebenen Funktion studiert:

$$f_0(z) = z, \quad f_{n+1}(z) = f\{f_n(z)\}.$$

Hierbei führt er allerdings eine Funktionalgleichung ein, die auf ABEL zurückgeht. Im späten neunzehnten Jahrhundert haben verschiedene Mathematiker (z.B. KOENIGS [3]) die Iterierten und die verwandten Funktionalgleichungen

von ABEL und SCHRÖDER lokal untersucht, insbesondere in der Nähe eines Fixpunktes ξ der zu betrachtenden Funktion $f(z)$, d.h. eines Punktes ξ mit

$$f(\xi) = \xi.$$

Durch MONTELs Theorie der Normalfolgen wurde endlich eine systematischere, um 1920 von JULIA [4] und FATOU [5], [6] aufgebaute Iterationstheorie im Großen für gebrochene und ganze Funktionen möglich. Das Iterationsproblem ist auch im Reellen behandelt worden (z.B. von BÖDEWADT [7]).

Im folgenden beschränken wir uns auf Zusammensetzungen von ganzen Funktionen; dann ist die Zusammensetzung wieder ganz. Die allgemeine Bildung $f\{g(z)\}$ betrachten wir nur für den Fall, daß die Ordnungen von $f(z)$ und $g(z)$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Mittels einer Erweiterung (§ 3) der bekannten Ergebnisse über den kleinsten Betrag von Funktionen von kleiner Ordnung gewinnen wir in § 4 den Hauptsatz 3, der später in der Iterationstheorie angewendet wird. Im Teil II werden speziellere Zusammensetzungen betrachtet. Zuerst die vertauschbare

$$f\{g(z)\} = g\{f(z)\}.$$

Die Theorie der vertauschbaren Funktionen ist mit der Iterationstheorie eng verwandt, denn die Iterierten sind ja miteinander vertauschbar; und für passendes $f(z)$ kann es vorkommen, daß nur die Iterierten $f_n(z)$ mit $f(z)$ vertauschbar sind (§ 6). In § 9 bringen wir einen Beitrag zu einem neueren Problem der Iterationstheorie, namentlich zur Frage nach notwendigen Bedingungen dafür, daß eine gegebene ganze Funktion die m-te Iterierte ($m>1$ ganz) einer ganzen Funktion ist. In § 10 wird dieses Problem für den Fall $m=2$ weiter verfolgt. Schließlich ziehen wir in § 11 einige Konsequenzen der obigen Resultate für lokale Lösungen der Funktionalgleichung

$$f\{f(z)\} = F(z) \qquad \text{für ganzes } F(z);$$

wobei eine Verbesserung eines etwas lückenhaften Paragraphen unserer Arbeit [8] und eine Bemerkung zu einer Vermutung von THRON [9] gebracht werden.

I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z)=f\{g(z)\}$ für ganze transzendente[1]) Funktionen $f(z)$, $g(z)$ von kleiner Ordnung

§ 2. Bisherige Ergebnisse

Es sei in der üblichen Bezeichnung

$$M(f,r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|$$

$$m(f,r) = \operatorname*{Min}_{|z|=r} |f(z)|.$$

[1]) Es sei bemerkt, daß wir in diesem Abschnitt I uns auf ganze transzendente Funktionen beschränken und der Kürze halber das Adjektiv „transzendent" weglassen.

Die Fragestellung dieses Abschnitts ergibt sich aus einer Arbeit [*8*, insbesondere Satz 1] über die Iterationstheorie im Großen, wo wir die folgende Tatsache benutzten: Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion von der Ordnung 0 und $F(z) = f\{f(z)\}$; dann ist $m(F, r)$ unbeschränkt mit unbegrenzt wachsendem r [man bemerke, daß $F(z)$ nicht von Ordnung 0 zu sein braucht!]. Eine untere Abschätzung für $M(F, r)$, nämlich

$$M(F, r) > M(f, r^q)$$

für eine beliebig große Konstante q und passende, beliebig große r-Werte, kam auch vor. Die Resultate von [*8*] lassen sich verschärfen, wenn man schärfere Aussagen über $M(F, r)$ und $m(F, r)$ zur Verfügung hat. Allgemeiner möchte man von einer zusammengesetzten ganzen Funktion $e(z) = g\{h(z)\}$, $g(z)$, $h(z)$ ganz, gern wissen, was für Beziehungen es zwischen $M(e, r)$, $M(g, r)$ und $M(h, r)$, bzw. $m(e, r)$, $m(g, r)$ und $m(h, r)$ gibt.

Den größten Betrag hat schon PÓLYA [*10*] behandelt; er hat bewiesen:

Satz (PÓLYA). *$e(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ seien ganze Funktionen die* (1) *und* (2) *erfüllen:*

$$e(z) = g\{h(z)\}, \tag{1}$$

$$h(0) = 0. \tag{2}$$

Dann gibt es eine bestimmte, von $e(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ unabhängige Konstante c mit

$$M(e, r) > M\left[g, \left\{cM\left(h, \frac{r}{2}\right)\right\}\right]. \tag{3}$$

Für ganze Funktionen von kleiner Ordnung besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem größten und dem kleinsten Betrag, z.B. der

Satz. (LITTLEWOOD-WIMAN [*11*], [*12*]). *$f(z)$ sei eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho < 1$. Dann ist die Menge*

$$[r;\ m(f, r) > \{M(f, r)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \varrho)}] \tag{4}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ unbeschränkt.

Man hat sogar Aussagen über die (obere) *Dichte* der Menge (4) und ähnlicher Mengen (AMIRÀ [*13*], BESICOVITCH [*14*], CARTWRIGHT [*15*], PENNYCUICK [*16*]). Hiernach liegt es nahe zu fragen, ob es für den kleinsten Betrag von $e(z) = g\{h(z)\}$ Sätze gibt, die dem Pólyaschen Ergebnis entsprechen, wenigstens im Fall, daß $g(z)$ und $h(z)$ kleine Ordnung haben. Es ist allerdings zu erwarten, daß solche Sätze wesentlich komplizierter als der von PÓLYA sind.

In § 4 (Sätze 3 und 4) gelingt es, eine Beziehung der gesuchten Art zu finden, wobei aber die Größe $m(f, r)$ — d.h. der kleinste Betrag von $f(z)$ auf dem Kreis $|z| = r$ — durch den kleinsten Betrag auf gewissen „kreisartigen" Kurven zu ersetzen ist. Die Sätze 3 und 4 sind von Bedeutung in der Iterationstheorie, und ihre Anwendung in § 8 und § 9 bildet eine weitgehende Verschärfung der Resultate in [*8*].

§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist

Die folgenden vorbereitenden Nebenbetrachtungen haben an und für sich schon ein gewisses Interesse. Nach dem Satz von LITTLEWOOD-WIMAN nimmt der kleinste Betrag $m(f, r)$ der ganzen Funktion $f(z)$ von kleinerer Ordnung als $\frac{1}{2}$ beliebig große Werte an. Wir fragen: *Wie groß muß r gewählt werden, damit $m(f, r)$ eine vorgegebene Größe R zum erstenmal erreicht?* Für den Zweck dieser Arbeit ist ausreichend der

Satz 1. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$, ferner $r(R)$ die kleinste Lösung zu gegebenem $R > 0$ der Gleichung $m(f, r) = R$, und $M_{-1}(f, r)$ die Umkehrfunktion von $M(f, r)$.*

Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $R_\delta > 0$, so daß für alle $R > R_\delta$

$$M_{-1}(f, R) \leq r(R) \leq \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\varrho)+\delta}, \tag{5}$$

wobei

$$\frac{1}{L(\varrho)} = \max_{\varrho \leq \varrho' \leq \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\right) \cos(\pi \varrho')$$

ist.

Es sei bemerkt, daß $L(0) = 1$ und daß $L(\varrho) \to \infty$ für $\varrho \to \frac{1}{2} - 0$. Zuerst bringen wir den

Hilfssatz 1. *Gegeben sei die ganze Funktion $f(z)$. Bei obiger Erklärung von $M(f, r)$ und $M_{-1}(f, r)$ gibt es zu den reellen Zahlen $k > 1$, $\delta > 0$ ein R_0, so daß für alle $R > R_0$*

$$M_{-1}(f, R^k) < (1 + \delta)\{M_{-1}(f, R)\}^k < \{M_{-1}(f, R)\}^{k+\delta} \tag{6}$$

ist.

Beweis. Man setze $s = \log r$ und $V(s) = \log M(r)$. Nach dem Dreikreisesatz von HADAMARD ist $V(s)$ eine konvexe Funktion von s; insbesondere

$$\frac{V(s) - V(0)}{s} \leq \frac{V(ks) - V(0)}{ks},$$

also

$$V(ks) \geq kV(s) - (k-1)V(0). \tag{7}$$

Für wachsendes s strebt (nach dem Satz von LIOUVILLE) $\frac{V(s) - V(0)}{s}$ gegen ∞. Wegen der Konvexität von $V(s)$ strebt für unbegrenzt wachsendes s und für festes σ auch der Ausdruck $\frac{V(s+\sigma) - V(s)}{\sigma}$ gegen ∞. Jetzt sei $\sigma > 0$ so klein gewählt, daß $e^\sigma < 1 + \delta$. Es gibt ein s_0, so daß

$$\frac{V(ks + \sigma) - V(ks)}{\sigma} > \frac{(k-1)V(0)}{\sigma} \quad \text{für } s > s_0.$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$V(ks + \sigma) > kV(s), \quad \text{d.h.} \quad M(f, e^\sigma r^k) > \{M(f, r)\}^k$$

für alle genügend großen r. Also, wenn man $M(f,r)=R$ setzt, findet man

$$M_{-1}(f,R^k)<e^{\sigma}\{M_{-1}(f,R)\}^k<(1+\delta)\{M_{-1}(f,R)\}^k<\{M_{-1}(f,R)\}^{k+\delta}$$

für alle genügend großen R, w. z. b. w.

Beweis von Satz 1. Jede ganze Funktion $f_1(z)$ der Ordnung $\varrho<\frac{1}{2}$ läßt sich als ein einfaches kanonisches Produkt darstellen:

$$f_1(z)=C\,z^{n_0}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),\qquad C \text{ Konstante},\ n_0\geq 0 \text{ ganz}, \tag{8}$$

wobei die von Null verschiedenen Nullstellen a_n nach ihren absoluten Beträgen $b_n=|a_n|$ durch

$$0<b_1\leq b_2\leq b_3\leq\cdots \tag{8'}$$

geordnet werden können. O. B. d. A. kann man den Faktor Cz^{n_0} weglassen. Gilt der Satz für die Produkte

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right), \tag{9}$$

so auch für die allgemeineren Produkte (8). Denn es ist

$$m(f_1,r)=|C|\,r^{n_0}\,m(f,r)\quad\text{und}\quad M(f_1,r)=|C|\,r^{n_0}M(f,r).$$

Unter $r_1(R)$ verstehe man die kleinste Lösung r der Gleichung $m(f_1,r)=R$. Für genügend großes R — etwa so groß, daß aus $M(f_1,r)>R$ die Ungleichung $|C|\,r^{n_0}>1$ folgt — ist

$$m\{f_1,r(R)\}>m\{f,r(R)\}=R.$$

Aus der Stetigkeit von $m(f_1,r)$ folgt, daß $r_1(R)<r(R)$. Gilt Satz 1 für $f(z)$, so hat man für genügend großes R

$$r_1(R)<r(R)<\{M_{-1}(f,R)\}^{L(\varrho)+\delta/2},\qquad \delta>0 \text{ beliebig}. \tag{10}$$

Aus $M(f_1,r)=|C|\,r^{n_0}M(f,r)$ folgt

$$r=M_{-1}\{f_1,|C|\,r^{n_0}M(f,r)\}<M_{-1}[f_1,\{M(f,r)\}^{1+\sigma}]$$

für beliebig kleines $\sigma>0$ und alle genügend großen r. Setzt man

$$M(f,r)=R,$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$r=M_{-1}(f,R)<M_{-1}(f_1,R^{1+\sigma})<\{M_{-1}(f_1,R)\}^{1+2\sigma} \tag{11}$$

für alle genügend großen R. δ sei so klein gewählt, daß

$$(1+2\sigma)\left\{L(\varrho)+\frac{\delta}{2}\right\}<L(\varrho)+\delta.$$

Dann ergeben (10) und (11)

$$r_1(R)<\{M_{-1}(f_1,R)\}^{L(\varrho)+\delta}$$

für alle genügend großen R. Die andere Hälfte von (5), d.h.

$$M_{-1}(f_1, R) < r_1(R),$$

ist trivial.

Es genügt sogar, den Satz für Funktionen mit reellen negativen Nullstellen zu beweisen, d.h. für Funktionen $g(z)$ der Form (9'):

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right) \tag{9'}$$

mit b_n wie in (8'). Man sieht sofort, daß

$$M(g, r) > M(f, r), \quad m(g, r) < m(f, r), \quad r_g(R) > r_f(R),$$

wobei $r_f(R)$ bzw. $r_g(R)$ die kleinste Lösung von $m(f, r) = R$ bzw. $m(g, r) = R$ ist. Gilt

$$r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta},$$

so folgt

$$r_f(R) < r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta} < \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\varrho)+\delta}.$$

Man beschränke sich also auf die Funktionen (9') von der Ordnung ϱ und betrachte deren Nullstellen, wobei die Anordnung (8') immer noch vorausgesetzt wird. Die Verteilung von diesen Nullstellen muß man etwas eingehender untersuchen, um das Verhalten von $m(g, r)$ für unsere Zwecke ausreichend zu beschreiben. Das wird mittels einer Konstruktion von LITTLEWOOD [*11*] und BESICOVITCH [*14*] geleistet.

Die Resultate von LITTLEWOOD und BESICOVITCH. Dieser Abschnitt ist im wesentlichen der Arbeit [*14*] von BESICOVITCH entnommen, wo man Beweise für die zitierten Behauptungen findet. Wir haben eine triviale, aber bequeme Abänderung in der Bezeichnung vorgenommen, indem wir die in (12) definierten c_n, d.h. die Logarithmen der Besicovitchschen c_n einführen.

Für jedes $\alpha > \varrho$ ist $\sum_{n=1} b_n^{-\alpha}$ konvergent [*17*, S. 249]. Weil die Glieder dieser Reihe positiv und monoton abnehmend sind, folgt $n b_n^{-\alpha} \to 0$ für $n \to \infty$, daher $b_n n^{-\frac{1}{\alpha}} \to \infty$ für $n \to \infty$. Für jedes $k < 1/\varrho$ strebt also $b_n n^{-k} \to \infty$. Wir nehmen ein festes $k' < 1/\varrho$ und setzen

$$c_n = \log(b_n n^{-k'}), \qquad c_n \text{ also reell.} \tag{12}$$

Es strebt $c_n \to \infty$ mit $n \to \infty$; folglich strebt der Ausdruck

$$A_1(s) = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_s}{s} \to \infty$$

für $s \to \infty$. $A_1(s)$ hat ein Minimum, das für höchstens endlich viele s-Werte angenommen wird; p_1 sei der größte unter diesen Werten. Dann gelten die Beziehungen

$$A_1(p_1) = d_1$$
$$c_1 \geq d_1, \quad c_{p_1} \leq d_1$$
$$A_1(s) \geq d_1 \quad \text{für} \quad s \geq 1.$$

Auf dieselbe Weise betrachtet man das Minimum (angenommen für $s=p_2$ und für kein $s>p_2$) des Ausdrucks

$$A_2(s)=\frac{c_{p_1+1}+c_{p_1+2}+\cdots+c_{p_1+s}}{s},$$

nämlich $A_2(p_2)=d_2>d_1$ mit $c_{p_1+1}\geq d_2$, $c_{p_1+p_2}\leq d_2$ und $A_2(s)\geq d_2$ für $s\geq 1$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Folge $\{p_i\}$ mit p_i ganz und positiv, und die Folge $\{d_i\}$ mit d_i reell und $d_1<d_2<\cdots$. Diese Folgen sind so beschaffen, daß

$$(13)\quad \begin{cases} A_i(p_i)=\dfrac{c_{t_{i-1}+1}+c_{t_{i-1}+2}+\cdots+c_{t_i}}{p_i}=d_i, \qquad i\geq 1, \\ c_{t_{i-1}+1}\geq d_i, \qquad c_{t_i}\leq d_i \\ \text{und} \\ \dfrac{c_{t_{i-1}+1}+c_{t_{i-1}+2}+\cdots+c_{t_{i-1}+s}}{s}=A_i(s)\geq d_i \quad \text{für alle } s\geq 1. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$t_i=p_1+\cdots+p_i, \qquad t_0=0.$$

Besicovitch hat bewiesen, daß für vorgegebenes $\varepsilon>0$ und für alle genügend große i die Ungleichung

$$(14)\qquad m(g,r)>\{M(g,r)\}^{-\varepsilon+\cos\pi\varrho'}, \qquad \varrho'=\frac{1}{k'}>\varrho$$

im Intervall

$$(15)\qquad e^{d_i}(t_i+\tfrac{1}{2})^{k'}\leq r\leq e^{d_{i+1}}(t_i+\tfrac{1}{2})^{k'}$$

gilt.

Wir wollen die obigen Resultate von Besicovitch anwenden, um zu zeigen, daß die die Ungleichung (14) befriedigenden r-Werte mit einer gewissen mindesten Häufigkeit vorkommen und sogar, daß benachbarte Intervalle (15) nicht allzu weit voneinander entfernt liegen. Daraus wird folgen, daß $r(R)$ und $M_1(f,R)$ Größen derselben Ordnung sind.

Es seien k und k' so gewählt, daß

$$(16)\qquad \frac{1}{\varrho}>k>k'>2; \qquad \varrho<\frac{1}{k}<\frac{1}{k'}=\varrho'<\frac{1}{2}.$$

Es strebt $b_n n^{-k}\to\infty$ mit $n\to\infty$. Also gilt für alle genügend große n

$$b_n n^{-k'}>e\,n^{k-k'}$$

und nach (12)

$$(17)\qquad c_n=\log(b_n n^{-k'})>(k-k')\log n+1>(k-k')\log(n+\tfrac{1}{2}).$$

Wir setzen S_i für den rechten Endpunkt des i-ten Intervalls (15) und s_i für den linken Endpunkt des $(i+1)$-ten Intervalls:

$$S_i=e^{d_{i+1}}(t_i+\tfrac{1}{2})^{k'}$$
$$s_i=e^{d_{i+1}}(t_{i+1}+\tfrac{1}{2})^{k'}.$$

Nach (13), (17) ist

$$d_{i+1} > c_{t_{i+1}} > (k - k') \log (t_{i+1} + \tfrac{1}{2})$$

und damit

$$e^{d_{i+1}} > (t_{i+1} + \tfrac{1}{2})^{k-k'}$$

für alle genügend große i. Andererseits gilt für großes i

$$S_i > e^{d_{i+1}} > (t_{i+1} + \tfrac{1}{2})^{k-k'}$$

und somit

$$s_i < e^{d_{i+1}} \left(e^{d_{i+1}}\right)^{k'/(k-k')} = e^{d_{i+1}(k/k-k')} < S_i^{k/k-k'}.$$

Nach den Resultaten von BESICOVITCH kann man die Ungleichung

$$s_i < S_i^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)}$$

so deuten: Es gibt ein Y, so daß für $R > Y$ das Intervall $(R, R^{k/(k-k')})$ mindestens einen die Ungleichung (14) befriedigenden Punkt r enthält.

Zu gegebenem R sei r_1 die Lösung der Gleichung

$$M(g, r) = R^{\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}}.$$

R sei so groß gewählt, daß r_1 größer als Y ist. Dann liegt im Intervall $(r_1, r_1^{k/k-k'})$ wenigstens ein Punkt r_2, für den gilt

$$m(g, r_2) > \{M(g, r_2)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \varrho')} > \{M(g, r_1)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \varrho')} = R. \tag{18}$$

Weil $m(g, r)$ eine stetige Funktion von r ist, ist $r(R)$, die kleinste Lösung von $m(g, r) = R$, kleiner als r_2 und $r_2 < r_1^{k/k-k'}$. Trivialerweise ist $r(R) > M_{-1}(g, R)$. Somit haben wir tatsächlich für alle genügend großen R:

$$M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \left\{M_{-1}\left(g, R^{\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}}\right)\right\}^{\frac{k}{k-k'}}. \tag{5'}$$

Nach Hilfssatz 1 ist für alle genügend großen R

$$r(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)\left(\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'} + \frac{\delta}{3}\right)}, \tag{19}$$

wobei $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden darf. Im folgenden versuchen wir, im Ausdruck (19) einen möglichst kleinen Exponenten zu erhalten.

Man setze $k = 1/\varrho_1$. Die Ungleichungen (16) ergeben

$$\varrho < \varrho_1 < \varrho' < \tfrac{1}{2}. \tag{20}$$

Es sei

$$\frac{1}{L(\varrho)} = \limsup_{\substack{\varrho_1, \varrho' \\ \varrho < \varrho_1 < \varrho' < \frac{1}{2}}} (1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho' = \max_{\varrho \leq \varrho' \leq \frac{1}{2}} (1 - \varrho/\varrho') \cos \pi \varrho'.$$

Man nehme ϱ_1, ϱ' wie in (20) und ferner so, daß

$$(1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho' > 1/\left(L(\varrho) + \delta/3\right),$$

also

$$\frac{k}{k-k'} \cdot \frac{1}{\cos \pi \varrho'} = \frac{1}{(1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho'} < L(\varrho) + \frac{\delta}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig klein zu wählen; es sei so klein, daß

$$\frac{k}{k-k'} \cdot \frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'} < L(\varrho) + \frac{2\delta}{3}$$

für die jetzt gewählten k, k'. Mit diesen Werten von k, k' und ε, die allein von ϱ und δ abhängen, ergibt die obige Diskussion [insbesondere (5')], daß für alle genügend großen R

$$M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \{M_{-1}(g, R)\}^{(L(\varrho)+\delta)} \tag{5}$$

ist. Also ist Satz 1 für die Funktion (9') und somit allgemein bewiesen worden.

Das Verhalten des kleinsten Betrages hat natürlich Konsequenzen für die Niveaulinien einer ganzen Funktion:

Satz 2. *Es seien $B > A > 0$, $R > 0$ und $g(z)$ eine in $|z| \leq B$ reguläre Funktion mit den Eigenschaften:*

$$\text{für } |z| < A \text{ ist } |g(z)| < R,$$
$$\text{für } |z| = B \text{ ist } |g(z)| > R;$$

dann gibt es in $A \leq |z| < B$ eine einfach geschlossene, den Nullpunkt enthaltende Kurve Γ, auf der $|g(z)| = R$ gilt.

Insbesondere sei $g(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$; dann gibt es ein $R_0 > 0$, so daß für alle $R > R_0$ der Kreisring

$$M_{-1}(g, R) \leq |z| < r(R+1) \tag{21}$$

eine den Nullpunkt enthaltende, einfach geschlossene Kurve Γ enthält, auf der $|g(z)| = R$ gilt.

Beweis. Man nehme die zusammenhängende (nach dem Satz vom Maximum sogar einfach zusammenhängende) Komponente K der offenen Menge $\{z \,|\, |g(z)| < R\}$, die den Kreis $|z| < A$ einschließt. Γ wird als Rand von K gewählt. Der Rand von K besteht aus Niveaukurvenstücken, auf denen $|g(z)| = R$ gilt. Aus der Kompaktheit der in der Kreisscheibe $|z| \leq B$ gelegenen Niveaukurven $|g(z)| = R$ folgt, daß diese Kurven eine endliche Gesamtbogenlänge haben. Von einem beliebigen Punkt Q auf dem Rand von K ausgehend, verfolge man irgendeinen durch Q laufenden Zweig von Rand K; man gehe immer in der gleichen Richtung weiter; stößt man auf einen Kreuzungspunkt P der Niveaukurven, indem man in P entlang dem Kurvenast α ankommt, so soll man P entlang den nach folgender Vorschrift gewählten Ast α' verlassen: α' schließt mit α in der Umgebung von P einen Winkelraum ein, dessen innere Punkte zu K gehören. Dann gehört auch der Ast α' zu Rand K. Dieser Vorschrift für jeden eventuell vorkommenden Kreuzungspunkt folgend, kann man den Rand von K unbegrenzt verfolgen. Wegen der Beschränktheit der Gesamtbogenlänge trifft man einen Punkt η mehr als einmal; Γ sei der zwischen dem ersten und zweiten Auftreten von η durchlaufene Teil von Rand K; wenn man die durchlaufene Bogenlänge als Parameter einführt, erkennt man, daß Γ eine Jordan-Kurve bildet, auf der $|g(z)| = R$ gilt. Im Innern von Γ ist $|g(z)| < R$.

Es gibt in $|z|<B$ nur endlich viele Nullstellen von $f'(z)$, d.h. Kreuzungspunkte des Niveaugebildes. Man nehme einen Punkt $\xi \in \Gamma$, der kein Kreuzungspunkt ist. Nach dem Satz vom größten Betrag wird eine kleine Kreisscheibe um ξ durch die Kurve Γ in zwei Teile K_1, K_2 geteilt, für die $|f(z)|>R$ bzw. $|f(z)|<R$. K_2 gehört zum Innern von Γ. Nun gehört Γ zum Rand von K. Es folgt, daß K mit dem Innern von Γ identisch ist und daß Γ den Nullpunkt enthält.

Die Behauptung über ganze Funktionen folgt unmittelbar aus dem ersten Teil des Satzes.

Für ganze Funktionen höherer Ordnung brauchen geschlossene Niveaulinien überhaupt nicht zu existieren; so sind die Niveaulinien von e^z z.B. die Geraden $\operatorname{Re} z = \text{konst}$.

§ 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven

Die grundlegenden Sätze 1 und 2 kann man jetzt anwenden, um Ergebnisse über die Wertverteilung von zusammengesetzten Funktionen der Form $f\{g(z)\}$ abzuleiten.

Satz 3. *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze Funktionen der Ordnung ϱ_f bzw. ϱ_g, $0 \leq \varrho_f < \frac{1}{2}$, $0 \leq \varrho_g < \frac{1}{2}$. Dann existiert zu gegebenen $\varepsilon>0$, $\delta>0$ eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven Γ_i, die den Nullpunkt enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben: Es seien $\bar{\sigma}_i$ und $\underline{\sigma}_i$ die größte bzw. kleinste Entfernung zwischen dem Nullpunkt und Γ_i. Dann*

(i) $\underline{\sigma}_i \to \infty$,

(ii) $\bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\varrho_g)+\delta}$, *wobei $L(\varrho_g)$ die im Satz 1 erklärte Bedeutung hat,*

(iii) *auf Γ_i (die innerhalb von $|z|<\bar{\sigma}_i$ liegt) ist*

$$|f\{g(z)\}| > M\left[f, M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right)\right]^{-\varepsilon+\cos \pi \varrho_f} \tag{22}$$

für $z \in \Gamma_i$. Ferner lassen sich positive Konstanten $K>1$ und r_0 finden, so daß für $s>r_0$ jeder Kreisring $s<|z|<s^K$ eine solche Kurve Γ enthält.

Beweis. Wir nehmen gemäß Satz 1 so große R-Werte, daß

$$r_g(R) < M_{-1}(g, R)^{L(\varrho_g)+\delta}$$

ist [$r_g(R)$ ist die kleinste Lösung der Gleichung $m(g, r) = R$], und daß die Voraussetzungen des Satzes 2 bezüglich der Funktion $g(z)$ erfüllt werden. Unter diesen wählen wir einen solchen Wert R_i, daß auch (Satz von LITTLEWOOD-WIMAN)

$$m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon+\cos \pi \varrho_f}$$

gilt. Nach Satz 2 gibt es eine Jordan-Kurve Γ_i in dem Kreisring

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < r_g(R_i+1),$$

für die $|g(z)| = R_i$ ist. Für großes R_i ist nach Hilfssatz 1

$$r_g(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i + 1)\}^{L(\varrho_g) + \frac{\delta}{2}} < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta},$$

und Γ_i liegt daher in

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}. \tag{23}$$

Für $z \in \Gamma_i$ hat man

$$|f\{g(z)\}| > m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f}. \tag{24}$$

Nun ist

$$\bar{\sigma}_i \leq r(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}$$

d.h.

$$R_i > M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g) + \delta}}\right),$$

und (24) wird somit zu (22). Weil $\underline{\sigma}_i > M_{-1}(g, R_i)$ ist, ist (23) gleichbedeutend mit

$$\underline{\sigma}_i \leq |z| \leq \bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\varrho_g) + \delta} \qquad \text{für } z \in \Gamma_i.$$

Zu beweisen bleibt nur die Aussage über die Verteilung der Γ_i-Kurven. Nehmen wir $\varepsilon' < \varepsilon$, $\frac{1}{2} > \varrho' > \varrho_f$, so daß

$$\cos(\pi \varrho') - \varepsilon' = \cos(\pi \varrho_f) - \varepsilon.$$

Aus dem Beweis von Satz 1 [vgl. (17), (18)] sieht man, daß für alle genügend großen R ($> A$ etwa) jedes Intervall (R, R^c) — wobei $c > \varrho'/(\varrho' - \varrho_f)$ — ein solches $\tilde{R}$ enthält, daß

$$m(f, \tilde{R}) > M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon' + \cos \pi \varrho'} = M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f}. \tag{25}$$

Im folgenden wollen wir nur so große s-Werte wählen, daß $R = M(g, s) > A$. Nach dem Hilfssatz 1 ist für beliebiges, festes $\tilde{\varepsilon} > 0$ und passend großes s

$$M_{-1}(g, R^c) < \{M_{-1}(g, R)\}^{c + \tilde{\varepsilon}} = s^{c + \tilde{\varepsilon}}$$

und daher

$$M(g, s^{c + \tilde{\varepsilon}}) > \{M(g, s)\}^c = R^c.$$

In (R, R^c) liegt ein $\tilde{R}$, das (25) genügt. In $(s, s^{c + \tilde{\varepsilon}})$ liegt ein $\tilde{s}$ mit $M(g, \tilde{s}) = \tilde{R}$. Also liegt nach (23) im Kreisring

$$\tilde{s} \leq |z| < \tilde{s}^{L(\varrho_g) + \delta}$$

und somit sicher im Kreisring

$$s \leq |z| < s^{(c + \tilde{\varepsilon})(L(\varrho_g) + \delta)}$$

eine den Nullpunkt umschlingende Jordan-Kurve Γ des behaupteten Typs. Das K der Behauptung ist gleich

$$(c + \tilde{\varepsilon})\left(L(\varrho_g) + \delta\right).$$

Zusatz. Es ist klar, daß $M[f\{g(z)\}, r] \leq M[f, M(g, r)]$. Dann ist für die rechte Seite von (22)

$$M\left[f, M\left\{g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right\}\right]^{-\varepsilon+\cos\pi\varrho_f} > M\left[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right]^{-\varepsilon+\cos\pi\varrho_f}$$
$$\geq M[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i]^{\left(\frac{\cos\pi\varrho_f-\varepsilon-\varepsilon'}{L(\varrho_g)+\delta}\right)}$$

für beliebig kleines $\varepsilon'>0$ und passend großes $\bar{\sigma}_i$ nach Hilfssatz 1.

Notwendig, daß eine gegebene ganze Funktion $\Phi(z)$ sich in der Form $\Phi(z)=f\{g(z)\}$ aus zwei ganzen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ von kleinerer Ordnung als $\frac{1}{2}$ zusammensetzen läßt, ist die Bedingung, daß es eine Konstante $\alpha>0$ und eine Folge von Kurven Γ_i (mit $\bar{\sigma}_i=\operatorname{Max}|z|$, $z\in\Gamma_i$) der oben beschriebenen Beschaffenheit gibt, auf denen

$$|\Phi(z)| > \{M(\Phi, \bar{\sigma}_i)\}^{\alpha} \tag{26}$$

ist. Obgleich wir jetzt Kurven Γ_i haben, für die sich der kleinste Betrag mit dem größten vergleichen läßt, wird über die absolute Größe von $|f\{g(z)\}|$ auf diesen Kurven immer noch fast nichts ausgesagt: Es wäre denkbar, etwa bei unregelmäßigem Wachstum von $f\{g(z)\}$, daß $M[f\{g(z)\}, r]$ in gewissen, die Kurven Γ_i enthaltenden Bereichen verhältnismäßig kleine Werte annimmt. Deshalb ist interessant der

Satz 4. *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze (transzendente) Funktionen der Ordnungen ϱ_f bzw. ϱ_g, $0<\varrho_f<\frac{1}{2}$, $0\leq\varrho_g<\frac{1}{2}$; L sei eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gibt es eine Folge Γ_i von geschlossenen, den Nullpunkt enthaltenden, und den Anforderungen* (i) *und* (ii) *von Satz 3 genügenden Jordan-Kurven, auf denen*

$$|f\{g(z)\}| > \exp(\bar{\sigma}_i^L) \tag{27}$$

für $z\in\Gamma_i$ gilt, wobei $\bar{\sigma}_i=\operatorname{Max}_{z\in\Gamma_i}|z|$.

Beweis. Es folgt bekanntlich aus den Phragmen-Lindelöfschen Methoden, daß zu gegebenem $\varepsilon>0$ und einer ganzen Funktion $f(z)$ der Ordnung ϱ_f, $0<\varrho_f<\frac{1}{2}$, sich beliebig große R-Werte R_i finden lassen, für die $m(f, R_i) > \exp(R_i^{\varrho_f-\varepsilon})$. Im Beweis von Satz 3 könnte man solche Werte für R_i nehmen. Dann gibt es in

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| \leq \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g)+\delta}$$

für genügend großes R_i Kurven Γ_i, auf denen

$$|f\{g(z)\}| > \exp(R_i^{\varrho_f-\varepsilon}) > \exp\left[\left\{M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g+\delta)}}\right)\right\}^{\varrho_f-\varepsilon}\right]. \tag{28}$$

weil $\bar{\sigma}_i < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g)+\delta}$ ist. Zu gegebenem $K>0$ ist für genügend großes $\bar{\sigma}_i$ (und also R_i)

$$M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right) > \bar{\sigma}_i^{\left(\frac{K}{L(\varrho_g)+\delta}\right)}.$$

(28) wird daher zu

$$|f\{g(z)\}| > \exp\left[\bar{\sigma}_i^{\left\{\frac{K(\varrho_f-\varepsilon)}{L(\varrho_g)+\delta}\right\}}\right]. \tag{29}$$

Der Exponent von $\bar{\sigma}_i$ in (29) kann durch passende Wahl von K beliebig groß gemacht werden, insbesondere größer als das L von (27). Die Funktion $f\{g(z)\}$ ist von unendlicher Ordnung.

Bemerkung. Die Bedingung $\varrho_f > 0$ in Satz 4 ist wesentlich. Wenn $\varrho_f = 0$, $0 \leq \varrho_g < \infty$, ist es möglich, daß $f\{g(z)\}$ sogar eine endliche Ordnung hat. (Vgl. PÓLYA [*10*], BAKER [*8*].)

Nach Satz 4, wie nach dem in § 2 zitierten Satz von PÓLYA ist es klar daß $\varrho_f > 0$ eine unendliche Ordnung für $f\{g(z)\}$ zur Folge hat. Trotz der Pólyaschen Relation braucht die Wachstumsgeschwindigkeit von $f\{g(z)\}$ keineswegs so hoch wie $\exp\{\exp(r^{\varrho_g})\}$ [ein Ausdruck, der ungefähr der Zusammensetzung von $\exp(r^{\varrho_f})$ und $\exp(r^{\varrho_g})$ entspricht] zu sein. Das beruht auf der Möglichkeit einer Wechselwirkung zwischen zwei unregelmäßigen Wachstumsarten für $f(z)$ und $g(z)$. Erst wenn man weitere Wachstumsbedingungen hinzufügt [etwa $\varrho_f > 0$, $0 < \varrho_g =$ untere Ordnung von $g(z)$] wird die Existenz eines $\alpha > 0$ gesichert, für das

$$M[f\{g(z)\}, r] \neq 0\{\exp(\exp r^{\alpha})\}.$$

Auf diese Verhältnisse gehen wir nicht näher ein. Um aber zu zeigen, daß sich die Ungleichung (27) von Satz 4 im allgemeinsten Falle nicht sehr verbessern läßt, beweisen wir den

Satz 5. *Gegeben seien zwei Konstanten ϱ_g, ϱ_G (mit $0 < \varrho_g < 1$, $0 < \varrho_G < 1$) und eine reelle Funktion $\mu(r)$ mit $\lim_{r\to\infty} \mu(r) = \infty$. Dann existieren zwei ganze Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ der Ordnung ϱ_g bzw. ϱ_G, so daß*

$$M[G\{g(z)\}, r] < \exp(r^{\mu(r)}) \tag{30}$$

für alle genügend großen r gilt.

Da Verkleinerung von $\mu(r)$ die Behauptung verschärft, können wir von vornherein

$$\mu(r) \leq \log r \tag{31}$$

annehmen. Als Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes schicken wir ein paar Bemerkungen über den bekannten Zusammenhang zwischen der Nullstellenverteilung und dem Wachstum einer ganzen Funktion voraus.

Hilfssatz 2. *Für ein kanonisches Produkt $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ sei $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen, deren Betrag nicht größer als r ist. Wenn für $0 < \varrho < 1$ stets $n(r) \leq r^{\varrho}$, aber $n(r) = O(r^{\varrho-\varepsilon})$ für kein $\varepsilon > 0$ ist, so ist die Ordnung von $g(z)$ gleich ϱ.*

Beweis. Die Ordnung eines kanonischen Produktes ist gleich dem Konvergenzexponenten der Nullstellen (vgl. z.B. [*17*]). Nun folgt aus $n(r) \leq r^{\varrho}$ die Konvergenz von $\sum b_n^{-(\varrho+\delta)}$, $b_n = |a_n|$, für jedes positive δ (Vergleich mit

$\sum n^{-(1+\delta/\varrho)}$); d.h. der Konvergenzexponent und damit die Ordnung sind nicht größer als ϱ. Wenn die Ordnung von $g(z)$ gleich A ist, folgt aus dem Jensenschen Satz, daß $n(r)=O(r^{A+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon>0$ gilt. Wäre also die Ordnung A, $A<\varrho$, so wäre $n(r)=O(r^{A+\varepsilon})$ für jedes positive ε, also gleich $O(r^{(A+\varrho)/2})$ entgegen der Annahme des Hilfssatzes.

Bezeichnungen. Ein Polynom

$$P(z)=\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_m}\right), \qquad 0<|a_1|\leq|a_2|\cdots\leq|a_n|=T$$

soll von der Klasse (ϱ, T) sein, wenn für die Anzahlfunktion der Nullstellen $n(r)\leq r^{\varrho}$ gilt, d.h. für $|a_m|\geq m^{1/\varrho}$, $m=1, 2, \ldots, n$.

Ein festes Polynom $P(z)$ von der Klasse (ϱ, T) bestimmt für $W>T$ die Funktionenklasse $\{P, \varrho, W\}$ aller Funktionen g

$$g(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_m}\right), \qquad 0<|b_1|\leq|b_2|\leq\cdots \tag{32}$$

mit $b_i=a_i$, $i=1, \ldots, n$,

$$|b_{n+1}|>W>T,$$

und $n_g(r)\leq r^{\varrho}$.

Lemma 3a) *Für $\varrho<1$ seien ein Polynom $P(z)$ von der Klasse (ϱ, T) und ein $V>0$ gegeben. Dann gibt es ein W mit $W>V$, so daß für jede Funktion $g(z)$ der Klasse $\{P, \varrho, W\}$*

$$\tfrac{1}{2}M(P, r)<M(g, r)<2M(P, r) \tag{33}$$

für $r\leq V$ gilt.

3b) *Zu der als fest betrachten Funktion $\mu(r)$ von Satz 5 und einem Polynom $P(z)$ gibt es ein $U=U(P)$, so daß*

$$2M(P, r)<r^{\mu(r)} \tag{34}$$

für $r\geq U$ gilt. Ist P von der Klasse (ϱ, T), so werden wir immer annehmen, daß $U>T$ ist.

3c) *In 3a) wählen wir V größer als das U von 3b). Dann gelten* (33) *und*

$$M(g, r)<r^{\mu(r)} \tag{35}$$

für alle r in $[U, V]$ und $g\in\{P, \varrho, W\}$.

Beweis. 3a) Für $\left|\frac{z}{b_m}\right|<\frac{1}{2}$ ist

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{b_m}\right)\right|=\left|\frac{z}{b_m}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{z}{b_m}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{b_m}\right)^2+\cdots\right\}\right|$$

$$<\left|\frac{z}{b_m}\right|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots\right)=\frac{2|z|}{|b_m|}.$$

Ist

$$W>2V, \tag{36}$$

so gilt für $|z| \leq V$ (mit der Bezeichnung $|b_m| = d_m$)

$$(37) \qquad \left|\log \prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| = \sum_{m > n(W)} \left|\log\left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| \leq 2|z| \sum_{m > n(W)} d_m^{-1}.$$

Es ist $n(W) \leq W^\varrho$. Man spalte die letzte Summe von (37) auf folgende Weise auf:

$$\sum_{m > n(W)} d_m^{-1} = \sum_{n(W) < m < W^\varrho} d_m^{-1} + \sum_{m \geq W^\varrho} d_m^{-1} = S_1 + S_2.$$

In S_1 ist $d_m > W$, also ist $S_1 < W^\varrho W^{-1}$. Für alle r gilt $n(r) \leq r^\varrho$, d.h. es gilt

$$d_m^{-1} < m^{-1/\varrho} < m^{-2},$$

und somit

$$S_2 < \sum_{m \geq W^\varrho} m^{-2} = O(W^{-\varrho}).$$

(37) wird nun zu

$$(38) \qquad \left|\log \prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| = 2|z|\, O(W^{-\varrho} + W^{\varrho-1}).$$

Offenbar kann man beliebig große W wählen, so daß (36) erfüllt und (38) beliebig klein wird. Diese Wahl kann gleichmäßig für alle $g(z) \in \{P, \varrho, W\}$ getroffen werden. Dadurch kann man erreichen, daß

$$\frac{1}{2} < \left| \prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| < 2,$$

also

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{g(z)}{P(z)}\right| < 2$$

für $|z| \leq V$ gilt. Hieraus folgt die Ungleichung (33) für $|z| \leq V$. 3b) und 3c) sind trivial.

Beweis von Satz 5. Der Grundgedanke der Konstruktion ist der folgende: Um die Größenbeschränkung (30) zu bewirken, werden $G(z)$ und $g(z)$ als Funktionen mit sehr unregelmäßigem Wachstum angesetzt. Nämlich $G(Z)$ kann für die Werte von Z verhältnismäßig groß sein, die als Werte von $g(z)$ dort vorkommen, wo $g(z)$ verglichen mit $|z|$ verhältnismäßig klein ist. Umgekehrt, ist $Z = g(z)$ verglichen mit $|z|$ recht groß, so soll $G(Z)$ verglichen mit $|Z|$ von mäßiger Größe sein. Dieser unbestimmte Gedanke wird verwirklicht, indem wir zwei nach ∞ strebende Folgen

$$(39) \qquad 0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1 < t_2 < u_2 < v_2 < w_2 < t_3 < \cdots,$$

$$(40) \qquad 0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1 < V_1 < W_1 < T_2 < U_2 < V_2 < W_2 < T_3 < \cdots$$

konstruieren. Mit ihnen bilden wir

$$(41) \qquad q_m = [t_m^{\varrho_q}] - [t_{m-1}^{\varrho_q}], \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$42) \qquad Q_m = [T_m^{\varrho_G}] - [T_{m-1}^{\varrho_G}], \qquad m = 1, 2, \ldots$$

(worin $t_0 = T_0 = 0$ zu setzen ist), die Polynome

$$p_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_g, t_m), \tag{43}$$

$$P_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_G, T_m) \tag{44}$$

und die ganzen Funktionen

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k}, \tag{45}$$

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k}. \tag{46}$$

Wir wollen nachweisen, daß $g(z)$ und $G(z)$ die Behauptung von Satz 5 erfüllen. Für $n_g(r)$, die Anzahlfunktion der Nullstellen von $g(z)$ gilt

$$n_g(t_m) = [t_m^{\varrho_g}]$$

und für alle r mit $t_m < r < t_{m+1}$

$$n_g(r) = [t_m^{\varrho_g}] < r^{\varrho_g}.$$

Nach Hilfssatz 2 ist die Ordnung von $g(z)$ genau ϱ_g. Entsprechend ist die Ordnung von $G(z)$ genau ϱ_G.

Um die wichtigste Behauptung (30) zu beweisen, richten wir die Folgen so ein, daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die endlichen Teilfolgen von (39) und (40):

$$0 < t_1 < \cdots < t_n < u_n < v_n < w_n, \tag{47}$$

$$0 < V_0 < W_0 < \cdots < V_{n-1} < W_{n-1} < T_n < U_n \tag{48}$$

die in (49) bis (53) ausgesprochenen Eigenschaften besitzen: Für jede Funktion $g_n(z)$ der Klasse $\{p_n, \varrho_g, w_n\}$ gelten

$$M(g_n, u_k) < V_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

$$M(g_n, v_k) > U_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{50}$$

$$M(g_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [u_k, v_k], \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{51}$$

Für jede Funktion $G_n(z)$ der Klasse $\{P_{n-1}, \varrho_G, W_{n-1}\}$ gelten

$$M(G_n, r) < 2 \quad \text{in } [0, V_0], \tag{52}$$

$$M(G_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [U_k, V_k], \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{52'}$$

Weiter gilt

$$2M(P_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{für } r \geq U_n. \tag{53}$$

Nehmen wir vorläufig an, die angegebenen Anforderungen (49) bis (53) für $n = 1, 2, \ldots$ seien erfüllt. Wir zeigen, daß dann die Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ von (45) bzw. (46) die Ungleichung (30) erfüllen. Die Funktionen $g(z)$

und $G(z)$ gehören den Klassen $\{p_n, \varrho_g, w_n\}$ bzw. $\{P_n, \varrho_G, W_n\}$ für alle n an. Daraus und aus (49) bis (52′) folgen

$$M(g, u_k) < V_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{54}$$

$$M(g, v_k) > U_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{55}$$

$$M(g, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in} \quad [u_k, v_k], \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{56}$$

$$M(G, r) < 2 \quad \text{in} \quad [0, V_0], \tag{57}$$

$$M(G, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in} \quad [U_k, V_k], \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{57′}$$

Weil $g(z)$ bzw. $G(z)$ die Ordnung $\varrho_g < 1$ bzw. $\varrho_G < 1$ hat, gelten für alle großen r-Werte

$$M(g, r) < \exp(r^{\varrho_g + 1}) \quad \text{bzw.} \quad M(G, r) < e^r. \tag{58}$$

Allgemein gilt

$$M\{G(g), r\} \leq M\{G, M(g, r)\}. \tag{58′}$$

(i) Für r gemäß $v_{k-1} \leq r \leq u_k$ liegt $R = M(g, r)$ in $[U_{k-1}, V_{k-1}]$ nach (54), (55). Hiernach und nach (57′) ist

$$M(G, R) < R^{\mu(R)}$$

und (58′) wird zu

$$\begin{aligned} M\{G(g), r\} &< R^{\mu(R)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}^{\mu\{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}} \quad \text{nach (58)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}^{r^{\varrho_g + 1}} \quad \text{nach (31)} \\ &= \exp(r^{2\varrho_g + 2}) < \exp(r^{\mu(r)}) \end{aligned}$$

für alle genügend großen r (oder k).

(ii) Für r gemäß $u_k \leq r \leq v_k$ ist nach (56)

$$R = M(g, r) < r^{\mu(r)}$$

und (58′) wird zu

$$M\{G(g), r\} \leq e^R < \exp(r^{\mu(r)})$$

für alle genügend großen r (oder k). Alle r-Werte fallen entweder in Intervalle $[v_{k-1}, u_k]$ oder Intervalle $[u_k, v_k]$, so daß die Behauptung (30) von Satz 5 bewiesen ist.

Es bleibt, die induktive Konstruktion der Folgen (39), (40) mit den Eigenschaften (49) bis (53) nachzuholen.

$n = 1$. Man wähle $t_1 > 0$ und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom $p_1(z)$ der Klasse (ϱ_g, t_1). Nach Hilfssatz 3b existiert $u_1 = U(p_1) > t_1$, so daß für $r \geq u_1$

$$2M(p_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{59}$$

gilt. Dann wähle man

$$V_0 > 2M(p_1, u_1) \tag{60}$$

und gemäß Lemma 3a ein $W_0 > V_0$ so, daß für jede Funktion $G_1(z) \in \{P_0, \varrho_G, W_0\}$ — wobei $P_0(z) \equiv 1$ —

$$M(G_1, r) < 2 \tag{61}$$

für $r \leq V_0$ gilt. Jetzt nimmt man ein $T_1 > W_0$, definiert gemäß (42) und (44) das Polynom $P_1(z)$ der Klasse (ϱ_G, T_1) und findet nach Hilfssatz 3b ein $U_1 = U(P_1) > T_1$ so, daß für $r \geq U_1$

$$2M(P_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{62}$$

ist. $v_1 > u_1$ sei so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{2} M(p_1, v_1) > U_1, \tag{63}$$

und $w_1 > v_1$ so groß, daß alle $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$ die Ungleichungen

$$\tfrac{1}{2} M(p_1, r) < M(g_1, r) < 2M(p_1, r) \tag{64}$$

und

$$M(g_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{65}$$

in $[u_1, v_1]$ erfüllen. Für jedes $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$ ist nach (60) und (64)

$$M(g_1, u_1) < 2M(p_1, u_1) < V_0, \tag{66}$$

und nach (63) und (64)

$$M(g_1, v_1) > \tfrac{1}{2} M(p_1, v_1) > U_1. \tag{67}$$

Wir haben also

$$0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1$$

und

$$0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1$$

konstruiert, für die die Gln. (66), (67), (65), (61), (62) die entsprechenden Gln. (49) bis (53) der Induktionsbehauptung im Fall $n = 1$ bilden.

Allgemeiner Induktionsschritt. Jetzt nehmen wir an, die Konstruktion sei für $n = 1, 2, \ldots, N$ ausgeführt. Schon konstruiert sind die endlichen Teilfolgen

$$0 < t_1 < \cdots < t_N < u_N < v_N < w_N$$
$$0 < V_0 < \cdots < V_{N-1} < W_{N-1} < T_N < U_N.$$

Man wähle $t_{N+1} > w_N$ und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom $p_{N+1}(z)$ der Klasse (ϱ_g, t_{N+1}). Nach Hilfssatz 3b existiert $u_{N+1} = U(p_{N+1}) > t_{N+1}$ so, daß für $r \geq u_{N+1}$

$$2M(p_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{68}$$

gilt. Dann wähle man V_N gemäß

$$V_N > 2M(p_{N+1}, u_{N+1}) \tag{69}$$

und nach Lemma 3a ein $W_N > V_N$ so, daß für jede Funktion

$$G_{N+1}(z) \in \{P_N, \varrho_G, W_N\}$$

$$M(G_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{70}$$

für r in $[U_N, V_N]$ gilt. Jetzt nimmt man ein $T_{N+1} > W_N$, definiert gemäß (42) und (44) das Polynom $P_{N+1}(z)$ der Klasse (ϱ_G, T_{N+1}), und bestimmt nach Hilfssatz 3b ein $U_{N+1} = U(P_{N+1}) > T_{N+1}$ so, daß

$$2M(P_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{71}$$

für $r \geq U_{N+1}$ gilt. $v_{N+1} > u_{N+1}$ sei so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1}, \tag{72}$$

und w_{N+1} nach Hilfssatz 3c so groß, daß alle $g_{N+1}(z) \in \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$

$$\tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, r) < M(g_{N+1}, r) < 2M(p_{N+1}, r) \tag{73}$$

und

$$M(g_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{74}$$

in $[u_{N+1}, v_{N+1}]$ erfüllen. Für jedes $g_{N+1}(z) \in \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$ ist nach (69) und (73)

$$M(g_{N+1}, u_{N+1}) < 2M(p_{N+1}, u_{N+1}) < V_N, \tag{75}$$

und nach (72) und (73)

$$M(g_{N+1}, v_{N+1}) > \tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1}. \tag{76}$$

Wegen

$$\{p_N, \varrho_g, w_N\} > \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$$

und

$$\{P_N, \varrho_G, W_N\} > \{P_{N+1}, \varrho_G, W_{N+1}\}$$

genügt jedes g_{N+1} den Gln. (49), (50), (51) für $n = N+1$, $k = 1, \ldots, N$, und jedes G_{N+1} der Gl. (52') mit $n = N+1$, $k = 1, \ldots, N-1$, und der Gl. (52). Aber die Gln. (75), (76), (74), (70), (71) ergeben die Gln. (49), (50), (51) mit $n = N+1$, $k = N+1$, die Gl. (52') mit $n = N+1$, $k = N$ und die Gl. (53) mit $n = N+1$.

Hiermit ist die Induktion beendet.

II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$

§ 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind

An und für sich ist schon die Möglichkeit einer kommutativen Zusammensetzung

$$F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\} \tag{1}$$

der ganzen Funktion $F(z)$ aus den „vertauschbaren" ganzen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ von Interesse. Als Beispiel treten vor allem die Iterierten einer

gegebenen Funktion auf. Die Iterierten einer gegebenen Funktion $f(z)$ werden induktiv definiert:

$$f_0(z) = z, \quad f_1(z) = f(z), \quad f_{m+1}(z) = f_m\{f(z)\} = f\{f_m(z)\}, \tag{2}$$

wobei m ganz und positiv ist. Sie sind offenbar ganz. Wir werden unsere Resultate auch besonders auf die Iterationstheorie anwenden. Für Polynome haben RITT [18], [19] und JACOBSTHAL [20], für gebrochene Funktionen JULIA [21] die Zusammensetzung (1) untersucht. Auf den Fall, daß $f(z)$ und $g(z)$ [also auch $F(z)$] Polynome sind, wollen wir nicht eingehen, sondern verweisen auf [18], [19] und [20]. Die Vertauschbarkeit einer ganzen transzendenten Funktion mit einem Polynom kann man wegen des folgenden Satzes 6 weitgehend ausschließen. Im Beweis benutzen wir den

Hilfssatz 4. *Zu einer ganzen Funktion $f(z)$ gebe es zwei reelle positive Zahlen c, d und ein ganzes $n > 1$, so daß*

$$M(f, c r^n) < d\{M(f, r)\}^n; \tag{3}$$

dann ist $f(z)$ ein Polynom.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Hadamardschen Satz, der besagt, daß $\log M(f, r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Wir setzen $\log r = x$, $\log M(f, r) = V(x)$, $\log c = \gamma$, $\log d = \delta$. (3) nimmt die Form

$$V(n x + \gamma) < n V(x) + \delta. \tag{4}$$

Wir zeigen, daß es reelle A und B gibt, so daß

$$V(x) < A x + B$$

(wenigstens für alle genügend großen x). Man nehme ein festes $x_0 > \mathrm{Max}\left(0, \frac{-\gamma}{n-1}\right)$, ferner reelle A und B, welche die zwei Bedingungen

$$A x_0 + B > V(x_0) \tag{5}$$

und

$$A\gamma - (n-1) B > \delta \tag{6}$$

gleichzeitig erfüllen, z. B.

$$B = \frac{\gamma V(x_0) - x_0 \delta}{\gamma + (n-1) x_0}, \qquad A > \frac{(n-1) V(x_0) + \delta}{\gamma + (n-1) x_0}.$$

Für $x > \frac{-\gamma}{n-1}$ ist nun $n x + \gamma > x$: also mit der Definition

$$n x_0 + \gamma = x_1, \quad n x_{k-1} + \gamma = x_k$$

ist $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, und $x_k \to \infty$. Nach den obigen Definitionen ist

$$V(x_k) < A x_k + B, \tag{7}$$

wie man leicht induktiv beweist: Für $k = 0$ ist (7) nach (5) richtig.

Ist $V(x_{k-1}) < A\,x_{k-1} + B$, so ist nach (4)

$$V(x_k) < n\,V(x_{k-1}) + \delta < n\,A\,x_{k-1} + n\,B + \delta$$
$$= A(n\,x_{k-1} + \gamma) + n\,B - A\,\gamma + \delta < A\,x_k + B$$

nach (6). Wegen der Konvexität von $V(x)$ in x gilt $V(x) < A\,x + B$ auch für $x_k < x < x_{k+1}$, also für alle $x \geqq x_0$. Für $M(f, r)$ bedeutet das

$$M(f, r) < e^B r^A.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $f(z)$ ein Polynom.

Satz 6. *Das nichtkonstante Polynom $g(z)$ sei mit der ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ wie in der Gl. (1) angegeben vertauschbar; dann hat $g(z)$ die Gestalt $g(z) = z e^{2\pi m i/n} + b$, m und n ganz. Umgekehrt gibt es zu jedem Paar von ganzen Zahlen m, n und jedem komplexen b eine ganze transzendente Funktion $f(z)$, die mit $g(z) = z\ e^{2\pi m i/n} + b$ vertauschbar ist.*

Beweis. Es sei $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Dann ist

$$F(z) = f(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) = a_0 + a_1 f(z) + \cdots + a_n \big(f(z)\big)^n. \tag{8}$$

Für alle genügend großen r ist

$$|a_0 + \cdots + a_n z^n| > \frac{|a_n|\, r^n}{2} \quad \text{für } |z| > r. \tag{9}$$

Also enthält das Bild von $|z| > r$ bei der Abbildung $z \to g(z) = w$ keinen Punkt der Kreisscheibe $|w| \leq \frac{|a_n|\, r^n}{2}$, und das Bild $\mathfrak{B}$ von $|z| \leq r$ enthält die ganze Kreisscheibe. Dann ist

$$\begin{cases} M(F, r) = \underset{|z| \leq r}{\operatorname{Max}} |f(a_0 + \cdots + a_n z^n)| \\ \qquad = \underset{w \in \mathfrak{B}}{\operatorname{Max}} |f(w)| \geq \underset{|w| \leq \frac{|a_n| r^n}{2}}{\operatorname{Max}} |f(w)| = M\left(f, \frac{|a_n|\, r^n}{2}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Andererseits gibt es ein $K > 0$, so daß für $|w| > K$

$$|a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n| < 2\,|a_n|\,|w^n| \tag{11}$$

ist. Zu r sei z_r^* ein solcher Wert, daß

$$M(F, r) = |F(z_r^*)|, \qquad |z_r^*| = r.$$

Nach (8) ist dann

$$M(F, r) = F(z_r^*) = |a_0 + a_1 f(z_r^*) + \cdots + a_n \big(f(z_r^*)\big)^n|. \tag{12}$$

Weil $M(F, r)$ nach ∞ strebt, wird $|f(z_r^*)| > K$ für alle genügend großen r; nach (11) und (12) ist dann

$$M(F, r) < 2\,|a_n|\,|f(z_r^*)|^n \leq 2\,|a_n|\,\{M(f, r)\}^n; \tag{13}$$

also nach (10) und (13)

$$M\left(f, \frac{|a_n| r^n}{2}\right) \leq 2|a_n| \{M(f, r)\}^n.$$

Auf Grund des Hilfssatzes und der Annahme, $f(z)$ sei transzendent, erhält man $n=0$ oder $n=1$. Den Fall $n=0$ haben wir ausgeschlossen. Man hat noch festzustellen, welche linearen Polynome mit einer ganzen transzendenten Funktion vertauschbar sein können.

Es sei

$$f(az+b) = af(z) + b = F(z), \quad a \neq 0. \tag{14}$$

Zuerst sei $a \neq 1$. In diesem Falle führen wir die neue Veränderliche y und die neuen Funktionen $g^*(y)$, $h(y)$ ein:

$$z = y + \frac{b}{1-a}, \quad f\{z(y)\} = g^*(y), \quad g^*(y) = h(y) + \frac{b}{1-a}. \tag{15}$$

$h(y)$ ist eine ganze transzendente Funktion von y. Mit der neuen Bezeichnung erhält man aus (14)

$$h(ay) = a\,h(y). \tag{16}$$

Es sei $h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y^k$. Dann gilt

$$h_k(a^k - a) = 0. \tag{17}$$

Für a entstehen die beiden Fälle:

(i) $$a \neq 0, \quad a \neq \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right);$$

dann ist $h_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$, im Widerspruch zur Transzendenz von $h(y)$ und $f(z)$; also kann dieser Fall nicht eintreten

(ii) $$a = \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right), \quad (m, n \text{ relativ prim}), \; m \neq 0;$$

dann muß $h(y)$ die Gestalt

$$h(y) = y \sum_{k=0}^{\infty} h'_k y^{nk} \tag{18}$$

haben, wie aus (17) ersichtlich ist. Jede solche Funktion $h(y)$ genügt der Gl. (16). Durch die Umkehrung der Transformation (15) erhält man die Funktionen $f(z)$, die mit $ze^{2\pi m i/n} + b$, $m \neq 0$, vertauschbar sind.

Auch im Fall $a=1$, d.h. $g(z) = z + b$, ist $g(z)$ mit transzendenten Funktionen vertauschbar, z.B. mit $z + \sin\left(\frac{2\pi z}{b}\right)$. Damit ist der Satz 6 bewiesen.

Fixpunkte. Läßt man oben konstante Polynome zu, etwa $g(z) \equiv a$, so lautet die Vertauschbarkeitsbedingung:

$$f(a) = a$$

oder, mit der üblichen Bezeichnung: a ist ein Fixpunkt von $f(z)$. Der Wert $f'(a)$ heißt dann der „Multiplikator" von a. Diese Fixpunkte sind sehr wichtig für Untersuchungen über vertauschbare Funktionen und Iterationen, wie man im Laufe des Paragraphen sehen wird.

Zuerst wollen wir einige

Bezeichnungen und Resultate aus der Iterationstheorie erwähnen. Beweise findet man in FATOU [5]. Bis zum Ende dieses Paragraphen seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze transzendente Funktionen. Hat $f(z)$ einen Picardschen Ausnahmewert, etwa A, so ist dieser der einzige, und $f(z)$ hat die Form

$$f(z) = A + P(z) \exp\big(G(z)\big),$$

wobei $P(z)$ ein Polynom und $G(z)$ eine ganze Funktion ist. Im Fall

$$f(z) = \alpha + (z-\alpha)^r \exp\big(G(z)\big), \qquad r \geq 0 \text{ ganz},$$

heißt α ein „Fatouscher Ausnahmewert" (höchstens einer existiert).

Die Menge $\mathfrak{F}(f)$ bestehe aus denjenigen Punkten der komplexen Ebene, wo die Folge $\{f_n(z)\}$ aller Iterierten nicht normal ist. Der unendlich ferne Punkt wird stets zu $\mathfrak{F}(f)$ hinzugerechnet.

Ein „abstoßender" bzw. „anziehender" Fixpunkt n-ter Ordnung von $f(z)$ (n eine natürliche Zahl) ist ein Fixpunkt von $f_n(z)$ mit Multiplikator vom Betrag größer bzw. kleiner als 1. Die abstoßenden Fixpunkte jeder Ordnung gehören zu $\mathfrak{F}(f)$, die anziehenden jeder Ordnung gehören nicht zu $\mathfrak{F}(f)$.

Es seien $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ und m, n zwei natürliche Zahlen; dann gehören $f_m(z_0)$ wie auch jede Lösung ξ der Gleichung $f_n(\xi) = z_0$ zur Menge $\mathfrak{F}(f)$ — „vollständige Invarianz" von $\mathfrak{F}(f)$.

F.I. $\mathfrak{F}(f)$ ist eine nicht leere perfekte Menge.

F.II. Jeder Punkt von $\mathfrak{F}(f)$ ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der $f_n(z)$.

F.III. Ein beschränktes Gebiet Δ, das den eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert weder im Innern noch auf dem Rande enthält, und im übrigen beliebig ist, sei gegeben; dann gibt es zu jeder Umgebung δ eines beliebigen Punktes $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ ein $N(z_0, \delta, \Delta)$, so daß δ durch jedes $f_n(z)$ mit $n > N(z_0, \delta, \Delta)$ auf ein Gebiet abgebildet wird, das Δ enthält.

F.IV. Für jedes $c \in \mathfrak{F}(f)$ und für jeden Punkt z_0, außer dem eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert, gibt es eine Folge $z_k \to c$, $k = 1, 2, \ldots$ und natürliche Zahlen n_k, so daß $f_{n_k}(z_k) = z_0$.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit wird die folgende Bezeichnung häufig verwandt. D sei ein Gebiet, $h(z)$ eine in D erklärte Funktion; dann bedeutet $h(D)$ das Bildgebiet von D bei der Abbildung $z \to h(z)$.

Schließlich wollen wir einen erst später benutzten Satz von H. BOHR [22] zitieren.

B. *Es sei* $0<\varrho<1$ *und* $\Phi(z)$ *eine im Kreis* $K:|z|\leq 1$ *reguläre Funktion mit*

$$\Phi(0)=0$$

und

$$\operatorname*{Max}_{|z|<\varrho}|\Phi(z)|=1.$$

Dann enthält die Bildmenge $\Phi(K)$ *einen Kreisrand* $|z|=r_\Phi$ *mit* $r_\Phi>c$, *wobei* $c=c(\varrho)$, *eine positive allein von* ϱ [*also nicht von* $\Phi(z)$] *abhängige Konstante ist.*

Hilfssätze, in denen die Fixpunkte und die Begriffe der Iterationstheorie eine Rolle spielen.

(i) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien miteinander vertauschbar und* ξ *sei ein Fixpunkt von* $f(z)$. *Dann ist* $g(\xi)$ *auch ein Fixpunkt von* $f(z)$. *Ist* $g'(\xi)\neq 0$, *so haben* ξ *und* $g(\xi)$ *als Fixpunkte von* $f(z)$ *denselben Multiplikator. Beweis:* trivial.

(ii) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien vertauschbar. Dann folgt*

(a) *aus* $z_0\in\mathfrak{F}(f)$, *daß* $g(z_0)\in\mathfrak{F}(f)$, *und*

(b) $\mathfrak{F}(f)\cup\mathfrak{F}(g)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}$.

Beweis. (a) Es sei $z_0\in\mathfrak{F}(f)$. Um $g(z_0)$ als Mittelpunkt nehmen wir eine beliebig kleine offene Kreisscheibe K. Um z_0 als Mittelpunkt wählen wir eine so kleine Kreisscheibe C, daß $g(C)\subset K$. Dann nimmt $f_n(z)$ in K wenigstens alle Werte an, die $f_n\{g(z)\}=g\{f_n(z)\}$ in C annimmt. Weil $\{f_n(z)\}$ in C nicht normal ist, nehmen in C in ihrer Gesamtheit die Funktionen $f_n(z)$ alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an. Man weiß dann dasselbe von den Funktionen $f_n(z)$ in K. K war beliebig klein. Also ist $\{f_n(z)\}$ nicht normal in $g(z_0)$.

(b) Wir wählen $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$ und z_1 so, daß $f(z_1)=z_0$. Nach (a) liegt $g(z_0)$ in $\mathfrak{F}\{f(g)\}$, weil $g(z)$ und $f\{g(z)\}$ vertauschbar sind. Aber $g(z_0)=f\{g(z_1)\}$, und nach der vollständigen Invarianz von $\mathfrak{F}\{f(g)\}$ ist somit $z_1\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. Jetzt nehmen wir irgendein $c\in\mathfrak{F}(f)$. Dann gibt es nach F.IV eine Folge $z_\nu\to c$ und Iterierte f_{n_ν}, $\nu=1,2,\ldots$, mit $f_{n_\nu}(z_\nu)=z_0$, $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. [Bei der Wahl von $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$ hat man darauf zu achten, daß z_0 nicht der eventuell vorhandene „Ausnahmepunkt" ist, was nach F.I möglich ist.] Dann ist nach dem oben Bewiesenen jedes $z_\nu\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. $\mathfrak{F}\{f(g)\}$ ist nach F.I perfekt und damit abgeschlossen; also ist $c=\lim_{\nu\to\infty} z_\nu\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$.

Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen ist nicht bloß $\mathfrak{F}(f)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}$, sondern auch

$$\mathfrak{F}(f)\cup\mathfrak{F}(g)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}.$$

Die Bedingung (b) stellt eine ziemlich starke, wenn auch unübersichtliche Einschränkung der ganzen Funktionen dar, die mit einer gegebenen ganzen Funktion vertauschbar sind. Als Anwendung von (b) beweisen wir die Behauptung

(iii) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien miteinander vertauschbar und mögen einen gemeinsamen Fixpunkt* c *haben; es sei ferner* $c\in\mathfrak{F}(f)$ [*also ist* $|f'(c)|\geq 1$]; *dann ist* $|g'(c)|\geq 1$.

Beweis. Es sei $|g'(c)| = |a_1| < 1$; dann wählen wir n so, daß

$$|g_n'(c)| = |a_1|^n < \frac{1}{|f'(c)|}.$$

Es ist

$$f\{g_n(c)\} = c, \quad \left.\frac{df g_n(z)}{dz}\right|_{z=c} = |a_1|^n |f'(c)| < 1,$$

woraus folgt, daß $c \notin \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$. Dies ist aber ein Widerspruch, da auf Grund der Vertauschbarkeit von $f(z)$ und $g_n(z)$ nach (b) $c \in \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$.

(iv) *$f(z)$ und $g(z)$ seien miteinander vertauschbar; wenn $f(z)$ den Fatouschen Ausnahmewert ξ hat, so ist ξ auch für $g(z)$ Fatouscher Ausnahmewert.*

Beweis. Es gibt zwei Fälle.

(a) $f(z) = \xi$ hat nur die Wurzel $z = \xi$ und $f(z)$ die Form

$$f(z) = \xi + (z-\xi)^r \exp Q(z),$$

$r > 0$ ganz, $Q(z)$ ganze Funktion.

Wenn $g(z) = \xi$ entweder keine Wurzel oder nur die Wurzel $z = \xi$ hat, so ist ξ Fatouscher Ausnahmewert von $g(z)$. Wir nehmen an, daß es eine Wurzel $z = \eta \neq \xi$ von $g(z) = \xi$ gibt, und werden einen Widerspruch herleiten. Weil $\eta \neq \xi$ ist, gibt es unendlich viele Θ mit $f(\Theta) = \eta$. Aus $f\{g(\Theta)\} = g\{f(\Theta)\} = g(\eta) = \xi$ folgt aber $g(\Theta) = \xi$. Durch Wiederholung dieses Beweises zeigt man, daß $g(z)$ in jedem der Werte $(f_n)^{-1}(\eta)$, d. h. der Werte α mit $f_n(\alpha) = \eta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ den Wert ξ hat.

Aus der Iterationstheorie (F. IV) weiß man, daß diese Menge im Endlichen Häufungspunkte hat, und zwar die Punkte der perfekten Menge $\mathfrak{F}(f)$. Die ξ-Punkte der transzendenten Funktion $g(z)$ können aber keinen endlichen Häufungspunkt haben.

(b) $f(z) = \xi$ hat keine Wurzel. Dann ist es klar, daß $g(z) = \xi$ höchstens die Wurzel $z = \xi$ besitzt.

Es ist bemerkenswert, daß Vertauschbarkeit von $g(z)$ mit einer gegebenen Funktion $f(z)$ ganz allgemein eine Einschränkung des Wachstums von $g(z)$ durch die Iterierten $f_n(z)$ bedeutet.

Satz 7. *$f(z)$ und $g(z)$ seien vertauschbar; dann gibt es eine ganze positive Zahl n und ein $R_0 > 0$, so daß für alle $r > R_0$*

$$M(f_n, r) > M(g, r).$$

Beweis. z_0 sei ein Punkt in $\mathfrak{F}(f)$; wenn $f(z)$ einen Fatouschen Ausnahmewert ξ besitzt, wählen wir ein solches z_0, daß $|z_0 - \xi| > 2$ ist. Es sei K ein Kreis vom Radius 1 um den Punkt z_0. Falls $f(z)$ nun den Ausnahmewert ξ besitzt, ist ξ nach (iv) auch Ausnahmewert von $g(z)$; weil $\xi \notin K$, ist also $\xi \notin g(K)$. Es gibt somit stets eine ganze positive Zahl m, so daß $f_m(K)$ das beschränkte, das eventuell vorkommende ξ nicht enthaltende Gebiet $g(K)$ überdeckt (F. III). Wir können m sogar so wählen, daß $f_{m'}(K) \supset g(K)$ für alle $m' > m$ ist.

z_0 ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der Iterierten $f_v(z)$; also gibt es ein η mit

$$|\eta - z_0| < \tfrac{1}{3}, \quad f_p(\eta) = \eta.$$

Es sei K' der größte Kreis um η als Mittelpunkt, der in K enthalten ist. K' enthält z_0 im Innern und habe den Radius r'. Wir können o.B.d.A. annehmen, p sei so groß gewählt, daß

$$f_p(K) > K \tag{19}$$

und

$$f_p(K) > g(K). \tag{20}$$

Durch die lineare Transformation $w = \frac{z-\eta}{r'}$ bilde man jetzt den Kreis K' (vom Radius r') auf den Einheitskreis $|w| \leq 1$ ab und wende den oben zitierten Bohrschen Satz B auf die Funktion

$$\Phi(w) = \frac{f_{np}(\eta + r'w) - \eta}{\underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z) - \eta|}$$

an, wobei K'' der um η als Mittelpunkt beschriebene Kreis vom Radius $\frac{3}{4}r'$ ist, der dem Kreis $|w| \leq \frac{3}{4}$ bei der Transformation entspricht. In Satz B ist $\varrho = \frac{3}{4}$ zu wählen. Man findet $f_{np}(K')$ und a fortiori $f_{np}(K)$ enthält einen Kreisrand um den Mittelpunkt η, dessen Radius mindestens

$$c\left(\tfrac{3}{4}\right) \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z) - \eta| \tag{21}$$

beträgt. Weil K'' den Punkt z_0 in seinem Innern enthält, strebt der Ausdruck (21) gegen ∞ für $n \to \infty$ (F. III). Für großes n enthält also $f_{np}(K)$ einen größten Kreisrand C_n um η, dessen kleinster Abstand vom Nullpunkt größer als

$$\varrho_n = \tfrac{1}{2}\, c\left(\tfrac{3}{4}\right) \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z)| \tag{22}$$

ist. Für eine geeignete ganze positive Zahl a ist nun, wegen $z_0 \in K''$,

$$f_{ap}(K'') > K,$$

und

$$f_{(n+a+1)p}(K'') > f_p\{f_{np}(K)\} > f_p(C_n).$$

Also ist

$$\underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{(n+a+1)p}(z)| \geq \underset{z \in C_n}{\operatorname{Max}} |f_p(z)| \geq \frac{4}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} \underset{z \in C_n}{\operatorname{Min}} |z| \geq \frac{4\varrho_n}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{c\left(\frac{3}{4}\right)} \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z)| \tag{23}$$

für alle genügend großen ϱ_n (also n) — im folgenden wird diese letzte Bedingung nicht mehr ausdrücklich erwähnt. Für den kleinsten Abstand A_n des Kreisrandes von C_n vom Nullpunkt gilt nach (22), (23):

$$A_n > \varrho_n > \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{(n-a-1)p}(z)| = R_n. \tag{24}$$

Wegen (19) ist $R_{n+1} > R_n$. Man nehme ein ϱ mit $R_n < \varrho < R_{n+1}$. Dann gilt

$$M(g, \varrho) < M(g, R_{n+1}) \leq \underset{z \in C_{n+1}}{\operatorname{Max}} |g(z)| \leq \underset{z \in f_{(n+1)p}(K)}{\operatorname{Max}} |g(z)|. \tag{25}$$

Es ist nach (20)

$$g\{f_{(n+1)p}(K)\} = f_{(n+1)p}\{g(K)\} < f_{(n+2)p}(K). \tag{26}$$

Wir bemerken weiter, daß $\overline{K}_n$ — die abgeschlossene Kreisscheibe $|z| \leq R_n$ — das Gebiet $f_{(n-2a-1)p}(K)$ enthält, weil $f_{ap}(K'') > K$ und (24) gilt.

Hieraus folgt, daß

$$f_{(2a+3)p}(\overline{K}_n) > f_{(2a+3+n-2a-1)p}(K) = f_{(n+2)p}(K),$$

und wegen (25), (26)

$$M(g, \varrho) < \max_{z \in f_{(n+1)p}(K)} |g(z)| \leq \max_{z \in f_{(n+2)p}(K)} |z| \leq \max_{z \in \overline{K}_n} |f_{(2a+3)p}(z)|$$
$$= M(f_{(2a+3)p}, R_n) < M(f_{(2a+3)p}, \varrho).$$

Der Herleitung nach gilt die Ungleichung

$$M(g, \varrho) < M(f_{(2a+3)p}, \varrho)$$

für alle genügend großen ϱ.

§ 6. Der Fall e^z

Welche ganzen Funktionen sind mit einer gegebenen $f(z)$ vertauschbar? Es ist klar, daß alle die Iterierten $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, diese Eigenschaft haben. Im Beweis von Satz 6 haben wir Funktionen $f(z)$ gefunden, die mit anderen Funktionen vertauschbar sind, die keine Iterierten von $f(z)$ sind. Insbesondere war Vertauschbarkeit mit gewissen linearen Polynomen möglich. Es kann jedoch vorkommen, daß jede nicht konstante, mit $f(z)$ vertauschbare ganze Funktion eine Iterierte $f_n(z)$ ist. Ein Beispiel dafür ist die Exponentialfunktion. Allgemeiner gilt der

Satz 8. *$g(z)$ sei eine mit $f(z) = a e^{bz} + c$ vertauschbare ganze Funktion; dabei sollen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ vorausgesetzt werden. Dann ist $g(z)$* (i) *eine Konstante [Fixpunkt von $f(z)$], oder* (ii) *$g(z) = z$, oder* (iii) *$g(z) = f_n(z)$ für ein ganzes $n \geq 1$.*

Beweis. Ist $g(z)$ ein nichtkonstantes Polynom, so hat dieses nach Satz 6 die Form

$$g(z) = \alpha z + \beta, \quad |\alpha| = 1.$$

Die Vertauschbarkeitsbedingung lautet

$$\alpha a e^{bz} + \alpha c + \beta = a \exp(b\alpha z + b\beta) + c = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

Aus

$$\frac{2d_2}{d_1} = b = b\alpha$$

folgt $\alpha = 1$, und aus

$$d_1 = b\alpha a = b\alpha a e^{b\beta}$$

folgt zuerst $e^{b\beta} = 1$, und weil

$$d_0 = \alpha a + \alpha c + \beta = a e^{b\beta} + c$$

ist schließlich $\beta = 0$.

Es sei also $g(z)$ transzendent. $f(z)$ hat den Fatouschen Ausnahmewert c, der folglich auch für $g(z)$ Fatouscher Ausnahmewert ist [§ 5 (IV)]:

$$g(z) = c + (z-c)^m \exp P(z), \qquad m \geq 0 \text{ ganz}, \tag{27}$$

wobei $P(z)$ eine ganze Funktion ist.

(a) Wir führen die Annahme, es sei $m > 0$ und damit $g(c) = c$ auf einen Widerspruch zurück. Aus der Vertauschbarkeit folgt:

$$a \exp\{b\, g(z)\} + c = g(a\, e^{bz} + c) = g\left[a \exp\left\{b\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c\right]$$

$$= a \exp\left\{b\, g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c$$

und somit

$$g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right) = g(z) + \frac{2\pi N i}{b}, \qquad N \text{ ganz}. \tag{28}$$

Weil $g(z) = c$ allein für $z = c$ gilt, ist $g(z)$ nicht periodisch, also $N \neq 0$. Ist andererseits $N \neq 0$, so nimmt $g(z)$ den Wert $c - \frac{2\pi N i}{b}$ unendlich oft in geeigneten $\xi_1, \xi_2, \ldots$ an. In $\xi_1 + \frac{2\pi i}{b}, \xi_2 + \frac{2\pi i}{b}, \ldots$ nimmt aber nach (28) $g(z)$ den Wert c an. Das widerspricht aber der Gl. (27).

(b) In (27) bleibt nur noch der Fall $m = 0$ zu untersuchen. Weil $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt, können wir (27) in der Form schreiben:

$$g(z) = c + a \exp b\, g_{(1)}(z) = f\{g_{(1)}(z)\}, \tag{29}$$

wobei $g_{(1)}(z)$ eine ganze Funktion ist. Wegen der Vertauschbarkeit von $g(z)$ und $f(z)$ ist

$$c + a \exp\{b\, c + b\, a \exp(b\, g_{(1)}(z))\} = c + a \exp\{b\, g_{(1)}(c + a\, e^{bz})\},$$

woraus folgt

$$c + a \exp\{b\, g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a\, e^{bz}) + \frac{2\pi M i}{b}, \qquad M \text{ ganz}.$$

Weil die Funktion $g(z)$ sich nicht ändert, wenn $g_{(1)}(z)$ durch $g_{(1)}(z) + \frac{2\pi M i}{b}$ ersetzt wird, dürfen wir $M = 0$ setzen; d.h. $g_{(1)}(z)$ ist vertauschbar mit $f(z)$:

$$c + a \exp\{b\, g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a\, e^{bz}).$$

Wir wenden die für $g(z)$ oben gewonnenen Ergebnisse auf $g_{(1)}(z)$ an. Entweder ist $g_{(1)}(z) = z$ und hiermit $g(z) = f(z)$ oder $g_{(1)}(z)$ ist transzendent. In diesem Fall hat $g_{(1)}(z)$ die Gestalt

$$g_{(1)}(z) = f\{g_{(2)}(z)\}, \quad g_{(2)}(z) \text{ eine ganze Funktion}, \tag{29'}$$

wobei $f\{g_{(2)}(z)\} = g_{(2)}\{f(z)\}$. Auf diese Weise fortfahrend beweist man, daß entweder

$$g(z) = f_m(z), \qquad m > 0 \text{ ganz}, \tag{30}$$

oder daß es zu jedem ganzen $n>0$ eine transzendente $g_{(n)}(z)$ gibt, so daß

$$g(z) = f_n\{g_{(n)}(z)\}, \quad g_{(n)}\{f(z)\} = f\{g_{(n)}(z)\}. \tag{31}$$

Wir führen die Funktionen $Q_{(n)}(z) = g_{(n)}(z) - g_{(n)}(0)$ und $F_{(n)}(z) = f_n(g_{(n)}(0) + z)$ ein. Dann ist

$$g(z) = F_{(n)}\{Q_{(n)}(z)\},$$

und

$$Q_{(n)}(0) = 0.$$

Nach PÓLYAs Satz von § 2 ist für jedes $n = 1, 2, \ldots,$

$$M(g, r) > M\left\{F_{(n)}, c\, M\left(Q_{(n)}, \frac{r}{2}\right)\right\} > M\left\{F_{(n)}, c\left(\frac{r}{2}\right)^2\right\} > M(f_n, r)$$

für alle genügend großen r.

Weil der Fall (31) also gegen Satz 7 verstößt, kann nur der Fall (30) eintreten. Damit ist der Satz bewiesen.

Obwohl es ganze Funktionen $f(z)$ gibt, die allein mit den eigenen Iterierten und konstanten Funktionen c mit $f(c) = c$ vertauschbar sind, ist dies sicherlich nicht immer der Fall. Wir kennen schon Beispiele von transzendenten Funktionen $f(z)$, die mit linearen Polynomen vertauschbar sind, und durch Zusammensetzung von diesen Polynomen und den Iterierten von $f(z)$ erhält man weitere mit $f(z)$ vertauschbare Funktionen, die keine Iterierten von $f(z)$ sind. So ist z.B. $z + \sin z$ mit $z + 2k\pi$ vertauschbar $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und folglich auch mit $(z + 2k\pi) + \sin(z + 2k\pi) = 2k\pi + z + \sin z$.

§ 7. Ein Problem von SZEKERES

In diesem Paragraphen bringen wir die Lösung eines von G. SZEKERES gestellten Problems: *Läßt sich jedem $\alpha \geq 0$ eine nichtlineare ganze Funktion $f(\alpha, z)$ so zuordnen, daß die $f(\alpha, z)$ eine im Parameter stetige Familie bilden und es gilt*

$$f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z)?$$

Diese Frage wird durch den Satz 9 beantwortet.

Satz 9. *Es gibt keine Familie von Funktionen $f(\alpha, z)$, $\alpha \geq 0$, mit den Eigenschaften:*

$$f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z), \tag{32}$$

$$f(0, z) = z, \tag{32'}$$

$$f(\alpha, z) \text{ ist für jedes } \alpha > 0 \text{ eine ganze Funktion von } z, \tag{33}$$

$$\text{für mindestens ein } \alpha_0 > 0 \text{ ist } f(\alpha_0, z) \text{ keine lineare Funktion,} \tag{34}$$

und

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha, z) = z. \tag{35}$$

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Funktionenfamilie. Zuerst sei in (34) $f(\alpha_0, z)$ ein Polynom n-ten Grades, $n>1$. Dann ist $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$ und allgemein $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$ ein Polynom; denn ist $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so folgt die Transzendenz von $g\{g(z)\}$ aus dem Picardschen Satz. Man braucht nur die Lösungen der Gleichung $g\{g(z)\}=\text{const}$ zu betrachten. Das Polynom $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$ hat einen geringeren Grad, $f\left(\frac{\alpha_0}{4}, z\right)$ einen noch geringeren und schließlich $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$ einen Grad ≤ 1. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß $f(\alpha_0, z)$ einen Grad $n>1$ hat.

Jetzt seien alle $f(\alpha, z)$ transzendent. Jedes $f(\alpha, z)$ hat Fixpunkte; hätte $f(\alpha, z)$ nämlich keinen Fixpunkt, so hätte auch $f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)$ keinen Fixpunkt, und die Funktion

$$\frac{f(\alpha, z)-z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)-z}=\frac{f\left\{\frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)\right\}-z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)-z}$$

wäre eine ganze Funktion, die weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt. Zu festem $\alpha_0>0$ betrachten wir die Fixpunkte von $f(m\alpha_0, z)$ mit ganzzahligem $m>0$, die innerhalb des Kreises $|z|<R$ liegen. Sie seien mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bezeichnet. Für beliebiges $\alpha>0$ ist nach (32) $f(\alpha, z)$ mit $f(m\alpha_0, z)$ vertauschbar; nach § 5 (1) ist $f(\alpha, \xi_i)$, $i=1 \ldots n$, ein Fixpunkt von $f(m\alpha_0, z)$. Nach (35) strebt $f(\alpha, \xi_i)\to\xi_i$ für $\alpha\to 0$; für $\alpha<\delta_i$ ist also $f(\alpha, \xi_i)=\xi_i$ und für geeignetes $\delta(R)>0$ ist $f(\alpha, \xi_i)=\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, für $\alpha<\delta(R)$. Wir nehmen insbesondere $\alpha=\frac{\alpha_0}{2^N}$ und dabei N so groß, daß $\frac{\alpha_0}{2^N}<\delta(R)$. Dann ist

$$f\left(\frac{\alpha_0}{2^N}, \xi_i\right)=\xi_i, \qquad i=1, \ldots, n$$

und daher

$$f(\alpha_0, \xi_i)=\xi_i, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Indem wir R beliebig groß wählen, sehen wir, daß jeder Fixpunkt von $f(m\alpha_0, z)$ zugleich Fixpunkt von $f(\alpha_0, z)$ ist. Das Umgekehrte ist ja klar. Dabei ist die ganze Zahl $m>0$ beliebig wählbar; also haben alle $f(m\alpha_0, z)$, $m=1, 2, 3, \ldots$ die gleichen Fixpunkte, die eine isolierte Punktmenge bilden. Damit haben wir einen Widerspruch zu § 5, F.I und F.II hergeleitet und Satz 9 bewiesen.

Wenn man die Forderung (34) fällen läßt, ist Satz 9 nicht gültig. Die stetigen linearen Familien

$$f(\alpha, z)=e^{\alpha b}z+c(e^{\alpha b}-1), \qquad b, c \text{ konst.},$$

und

$$f(\alpha, z)=z+\alpha b, \qquad b \text{ konst.}$$

die sogar einparametrige Transformationsgruppen bilden, sind wohlbekannt.

§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung in miteinander vertauschbare Funktionen

Jetzt verlassen wir die allgemeineren Fragen von § 5 und § 6 und untersuchen, insbesondere für spätere Anwendung in der Iterationstheorie, das folgende Problem: *Wann läßt eine gegebene ganze Funktion $F(z)$ von endlicher Ordnung eine Zerlegung*

(36) $F(z) = f\{g(z)\}$, $f(z)$, $g(z)$ *ganze transzendente Funktionen,*

und spezieller eine vertauschbare Zerlegung

(37) $F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$, $f(z)$, $g(z)$ *ganze transzendente Funktionen,*

zu?

PÓLYA fand durch Anwendung seines in § 2 zitierten Satzes bezüglich (36) das Ergebnis: Entweder ist (a) $g(z)$ ein Polynom und $f(z)$ eine Funktion von endlicher Ordnung, oder (b) $f(z)$ hat die Ordnung 0 und $g(z)$ endliche Ordnung. Im Fall (37) haben also $f(z)$ und $g(z)$ beide die Ordnung 0.

Unter Berücksichtigung von § 4 Satz 3 und Zusatz können wir sofort den Satz aussprechen:

Satz 10. *$F(z)$ lasse die Zerlegung (37) zu und habe endliche Ordnung: dann existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven Γ_i, die den Nullpunkt im Innern enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben: $\underline{\sigma}_i$ und $\bar{\sigma}_i$ seien die kleinste bzw. größte Entfernung zwischen dem Nullpunkt und Γ_i; dann gilt*

(i) $\underline{\sigma}_i \to \infty$,

(ii) $\bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{1+\varepsilon}$,

(iii) $|F(z)| = |f\{g(z)\}| > \{M(F, \bar{\sigma}_i)\}^{1-\varepsilon}$ für $z \in \Gamma_i$.

Diese sehr starke Bedingung könnte man folgendermaßen formulieren: Das obere Wachstum von $F(z)$ entlang irgendeiner nach ∞ laufenden Kurve ist von der gleichen Größenordnung wie $M(F, r)$. Aus Satz 10 folgt, daß viele bekannten Klassen ganzer Funktionen von endlicher Ordnung keine transzendente Zerlegung (37) zulassen. Offenbar verletzten Funktionen mit einem Zielwert oder Beschränktheitsweg die notwendige Wachstumsbedingung; darunter befinden sich die Funktionen mit einem Picardschen oder Borelschen Ausnahmewert. Eine weitere Klasse bilden die Funktionen F von der genauen endlichen Ordnung ϱ, für die in einem Winkelraum W oder nur auf einer nach ∞ laufenden Kurve Γ

$$F(z) = 0\{\exp(|z|^{\varrho-\delta})\}, \quad \delta > 0, \; z \in W \text{ oder } \Gamma$$

gilt; dazu gehören, wie BIEBERBACH [24], [25] gezeigt hat, die Funktionen von endlicher Ordnung ϱ, die in einem Winkelraum mit einer größeren

Öffnung als π/ϱ mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annehmen oder in irgendeinem Winkelraum schlicht sind.

Als Beispiele für Funktionen, die keine Zerlegung (37) zulassen, hat man e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\frac{1}{\Gamma(-z)}$,

$$F(z) = P\left(z, e^z, e^{e^z}, \ldots, e^{e^{z^m}}\right),$$

wobei $P(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ ein solches Polynom in $x_1, \ldots, x_{m+1}$ ist, das in x_{m+1} einen nicht verschwindenden Grad hat. Die negative reelle Achse ist ein Beschränktheitsweg für die ersten vier Beispiele, und auf $\arg z = \pi/m$ hat $F(z)$ höchstens die Ordnung $(m-1)$, während die Ordnung von $F(z)$ auf der reellen positiven Achse genau m ist. Besonders interessant sind die Funktionen mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, also Funktionen der Form

$$F(z) = z + Q(z)\exp\{R(z)\},\ Q(z),\ R(z) \quad \text{Polynome},$$

die offenbar einen Beschränktheitsweg haben. Diese Funktionen lassen keine Zerlegung (37) zu. ROSENBLOOM [26], [27] hat gezeigt, daß die erweiterte Klasse, die man durch Fallenlassen der Beschränkung auf endliche Ordnung erhält, auch aus lauter unzerlegbaren Funktionen besteht. Zum Beweis braucht man allerdings den zweiten Hauptsatz der meromorphen Funktionen. ROSENBLOOMs Resultat ist das einzige uns bekannte, früher veröffentlichte Ergebnis auf diesem Gebiet, außer ein paar Bemerkungen über das speziellere Problem der Iterierten.

§ 9. Iterationen

Die Iterierten einer ganzen Funktion sind miteinander vertauschbar; wenn $f_m(z)$, $m>0$ ganz, transzendent ist, kann $f(z)$ kein Polynom sein. Durch Umschreiben des Satzes 10 erhält man den

Satz 11. *$F(z)$ sei eine ganze transzendente Funktion von endlicher Ordnung, die eine m-te Iterierte, $m>1$ ganz, ist. Dann hat $F(z)$ die in Satz 10 formulierten Eigenschaften.*

(38) $\qquad f_m(z) = F(z), \qquad F(z)$ eine gegebene ganze Funktion.

Wir bemerken, daß die Gl. (38), falls sie überhaupt von ganzem $f(z)$ zu lösen ist, keineswegs eindeutig lösbar zu sein braucht; z.B. hat

$$f\{f(z)\} = z + \sin z + \sin(z + \sin z)$$

außer der Lösung $f(z) = z + \sin z$ die weiteren Lösungen

$$f^{(k)}(z) = 2k\pi - z - \sin z, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

wie leicht nachzurechnen ist. Beispiele von „Nicht-Iterierten" sind die schon in § 8 erwähnten Funktionenklassen. Die Existenz von Iterierten von endlicher Ordnung ist von BAKER [8] diskutiert worden.

§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen $f(z)$ der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$

In diesem Paragraphen werden einige Resultate über die Beschaffenheit von zweiten Iterierten gebracht, wobei die Beschränkung auf endliche Ordnung durch allgemeinere Wachstumsbedingungen ersetzt wird.

Iterieren wir die reelle Funktion $\exp(r^A)$, $A>0$, so erhalten wir $\exp\{\exp(Ar^A)\}$. Falls $f(z)$ von endlicher Ordnung A ist, so ist also

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M[f\{f(z)\}, r]}{\log r} \leq A. \tag{39}$$

Wir nehmen jetzt an, daß ein solches $f(z)$ vorliegt, so daß (39) gilt. Was können wir dann über das Wachstum von $f(z)$ sagen?

Satz 12. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion mit*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M[f\{f(z)\}, r]}{\log r} \leq A, \qquad 0 \leq A < \infty; \tag{39}$$

dann hat $f(z)$ entweder (i) *die Ordnung $\leq A$ oder* (ii) *die Ordnung von $f(z)$ ist größer als A und die untere Ordnung $\underline{\varrho} = 0$, wobei*

$$\underline{\varrho} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(f, r)}{\log r}$$

Beweis. Nehmen wir an, die Ordnung von $f(z)$ sei größer als A. Um eine Abschätzung nach unten für $M\{f(f), r\}$ zu erhalten, erinnern wir an den Satz (§ 2) von PÓLYA. Weil die innere Funktion (um diesen Satz anwenden zu können) im Nullpunkt verschwinden muß, setzen wir

$$f(z) = F(z) + a, \qquad \text{wobei} \qquad a = f(0).$$

Dann ist

$$f\{f(z)\} = F_1\{F(z)\},$$

wobei

$$F_1(z) = f(z + a).$$

PÓLYAs Satz ergibt

$$M\{f(f), r\} > M\left\{F_1, cM\left(F, \frac{r}{2}\right)\right\}$$

für alle großen r. Es ist nun

$$M(F_1, \varrho) = \max_{|z| \leq \varrho} |f(z + a)| \geq \max_{|z| \leq \varrho - |a|} |f(z)| = M(f, \varrho - |a|)$$

für alle $\varrho > |a|$. Also ist

$$\left\{\begin{aligned} M\{f(f), r\} &> M\left\{f, cM\left(F, \frac{r}{2}\right) - |a|\right\} \\ &> M\left\{f, cM\left(f, \frac{r}{2}\right) - 2|a|\right\} \\ &> M\left\{f, dM\left(f, \frac{r}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right. \tag{40}$$

für ein geeignetes $0 < d < 1$ und alle genügend großen r.

Weil die Ordnung von $f(z)$ größer als A ist, gibt es eine Folge $\{r_i\}$ mit $r_i \to \infty$, für die

$$d\,M\left(f, \frac{r_i}{2}\right) > d \exp\left\{\left(\frac{r_i}{2}\right)^{A+\varepsilon'}\right\} > \exp\left(r_i^{A+\varepsilon}\right)$$

für genügend kleine, aber sonst beliebig vorgegebene $\varepsilon' > \varepsilon > 0$. Nach (39), (40) ist dann

$$M(f, \exp r_i^{A+\varepsilon}) < M\{f(f), r_i\} < \exp\{\exp r_i^{A+\delta}\} \tag{41}$$

für alle genügend großen r_i, wobei man $0 < \delta < \varepsilon$ annehmen darf. Wir setzen $\exp(r_i^{A+\varepsilon}) = \varrho_i$. Die Ungleichung (41) wird dann zu

$$M(f, \varrho_i) < \exp\exp\left\{(\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}}\right\}.$$

Es strebt $\log \varrho_i \to \infty$ für $i \to \infty$, und es ist $\frac{A+\delta}{A+\varepsilon} < 1$. Daher ist zu beliebig großem vorgegebenen $L > 0$

$$(\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}} < \frac{1}{L} \log \varrho_i \qquad \text{für großes } i,$$

und somit

$$M(f, \varrho_i) < \exp\exp\log(\varrho_i^{1/L}) = \exp(\varrho_i^{1/L}).$$

Also ist die untere Ordnung ϱ nicht größer als $1/L$, d.h. $\varrho = 0$.

Zusatz. Setzt man in (39) Gleichheit voraus, so wird der Fall (i) zu (i'): die Ordnung von $f(z)$ ist gleich A, oder es gilt (ii).

Auf Grund des Satzes 12 kann man verschiedene Sätze über die zweite Iterierte herleiten.

Satz 13. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion, für die die Ungleichung (39) erfüllt ist. Dann kann die zweite Iterierte $g(z) = f\{f(z)\}$ höchstens $2[2A]$ numerisch verschiedene endliche Zielwerte haben.*

Hierbei bedeutet $[2A]$ die größte ganze Zahl $m \leq 2A$.

Beweis. $g(z)$ habe die n numerisch verschiedenen Zielwerte c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; d.h. es gebe stetige, nach unendlich laufende Kurven Γ_i: $z = z_i(t)$, $0 \leq t < 1$, $i = 1, \ldots, n$, so daß

$$\lim_{t \to 1} |z_i(t)| = \infty$$

$$\lim_{t \to 1} g\{z_i(t)\} = c.$$

Bei der Abbildung $z \to f(z)$ entsteht das Bild $f(\Gamma_i)$ von Γ_i; dieses Bild ist auch eine stetige Kurve, und zwar mit demselben Parameter t wie in Γ_i:

$$f(\Gamma_i): \quad f\{z_i(t)\}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Es ergibt sich die Frage: Wie verhält sich $f\{z_i(t)\}$ für $t \to 1$?

Entweder hat $f(\Gamma_i)$ (i) keinen Häufungspunkt im Endlichen, läuft also nach Unendlich oder (ii) $f(\Gamma_i)$ hat wenigstens einen endlichen Häufungs-

punkt α_i. Aus $f\{f(z)\}=g(z)$ folgt, daß $f(\alpha_i)=c_i$ und daß $f(\Gamma_i)$ nur isolierte Häufungspunkte hat. Zu gegebenem $\varepsilon>0$ können wir um α_i einen Kreis $K(\delta)$: $|z-\alpha_i|\leq\delta$ finden, auf dessen Peripherie $|f(z)-f(\alpha_i)|=|f(z)-c_i|>\varepsilon$ ist. Innerhalb von $K(\delta)$ liegen Punkte $f\{z_i(t)\}$ von $f(\Gamma_i)$, für die t beliebig nahe bei 1 liegt und $|g\{z_i(t)\}-c_i|<\varepsilon$ ist. Weil für alle genügend großen t $|f\{f(z_i(t))\}-c_i|<\varepsilon$ ist, kann die Kurve $f(\Gamma_i)$ von einem gewissen t ab den Kreis $K(\delta)$ nicht mehr verlassen. Es gibt also ein $t(\delta)$, so daß $|f\{z_i(t)\}-\alpha_i|<\delta$ für $t(\delta)<t<1$. Wenn man ε beliebig klein wählt, darf man δ auch beliebig klein wählen. Also ist im Fall (ii) $\lim\limits_{t\to 1} f\{z_i(t)\}=\alpha_i$, d.h. $f(z)$ hat auf Γ_i den Zielwert α_i.

Wenn Fall (i) eintritt, hat $f(z)$ auf $f(\Gamma_i)$ den Zielwert c_i. Tritt für Γ_i und Γ_j, $i\neq j$, der Fall (i) ein, so wissen wir schon, daß $c_i\neq c_j$; tritt für beide der Fall (ii) ein, so entsprechen den Wegen Γ_i bzw. Γ_j die Zielwerte α_i bzw. α_j von $f(z)$, die wegen $f(\alpha_i)=c_i\neq c_j=f(\alpha_j)$ numerisch verschieden sind. Jedem Zielwert c_i, $i=1,\ldots,n$, von $g(z)$ läßt sich also ein Zielwert von $f(z)$ zuordnen. Ist $n\geq 2[2A]+1$, so tritt einer der Fälle (i), (ii) mindestens $([2A]+1)$-mal ein. Dann hat $f(z)$ mindestens $[2A]+1$, also mehr als $2A$ numerisch verschiedene Zielwerte. Nach dem Satz von DENJOY-CARLEMAN ist dann die Ordnung von $f(z)$ größer als A und nach Satz 12 hat $f(z)$ die untere Ordnung 0. CARLEMAN (vgl. [28, S. 145]) hat bewiesen, daß eine ganze Funktion von unterer Ordnung 0 keinen Beschränktheitsweg (also a fortiori keinen Zielwert) hat. Aus diesem Widerspruch folgern wir die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Zwei Zielwerte α_1 bzw. α_2 von $f(z)$ mit den zugehörigen Wegen Γ_1 bzw. Γ_2 sind sicher „verschieden", wenn $\alpha_1\neq\alpha_2$; in der Theorie der ganzen Funktionen (z.B. für die Anwendung des Denjoy-Carlemanschen Satzes) sind sie auch dann als verschieden zu betrachten, wenn $\alpha_1=\alpha_2$ ist und zwischen Γ_1 und Γ_2 ein nach ∞ laufender Weg liegt, auf dem $f(z)$ nach ∞ strebt. Wir haben die numerische Verschiedenheit der Zielwerte von $g(z)$ vorausgesetzt, um die numerische Verschiedenheit (und damit die Verschiedenheit „im erweiterten Sinne") genügend vieler Zielwerte von $f(z)$ zu erzwingen. Auf diese Weise umgeht man eine Untersuchung über die Lage der Kurven Γ_i und $f(\Gamma_i)$ und über ihre gegenseitigen Beziehungen.

Satz 13 ist schon dann nicht mehr gültig, wenn die Zielwerte verschieden im erweiterten Sinne, aber numerisch gleich sind. Die Funktion $g(z)=\exp(\exp z)$ erfüllt (39) mit $A=1$; auf den Halbstrahlen $y=(2n+1)\pi$, $x=t$, $0\leq t<\infty$ hat $g(z)$ die Zielwerte 0; zwischen diesen Halbstrahlen liegen die Halbstrahlen $y=2n\pi$, $x=t$, $0\leq t<\infty$; auf denen $g(z)$ nach ∞ strebt. Also hat $g(z)$ sogar unendliche viele Zielwerte im erweiterten Sinne.

Einen ähnlichen Satz können wir beweisen, wenn wir nicht die Zielwerte, sondern die Winkelräume berücksichtigen, in denen eine ganze Funktion mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annimmt. Die maximale Größe solcher Winkelräume steht im Zusammenhang mit der Ordnung der Funktion. BIEBERBACH [25] hat bewiesen:

B.1. *Wenn die ganze Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum W der Öffnung $\alpha\pi$ zwei verschiedene Werte höchstens endlich oft annimmt, so gilt in jedem Teilwinkelraum von W*

$$f(z) = O\left(\exp\{K|z|^{1/\alpha}\}\right)$$

für geeignetes $K > 0$.

B.2. *Jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt für $\frac{1}{2} \leq \varrho \leq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung π/ϱ übersteigt, für $\varrho \geq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.*

Unter Verwendung dieser Ergebnisse folgt der

Satz 14. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion für die*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M\{f(f), r\}}{\log r} = A \geq \frac{1}{2} \tag{42}$$

erfüllt ist; dann nimmt die zweite Iterierte $f\{f(z)\}$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung für $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$ den Wert $\frac{\pi}{A}$ und für $A \geq 1$ den Wert $\pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Beweis. Durch die Forderung (42) werden Polynome ausgeschlossen; $f(z)$ ist transzendent. W sei ein Winkelraum, in dem $f\{f(z)\}$ die beiden Werte α und β ($\alpha \neq \beta$) höchstens endlich oft annimmt. Es seien ξ_i die (in der ganzen Ebene, ohne Beschränkung auf W, gelegenen) Wurzeln von $f(z) = \alpha$ oder von $f(z) = \beta$. Es gibt abzählbar unendlich viele ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Es seien z_{ij} die in W gelegenen Wurzeln von $f(z) = \xi_i$. Dann hat $f\{f(z_{ij})\} = f(\xi_i)$ entweder den Wert α oder β; also gibt es überhaupt nur endliche viele z_{ij}. Man kann zwei — und sogar unendliche viele — ξ_i finden, so daß $f(z) = \xi_i$ keine Wurzeln in W hat.

Nehmen wir an, daß die Öffnung Θ von W folgende Ungleichung erfüllt:

$$\begin{cases} \Theta > \frac{\pi}{A} & \text{für } \frac{1}{2} \leq A \leq 1 \\ \Theta > \pi\left(2-\frac{1}{A}\right) & \text{für } A \geq 1. \end{cases} \tag{43}$$

Dann folgt aus B.1, daß $f(z)$ in jedem Teilwinkelraum V von W eine Ordnung ϱ kleiner als A hat. Wir wählen V so, daß die Öffnung Φ von V ebenfalls (43) erfüllt. Es ist unmöglich, daß $f(z)$ eine untere Ordnung $\underline{\varrho}$ mit $\underline{\varrho} = 0$ hat:

(i) $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$. In V ist die Ordnung von $f(z)$ nicht größer als

$$\frac{\pi}{\Theta} < A - 2\delta < A, \quad 0 < \delta < \frac{A}{2}.$$

Nehmen wir an, V sei der Winkelraum:

$$0 < |z| < \infty, \quad \pi - \frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi + \frac{\Phi}{2}.$$

Auf dem Rand von V ist für die Funktion

$$F(z) = f(z)\exp(-z^{A-\delta})$$

die Ungleichung

$$|F(re^{i(\pi\pm\Phi/2)})| < \exp\left\{r^{A-2\delta} - r^{A-\delta}\cos\left[(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)\right]\right\}$$

für alle genügend großen r. Dies ist aber beschränkt, weil $0<(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)$ $<\frac{\pi}{2}$. Also ist $F(z)$ auf dem Rand von V beschränkt.

Ist $\varrho=0$, so gibt es $r_i\to\infty$, so daß

$$|f(r_i e^{i\alpha})| < \exp(r_i^{\varepsilon}), \quad 0\leq\alpha\leq 2\pi,$$

für $0<\varepsilon<A-\delta$. Auf

$$|z| = r_i, \quad -\pi+\frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi-\frac{\Phi}{2}$$

ist

$$|F(z)| < \exp\left\{r_i^{\varepsilon} - r_i^{A-\delta}\cos\left[(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)\right]\right\} < K,$$

daher gleichmäßig beschränkt in i. Anwendung des Maximumsprinzips zeigt, daß $F(z)$ im ganzen Winkelraum

$$-\pi+\frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi-\frac{\Phi}{2}$$

beschränkt ist:

$$|F(z)| < K'$$

und damit

$$|f(z)| < K'|\exp(z^{A-\delta})| < K'\exp(|z|^{A-\delta})$$

im zu V komplementären Winkelraum.

Die Ordnung von $f(z)$ ist also in der ganzen Ebene kleiner als A, was mit (42) nicht verträglich ist. Folglich ist $\varrho>0$.

(ii) $A>1$. Der Beweis läuft ganz analog zum Fall (i). Weil $\varrho>0$ ist, kommt in Satz 12 und Zusatz nur der Fall (i) vor und $f(z)$ hat die Ordnung A. Nach B.2 ist diese Behauptung mit der Ungleichung (43) nicht verträglich. Der Satz 14 ist bewiesen.

Ein anderer Satz dieser Art folgt aus weiteren Untersuchungen von BIEBERBACH [24]:

B.3. *Wenn die ganze Funktion $f(z)$ einen Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ schlicht abbilden soll, so muß in jedem inneren Teilraum*

$$f(z) = O(|z|^{2/\alpha})$$

sein.

B.4. *Eine ganze transzendente Funktion der Ordnung ϱ ist in keinem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)$ übersteigt, schlicht (falls $\varrho\leq\frac{1}{2}$ also in überhaupt keinem Winkelraum).*

Wir beweisen den

Satz 15. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion, so daß*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M\{f(f), r\}}{\log r} = A > 0 \tag{44}$$

erfüllt ist; dann ist die zweite Iterierte $f\{f(z)\}$ in keinem Winkelraum schlicht, dessen Öffnung den Wert $\pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ übersteigt.

Beweis. Wegen (44) kommen Polynome nicht in Frage. W sei ein Winkelraum, in dem $f\{f(z)\}$ schlicht ist. $f(z)$ ist in W schlicht. Denn sonst würde es $\alpha, \beta \in W$, $\alpha \neq \beta$ geben, für die $f(\alpha) = f(\beta)$; dann würde die Gleichung $f\{f(\alpha)\} = f\{f(\beta)\}$ folgen, entgegen der Schlichtheit von $f\{f(z)\}$. Nehmen wir an, daß die Öffnung Θ von W den Wert $\pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ übersteigt. Aus B.3 folgt, daß $f(z)$ in W durch eine $|z|$-Potenz beschränkt ist, und wie in Satz 14 erkennt man, daß die untere Ordnung von $f(z)$ größer als 0 ist. Aus Satz 12 folgt, daß $f(z)$ die Ordnung A hat. Das ist aber (nach B.4) ein Widerspruch zur Annahme $\Theta > \pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ und Satz 15 ist bewiesen.

Bemerkung. Die Sätze 13, 14 und 15 lassen sich auch als Sätze über die Lösbarkeit der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ [$F(z)$ ganz, vorgegeben] aussprechen.

§ 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$

Wir haben gesehen, daß, falls $F(z)$ nicht gewisse notwendige Bedingungen erfüllt, die Gleichung

$$f\{f(z)\} = F(z), \quad F(z) \text{ ganz}, \tag{45}$$

keine ganze Lösung $f(z)$ hat. Dann können trotzdem verschiedene nicht ganze Lösungen vorkommen: z. B. wenn

$$F(z) = \xi + b_1(z-\xi) + b_2(z-\xi)^2 + \cdots \tag{46}$$

mit $b_1 \neq 0$ und b_1 keine Einheitswurzel ist, gibt es genau zwei formale Reihen

$$f(z) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)}(z-\xi)^n, \qquad i = 1, 2, \tag{47}$$

die bei formalem Einsetzen die Gl. (45) befriedigen. Es kann sogar gezeigt werden, daß diese Reihen einen positiven Konvergenzradius haben (im allgemeinen aber kleiner als ∞), falls $|b_1| \neq 0, 1$. Der Fall, wo $F(z)$ einen Fixpunkt ξ hat, aber $b_1 = F'(\xi)$ eine Einheitswurzel ist, ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Ein spezielles Beispiel wird am Ende dieses Paragraphen auftreten.

In [8, Theorem 3] haben wir den Satz aufgestellt:

$f(z)$ sei eine analytische (lokale) Lösung von (45), *analytisch in einem Punkt $z_0 \in \mathfrak{H}(f)$ und im Fatouschen Ausnahmewert, wenn ein solcher existiert; $F(z)$ habe einen Beschränktheitsweg. Dann ist $f(z)$ keine eindeutige Funktion.* Weil der Begriff „eindeutige analytische Lösung von (45)" in [8] nicht richtig definiert wurde, bringen wir hier den genauer formulierten Satz 16 ähnlichen Inhalts.

Definition. Eine eindeutige analytische Lösung von $f(z)$ von (45) *ist eine in ihrem schlichten Existenzgebiet D eindeutige Funktion, die auch eine lokale Lösung von* (45) *im folgenden Sinne ist: Es gibt ein $z_0 \in D$ und einen in D gelegenen Kreis K:*

$$|z - z_0| < \delta, \quad \delta > 0,$$

so daß $f(z) \in D$ und (45) *für jedes $z \in K$ gelten.*

Satz 16. *$F(z)$ sei eine solche ganze Funktion, daß* (45) *keine ganze Lösung hat; dann hat* (45) *keine eindeutige analytische Lösung, die in einem Punkt von $\mathfrak{H}(F)$ und im Fatouschen Ausnahmewert (falls dieser existiert) regulär ist.*

Beweis. Wir nehmen an, daß es unter den Bedingungen des Satzes doch eine eindeutige analytische Lösung $f(z)$ gibt. Dann zeigen wir

(i) $f(D) \subset D$. z_0 habe die gleiche Bedeutung wie in der obigen Definition; also ist $f(z_0) \in D$. Es sei z_1 ein solcher Punkt, daß $f(z_1) \in D$. Wir verbinden z_0 mit z_1 mittels einer stetigen doppelpunktfreien Kurve $\Gamma \subset D$, und es sei p der erste Punkt von Γ (das so orientiert ist, daß z_0 vor z_1 liegt), für den $f(p) \notin D$. Offenbar ist $p \neq z_0$. γ sei der zwischen z_0 und p liegende Teil von Γ; also ist $f(\gamma)$ eine Kurve, die mit Ausnahme des Endpunktes $f(p)$ ganz in D liegt. Für $z \in \gamma$, $z \neq p$ haben wir dann gleichzeitig $f(z) \in D$ und (45). Mittels (45) können wir $f(z)$ über den Punkt $f(p)$ hinaus analytisch fortsetzen: Die Entwicklung

$$f(z) = f(p) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - p)^n \qquad \text{mit } a_k \neq 0$$

konvergiert und daher auch die inverse Reihe

$$z = f_{-1}(w) = p + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{w - f(p)\}^{n/k}, \tag{48}$$

für die $f\{f_{-1}(w)\} = w$ ist. Wir bilden den Ausdruck

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\},$$

der um $w = f(p)$ eine konvergente Entwicklung hat:

$$f^*(w) = F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \{w - f(p)\}^{n/k}. \tag{49}$$

Ein Zweig von (48) bildet aber $f(\gamma)$ — wenigstens in einer Umgebung des Punktes $f(p)$, wo (48) und (49) konvergieren — auf einen Teil von γ ab. Für

diese Punkte $f(\gamma)$ hat man

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\} = f[f\{f_{-1}(w)\}],$$

weil (45) auf γ gilt; also $f^*(w) = f(w)$ auf einem Segment von $f(\gamma)$. Damit ist (49) ein Element des analytischen Gebildes von $f(z)$, und weil $f(z)$ nach Voraussetzung eindeutig ist, ist $k = 1$. Also ist nach (49) $f(p) \in D$, entgegen $f(p) \notin D$, und daher ist (i) bewiesen.

(ii) Weil $f(D) \subset D$ gilt, ist $f\{f(z)\} = F(z)$ für jedes $z \in D$. Dann ist $F(D) = f\{f(D)\} \subset D$ und sogar $F_m(D) \subset D$ für jede natürliche Zahl m. Es wurde angenommen, daß das (offene) Gebiet D einen Punkt von $\mathfrak{F}(f)$ und damit einen Kreis C um diesen Punkt als Zentrum enthält. Nach den oben zitierten Resultaten von FATOU (§ 5, F. III) enthält also $D > F_m(D) > F_m(C)$ für genügend großes m ein beliebiges beschränktes Gebiet, eventuell mit einer Ausnahme einer kleinen Umgebung des Ausnahmewertes. Auch im Ausnahmewert ist $f(z)$ regulär, also regulär in jedem beschränkten Gebiet; d.h. $f(z)$ ist ganz, im Widerspruch zur Voraussetzung, und der Satz ist bewiesen.

Besonders interessant unter den lokalen Lösungen sind diejenigen, die man aus dem Fixpunktansatz (46), (47) erhält. Im allgemeinen kann man dort die Koeffizienten a_n rekursiv bestimmen. Wenn man etwas über die Eigenschaften von $F(z)$ weiß, ist es ein interessantes Problem, aus diesen Kenntnissen eine Abschätzung für den Konvergenzradius der Entwicklung (47) zu gewinnen. Hierbei sind allgemeine funktionentheoretische Methoden sehr erwünscht, weil die Koeffizientenrekursion für die a_n unübersichtlich ist. Wir behandeln ein ziemlich spezielles Problem, das THRON, CHOWLA, KEMPNER und RIVLIN (vgl. [9]) aufgeworfen haben.

$$f\{f(z)\} = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{50}$$

hat genau eine formale Reihenlösung der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

nämlich

$$f(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{48} + \cdots \tag{51}$$

wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt. Die Berechnung der Koeffizienten a_n ist aber recht kompliziert und ihre Größe ist von vornherein gar nicht klar. Was ist der Konvergenzradius ϱ von (51)? THRON [9] erwähnt seine Vermutung $\varrho = 0$ und beweist, daß es keine ganze Lösung von (50) gibt.

Soviel folgt sofort aus unserem Satz 8 oder Satz 11. Wir schließen unsere Arbeit mit dem folgenden Ergebnis ab:

Satz 17. *Es sei $F(z) = e^z - 1$; für jedes relle σ sei $F_\sigma(z)$ die durch*

$$F\{F_\sigma(z)\} = F_\sigma\{F(z)\} \tag{52}$$

eindeutig bestimmte formale Reihe der Form

$$F_\sigma(z) = z + \frac{\sigma}{2} z^2 + \sum_{m=3}^{\infty} a_m(\sigma)\, z^m. \tag{53}$$

$F_\sigma(z)$ hat einen positiven Konvergenzradius genau dann, wenn σ eine ganze Zahl ist. Für ganzes $\sigma = n > 0$ ist $F_\sigma(z)$ die n-te Iterierte von $F(z)$, also eine ganze Funktion; für ganzes $\sigma = n < 0$ ergibt $F_\sigma(z)$ die inverse Reihenentwicklung zu $F_{-n}(z)$.

THRONs Vermutung bildet den Fall $\sigma = \frac{1}{2}$.

Wir schicken voraus den einfachen

Hilfssatz 5. *z_0 sei eine feste Zahl für die* $\operatorname{Re} z_0 \geqq 0$ *und $z_0 \neq 0$ gelten; dann liegt der Hauptwert* $\log(1+z_0)$ *im Halbkreis* $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| < |z_0|$.

Beweis.

$$|\log(1+z_0)| = \left| \int_0^{z_0} \frac{dt}{1+t} \right| < \int_0^{z_0} d|t| = |z_0|,$$

wenn man längs der Strecke $\arg t = \arg z_0$ integriert. Andererseits gilt

$$\operatorname{Re} \log(1+z_0) = \log|1+z_0| > 0.$$

Beweis von Satz 17. Die Eindeutigkeit und Existenz von $F_\sigma(z)$ ergibt sich leicht durch formale Rechnung; es zeigt sich, daß die $a_m(\sigma)$ in (53) reell sind. Die Behauptung über ganzzahlige σ-Werte folgt sofort aus der Eindeutigkeit von $F_\sigma(z)$, wenn man die Iterierten von $F(z)$ im Nullpunkt entwickelt. Es bleibt der Fall von nicht-ganzen σ zu betrachten.

Konvergiert $F_\sigma(z)$ in $|z| < \varrho$, $\varrho > 0$, so konvergiert die inverse Reihe $G_\sigma(z)$ zu $F_\sigma(z)$ in $|z| < \varrho'$, $\varrho' > 0$. $F_\sigma(z)$ erfüllt (52) nicht nur als formale Potenzreihe für eine Umgebung von $z = 0$; hieraus folgt

$$F\{G_\sigma(z)\} = G_\sigma\{F(z)\}.$$

$G_\sigma(z)$ hat die Entwicklung

$$G_\sigma(z) = z - \frac{\sigma}{2} z^2 + O(z^3).$$

Daher ist $G_\sigma(z) = F_{-\sigma}(z)$ und $F_{-\sigma}(z)$ konvergiert in $|z| < \varrho'$. Es genügt also die Behauptung des Satzes für $\sigma > 0$, σ nicht ganz, zu beweisen. Zuerst ist klar, daß $F_\sigma(z)$ keine ganze Funktion ist, denn nach Satz 8 sind $F_n(z)$, $n > 0$ ganz, die einzigen mit $F(z)$ vertauschbaren ganzen Funktionen. Der Konvergenzradius von $F_\sigma(z)$ sei ϱ. Die Annahme $\varrho > 0$ führt auf einen Widerspruch:

Es sei $\varrho > 0$. (i) Dann hindert keine Singularität die Fortsetzung von (53) in der Halbebene $\operatorname{Re} z \geqq 0$; denn sonst gäbe es ein kleinstes $r \geqq 0$, zu dem eine singuläre Stelle z_0: $\operatorname{Re} z_0 \geqq 0$, $|z_0| = r$ existiert. Nach Hilfssatz 5 ist der Hauptwert von $\log(1+z_0)$ ein regulärer Punkt von $F_\sigma(z)$. Die Funktion

$$\Phi(z) = F[F_\sigma\{\log(1+z)\}] = F[F_\sigma\{F_{-1}(z)\}]$$

stimmt in einer Umgebung des Nullpunktes mit $F_\sigma(z)$ überein und gewährt eine reguläre Fortsetzung von $F_\sigma(z)$ über z_0 hinaus. Dabei verstehen wir (wie im ganzen Verlauf des Beweises) unter $\log(1+z)$ den in der aufgeschlitzten Ebene $z \neq r e^{i\pi}$, $r \geq 1$, regulären Zweig, der im Nullpunkt verschwindet.

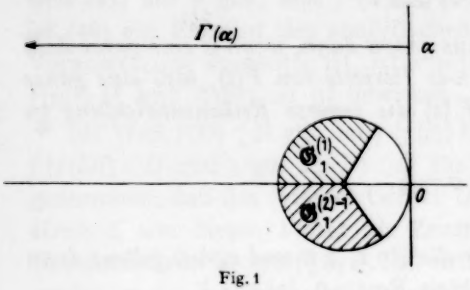


Fig. 1

(ii) $z \to F(z)$ bildet $\operatorname{Re} z \geq 0$ auf das Äußere und den Rand des Kreises $|z+1| \geq 1$ ab. Schneiden wir die Ebene von $-\infty$ bis -2 längs der reellen Achse auf. Dann können wir wieder $F_\sigma(z)$ mittels $\Phi(z)$ in das aufgeschlitzte Gebiet $|z+1| \geq 1$; $z \neq r e^{i\pi}$, $2 \leq r < \infty$, eindeutig fortsetzen.

(iii) Wir nehmen zu α, $-\pi < \alpha \leq -1$ oder $1 \leq \alpha < \pi$ einen Weg $\Gamma(\alpha)$

$$(52) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(\alpha): & 0 + i\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \alpha \\ & \sigma + i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array} \right\} \quad \text{für } 1 \leq \alpha < \pi,$$

$$(53) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(\alpha): & 0 + i\tau, \quad 0 \geq \tau \geq \alpha \\ & \sigma + i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array} \right\} \quad \text{für } -\pi < \alpha \leq -1.$$

$z \to F(z)$ bildet $\Gamma(\alpha)$ auf einen Weg ab, der vom Nullpunkt bis zum Winkel α auf dem Kreisrand $|z+1| = 1$ und dann radial gegen -1 läuft. Auf diese Weise wird $F_\sigma(z)$ durch $\Phi(z)$ in die Gebiete

$$\mathfrak{G}_1^{(1)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad 1 \leq \Theta < \pi,$$

und

$$\mathfrak{G}_1^{(2)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\pi < \Theta \leq -1,$$

fortgesetzt.

Man nimmt nun weitere Wege $\Gamma(\alpha)$: (52) bzw. (53) mit $\sin 1 \leq \alpha < 1$ bzw. $-1 < \alpha \leq \sin(-1)$ und erhält eine entsprechende Fortsetzung von $F_\sigma(z)$ in die Gebiete

$$\mathfrak{G}_2^{(1)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin 1 \leq \Theta < 1,$$

und

$$\mathfrak{G}_2^{(2)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -1 < \Theta \leq -\sin 1.$$

Nach n solchen Schritten kommt man zu zwei Gebieten $\mathfrak{G}_n^{(1)}$, $\mathfrak{G}_n^{(2)}$ der Form:

$$\mathfrak{G}_n^{(1)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin_{(n-1)}(1) \leq \Theta < \sin_{(n-2)}(1),$$

$$\mathfrak{G}_n^{(2)}: \quad -1 + r e^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\sin_{(n-2)}(1) < \Theta \leq -\sin_{(n-1)}(1),$$

wobei $\sin_{(n)} z$ die n-te Iterierte von $\sin z$ ist. Für $n \to \infty$ ist nun $\sin_n 1$ eine monoton abnehmende Folge von positiven Zahlen und hat einen limes γ, für den $\sin\gamma = \gamma$. Also strebt $\sin_n 1 \to 0$.

Wir sehen, daß wir $F_\sigma(z)$ überall in die Ebene fortsetzen können, wenn wir die reelle Achse von $-\infty$ bis 0 wegnehmen. Auf dem Konvergenzkreis $|z| = \varrho$ liegt mindestens eine singuläre Stelle von $F_\sigma(z)$, also ist diese eindeutig, und zwar der Punkt $-\varrho$. Daraus leiten wir jetzt einen Widerspruch her. Für $-\varrho < x$ ist $F_\sigma(x)$ reell, weil alle a_n reell sind, und für $-\varrho < x < 0$ ist

$F_\sigma(x) > x$. Denn es ist $F_\sigma(0) = 0$, und für kleine negative x ist $F_\sigma(x) > x$; wenn $F_\sigma(x_0) \leq x_0$, $-\varrho < x_0 < 0$, so wäre $F_\sigma(x_1) = x_1$ für ein $x_0 \leq x_1 < 0$, und wenn x_1 der größte solche Wert ist [also $F_\sigma(x) > x$ für $x_1 \leq x \leq 0$], so ist $F_\sigma\big(F(x_1)\big) = F\big(F_\sigma(x_1)\big) = F(x_1)$. Aber es gilt $x_1 < F(x_1) < 0$, entgegen der Definition von x_1. Also gilt $F_\sigma(x) > x$ für $x > -\varrho$. Nun gilt $F(-\varrho) > -\varrho$, so daß sich $F_\sigma\{F(z)\}$ regulär in $-\varrho$ verhält und außerdem ist $F_\sigma\big(F(-\varrho)\big) > F(-\varrho) > -1$. Also gibt $\Psi(x) = F_{-1}[F_\sigma\{F(x)\}]$ eine reguläre Fortsetzung von $F_\sigma(x)$ längs der negativen reellen Achse von 0 bis $-\varrho$ und liefert eine reguläre Entwicklung im Punkt $-\varrho$. Dann wäre aber jeder Punkt des Konvergenzkreises eine reguläre Stelle. Die Annahme $\varrho > 0$ ist also falsch.

Literatur

[1] Schröder, E.: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. **2**, 317–365 (1870). — [2] Schröder, E.: Über iterierte Funktionen. Math. Ann. **3**, 296–322 (1871). — [3] Koenigs, G.: Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionelles. Annales sci. de l'Ecole Normale Supérieure (3), Suppl., (1884), 3–41. — [4] Julia, G.: Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles. J. Math. **8**, 1 (1918). — [5] Fatou, P.: Sur les équations fonctionelles. Bull. Soc. Math. France **47**, 161–271 (1919); **48**, 33–94, 208–314 (1920). — [6] Fatou, P.: Sur l'itération des fonctions transcendantes entières. Acta math. **47**, 337–370 (1926). — [7] Bödewadt, U. T.: Zur Iteration reeller Funktionen. Math. Z. **49**, 497–516 (1943–1944). — [8] Baker, I. N.: The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation $f\{f(z)\} = F(z)$. Math. Ann. **129**, 174–180 (1955). — [9] Thron, W. J.: Entire solutions of a functional equation. Canadian J. Math. **8**, 47–48 (1956). — [10] Pólya, G.: On an integral function of an integral function. J. London Math. Soc. **1**, 12–15 (1926). — [11] Littlewood, J. E.: A General Theorem on integral functions of finite order. Proc. London Math. Soc. (2) **6**, 189–204 (1908). — [12] Wiman, A.: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null. Math. Ann. **76**, 197–211 (1915). — [13] Amirà, B.: Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières. Math. Z. **22**, 206–221 (1925). — [14] Besicovitch, A. S.: On integral functions of order <1. Math. Ann. **97**, 677–695 (1927). — [15] Cartwright, M. L.: On the minimum modulus of integral functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **30**, 412–420 (1934). — [16] Pennycuick, K.: On a theorem of Besicovitch. J. London Math. Soc. **10**, 210–212 (1935). — [17] Titchmarsh, E. C.: The theory of functions, 2nd edit. Oxford 1939. — [18] Ritt, J. F.: On the iteration of rational functions. Trans. Amer. Math. Soc. **21**, 348–356 (1920). — [19] Ritt, J. F.: Prime und composite polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 51–66 (1922). — [20] Jacobsthal, E.: Über vertauschbare Polynome. Math. Z. **63**, 243–276 (1955). — [21] Julia, G.: Mémoire sur la permutabilité des fractions rationelles. Annales sci. de l'Ecole Normale Supérieure (3) **39**, 131–215 (1922). — [22] Bohr, H.: Über einen Satz von Edmund Landau. Scripta Univ. atque Bibl. Hierosolymitanarum **1**, Nr. 2 (1923). — [23] Pólya, G., u. G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. 2. Berlin 1925. — [24] Bieberbach, L.: Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. Math. Z. **2**, 158–170 (1918). — [25] Bieberbach, L.: Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Math. Z. **3**, 175–190 (1919). — [26] Rosenbloom, P.: L'itération des fonctions entières. C. R. Acad. Sci. Paris **227**, 382–383 (1948). — [27] Rosenbloom, P.: The fix-points of entire functions. Medd. Lunds Univ. mat. Sem., Suppl.-Bd. M. Riesz 186–192 (1952). — [28] Valiron, G.: Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. August 1957)

NEUMANN, B. H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 164–172 (1958)

Ascending Verbal and Frattini Series

Dedicated to FRIEDRICH LEVI for his 70th birthday, 6 February 1958

By

B. H. NEUMANN

§ 1. Introduction

Let f be a function that assigns to every group G a certain subgroup

$$f(G) \leqq G. \tag{1.1}$$

Then we are led, by iteration of the function, to *descending f-series*

$$G_0 \geqq G_1 \geqq G_2 \geqq \cdots, \qquad G_{i+1} = f(G_i);$$

and we can also define, dually, the *ascending f-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = f(G_{i+1}).$$

The well-known (descending) *derived series* is obtained in this way by taking as $f(G)$ the derived (or commutator) group G' of G; the dual notion of *ascending derived series* was introduced and studied recently [*10*]. Some other well-known series, such as the lower (or descending) and upper (or ascending) central series are not of the type here considered.

A descending f-series can be continued indefinitely; but it may be ultimately stationary, that is, it may happen that $G_n = G_{n+1}$, and then all further terms are the same. This is the case in particular if the trivial group $\{1\}$ is reached after a finite number of steps — as for example in the descending derived series of soluble groups.

On the other hand if in an ascending f-series one of the inclusions is proper, then all further inclusions are proper, and the series can not become stationary; but it can break off, that is to say, it can lead to a group G_n which is not of the form $f(H)$ for any group H.

Criteria for this to happen were given for ascending derived series in [*10*]. These criteria will here be extended to other ascending f-series, using mostly straightforward applications or generalizations of the methods of [*10*]. Two kinds of functions f are here defined and considered, leading to what we call *ascending verbal series* and *ascending Frattini series*.

§ 2. Verbal subgroups

It is natural to restrict attention to functions f that depend not so much on the individual group as on its isomorphism type; that is to say, it is natural to assume that

$$f(G\iota) = (f(G))\,\iota$$

for every isomorphic mapping ι of the group G. Such a function f assigns to isomorphic groups isomorphic subgroups that are, moreover, "isomorphically situated"; and $f(G)$ is then necessarily a characteristic subgroup of G.

One of the most important features of the derived group used in the discussion [*10*] of ascending derived series is its corresponding behaviour under homomorphisms: every homomorphism of a group maps its derived group onto the derived group of the map. This suggests imposing on the function f the condition that it commutes with homomorphisms, that is that

$$f(G\omega) = \big(f(G)\big)\omega \tag{2.1}$$

for every group G and homomorphism ω of G. In this section we derive an alternative (and more familiar) description of such functions.

It is immediately seen that such a function assigns to each group G a *strictly characteristic* (BAER [*1*]) subgroup $f(G)$, that is a subgroup which admits all homomorphisms of G onto[1]) G. Next we see that the function f is completely determined by its values for free groups; for every group G is a homomorphic map of a free group F:

$$G = F\omega,$$

whence by (2.1)

$$f(G) = \big(f(F)\big)\omega.$$

Now we show that in a free group of infinite rank a subgroup that admits all ependomorphisms[1]) also admits all endomorphisms, and is thus *fully invariant.*

LEMMA 2.2. *Let F be a free group of infinite rank and U a strictly characteristic subgroup of F. Then U is fully invariant in F.*

PROOF. Let X be a free basis of F, and $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an element of U expressed as a word in generators $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Let η be an arbitrary endomorphism of F. Then there is an ependomorphism θ of F such that

$$x_1\theta = x_1\eta,\ x_2\theta = x_2\eta,\ \ldots,\ x_n\theta = x_n\eta.$$

It suffices to define θ by these equations together with equations $x\theta = x'$ for the remaining generators $x \in X$ in such a way that θ maps $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ onto X; and this is possible because X is assumed infinite. Then

$$u\eta = u\theta \in U\theta = U.$$

It follows that $U\eta \subseteq U$, and as the endomorphism η was arbitrary, U is fully invariant.

It may be remarked that the corresponding proposition for free groups of finite rank is not valid; for an ependomorphism of a free group of finite rank is necessarily an automorphism, and thus for these groups "strictly characteristic" is no more than just "characteristic"; and it is known that

[1]) The term *epimorphism* has recently been proposed for *homomorphism onto*; here we have *endomorphisms onto*, which will correspondingly be called *ependomorphisms*. Similarly the recent creation of *monomorphism* for *isomorphism into* suggests *monendomorphism* for *one-to-one endomorphism*.

there are characteristic but not fully invariant subgroups of free groups of finite rank. In this context I should like to draw attention to the unsolved problem whether free groups of infinite rank have characteristic subgroups that are not fully invariant.

The fully invariant subgroups of free groups are known: they are the *verbal subgroups*. If $\mathfrak{V}$ is a set of words $v(x,y,\ldots)$, $w(x,y,\ldots)$, ..., then the corresponding verbal subgroup $\mathfrak{V}(G)$ of the group G is the group generated by the "values" of these words in G, that is the elements $v(g,h,\ldots), w(g,h,\ldots),\ldots$ obtained when arbitrary elements $g, h, \ldots$ of G are substituted for the "variables" $x, y, \ldots$. One easily sees that a verbal subgroup is necessarily fully invariant; in free groups the converse is also true [9, Theorem 9.1].

THEOREM 2.3. *The functions f with the properties*

$$f(G) \leqq G, \tag{1.1}$$

$$f(G\omega) = \big(f(G)\big)\omega \tag{2.1}$$

(for all groups G and their homomorphisms ω) are just those given by the verbal subgroups

$$f(G) = \mathfrak{V}(G), \tag{2.4}$$

the set $\mathfrak{V}$ of words depending on f but not on G.

PROOF. It is obvious that for given $\mathfrak{V}$, (2.4) defines a function with the required properties. Conversely we have already seen that if f with these properties is given, then $f(F)$ is fully invariant and thus verbal in F whenever F is free of infinite rank. Also, if $f(F) = \mathfrak{V}(F)$ and if $G = F\omega$, then

$$f(G) = f(F\omega) = \big(f(F)\big)\omega = \big(\mathfrak{V}(F)\big)\omega = \mathfrak{V}(F\omega) = \mathfrak{V}(G).$$

It only remains to show that $\mathfrak{V}$ can be chosen to be independent of the free group F. To this end we take a free group F_0 of denumerably infinite rank and choose $\mathfrak{V}$ as a set of words whose *verbal closure* $\mathfrak{V}(F_0)$ in F_0 is $f(F_0)$. Now let F be an arbitrary free group of infinite rank, and let $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be an element of $f(F)$, expressed in terms of generators $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taken from some basis of F. There is a homomorphism ω of F onto F_0 that maps $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onto the first n generators $y_1, y_2, \ldots, y_n$ of some free basis $y_1, y_2, \ldots$ of F_0. Hence $u(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in f(F_0) = \mathfrak{V}(F_0)$. Conversely, if $u(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathfrak{V}(F_0) = f(F_0)$, then $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f(F)$, because of the same homomorphism. It follows that $f(F) = \mathfrak{V}(F)$. Finally, if F_r is a free group of finite rank r, then there is a homomorphism of F_0 onto F_r, and by what we have already seen this implies $f(F_r) = \mathfrak{V}(F_r)$.

It may be remarked that the cardinal number of the set of possible functions f thus equals the cardinal number of the set of verbal subgroups of F_0; this clearly can not be less than $\aleph_0$ nor greater than $2^{\aleph_0}$ — but what it is remains an unsolved problem.

We mention, as a corollary to Theorem 2.3, that *a function f with the properties* (1.1), (2.1) *assumed in the theorem is monotone*, that is to say, $H \leqq G$ *implies* $f(H) \leqq f(G)$.

9272-69 12 R

§ 3. Ascending $\mathfrak{V}$-series

We now consider ascending f-series when f is as in § 2. Thus

$$f(G) = \mathfrak{V}(G),$$

and we speak of *verbal series* or $\mathfrak{V}$-*series*. The series we study are then of the form

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = \mathfrak{V}(G_{i+1}).$$

We put

$$G^* = \cup G_i;$$

if the series breaks off, then G^* is its last term; if the series is infinite and not constant, then G^* is its inductive limit and different from all its terms. If θ is a homomorphism of G^*, then

$$G_0\theta \leqq G_1\theta \leqq G_2\theta \leqq \cdots$$

is also a $\mathfrak{V}$-series, as

$$G_i\theta = \left(\mathfrak{V}(G_{i+1})\right)\theta = \mathfrak{V}(G_{i+1}\theta);$$

and the union of this series is

$$\cup G_i\theta = G^*\theta.$$

We shall apply this especially to the canonic homomorphism of G^* onto G^*/G_0, to obtain a series that starts with the trivial group. This is legitimate because G_0 is characteristic (even fully invariant) in G_1 and G_1 is characteristic in G_2; therefore G_0 is characteristic in G_2, and then similarly in G_3, and so on; thus G_0 is normal in all G_i and then also in their union G^*, and the factor group G^*/G_0 is defined. For the sake of notational simplicity we shall give effect to this homomorphism by assuming G_0 trivial when convenient. It may be remarked that the argument used to show G_0 normal in G^* will equally show that every G_i, and indeed every characteristic subgroup of a G_i, is normal in G^*.

Assuming then for the present that G_0 is trivial, we consider[2]) the effect on G_i, for fixed i, of the inner automorphisms of G^*. As a normal subgroup G_i admits these inner automorphisms, and they therefore induce a certain group Γ_i^* of automorphisms of G_i. We obtain Γ_i^* from G^* by a homomorphism θ_i with the centralizer C_i^* of G_i in G^* as kernel. Transformation by the elements of G_k induces a subgroup of Γ_i^* on G_i, namely

$$\Gamma_i^k = G_k\theta_i \cong G_k C_i^*/C_i^*.$$

It follows that

$$\Gamma_i^0 \leqq \Gamma_i^1 \leqq \Gamma_i^2 \leqq \cdots \tag{3.1}$$

is an ascending $\mathfrak{V}$-series, and this also starts with the trivial group. The series may, or may not, ascend properly. If $\Gamma_i^k = \Gamma_i^{k-1}$, then also

$$\Gamma_i^{k-2} = \mathfrak{V}(\Gamma_i^{k-1}) = \mathfrak{V}(\Gamma_i^k) = \Gamma_i^{k-1},$$

[2]) We here closely follows § 3 of [10].

9212-69

12 B

and continuing thus, we find that

$$\Gamma_i^k = \Gamma_i^{k-1} = \cdots = \Gamma_i^0$$

is trivial. This means that then G_i and G_k centralize each other; that is, if $i \leq k$, then G_i lies in the centre of G_k, and if $i > k$, then G_k lies in the centre of G_i. Denoting, as usual, by $[A, B]$ the group generated by all commutators $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ with $a \in A$ and $b \in B$, and dropping the assumption that G_0 is trivial, we thus arrive at the conclusion that *if* $\Gamma_i^{k-1} = \Gamma_i^k$, *then* $[G_i, G_k] \leqq G_0$. In particular, if G_i/G_0 is non-abelian, then $\Gamma_i^{i-1} \neq \Gamma_i^i$, and the series (3.1) is not constant. Remembering that all Γ_i^k are automorphism groups of G_i, and Γ_i^i in particular is the group of inner automorphisms of G_i, we see that

$$\Gamma_i^i/\Gamma_i^i \leqq \Gamma_i^{i+1}/\Gamma_i^i \leqq \Gamma_i^{i+2}/\Gamma_i^i \leqq \cdots$$

is an ascending $\mathfrak{V}$-series of subgroups of the automorphism class group $A(G_i)$ of G_i; and if G_i/G_0 is non-abelian, then this series ascends properly. If we know that in $A(G_i)$ there are no infinite ascending $\mathfrak{V}$-series of subgroups, it follows that our original $\mathfrak{V}$-series breaks off. This is in particular the case when $A(G_i)$ is finite. Thus we have

THEOREM 3.2. *If G_i/G_0 is non-abelian for some i, and if the automorphism class group $A(G_i)$ is finite, then the ascending $\mathfrak{V}$-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

The assumption of finiteness of $A(G_i)$ could here be replaced by the "ascending $\mathfrak{V}$-chain condition for subgroups" of $A(G_i)$. An immediate consequence of the theorem is the following corollary.

COROLLARY 3.3. *If G_i/G_0 is finite and non-abelian then the ascending $\mathfrak{V}$-series breaks off.*

From this one can further deduce:

THEOREM 3.4. *If G_i/G_0 is finitely generated, non-abelian, and soluble, then the ascending $\mathfrak{V}$-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

PROOF. It has been shown elsewhere [*10*, Lemma 7.2] that every finitely generated strictly metabelian group contains a characteristic subgroup whose factor group is finite and strictly metabelian. This obviously implies the following lemma.

LEMMA 3.5. *Every finitely generated non-abelian and soluble group contains a characteristic subgroup whose factor group is finite and non-abelian.*

Reducing modulo G_0 and further modulo such a characteristic subgroup of G_i, we obtain a new ascending $\mathfrak{V}$-series

$$\{1\} = H_0 \leqq H_1 \leqq H_2 \leqq \cdots$$

in which H_i is finite and non-abelian. By Corollary 3.3 this series breaks off, and so then does the original series; and the theorem follows.

The assumption that G_i/G_0 is finitely generated can clearly not be omitted. The assumption that G_i/G_0 is non-abelian can not be dispensed with, either: this is seen by taking G_i as the cyclic group of order p^i for some (fixed) prime number p, with the obvious embedding of G_i in G_{i+1}. Then

$$\{1\} = G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

is an infinite properly ascending $\mathfrak{V}$-series, where the set $\mathfrak{V}$ of words simply consists of x^p; but all G_i are finitely generated and soluble.

Whether the assumption of solubility is really needed I do not know, but would conjecture that it is not. Too little is as yet known about the finitely generated infinite simple groups, about the laws that are satisfied in them, and about their automorphism class groups, to decide the question

§ 4. Ascending Frattini series

We turn to the consideration of a different kind of function, namely the function that assigns to every group G its Frattini subgroup $\Phi(G)$. This is defined as the intersection of all maximal (proper) subgroups of G, if G has maximal subgroups; otherwise one puts $\Phi(G) = G$. An alternative characterization of $\Phi(G)$ is in terms of the "non-generators" of G, that is those elements that can be omitted from any generating set of G in which they occur; the non-generators form a subgroup of G, and this[3]) is $\Phi(G)$.

The Frattini subgroup is not necessarily fully invariant; this is shown by the following example[4]): Let A be the holomorph of the cyclic group of order 5, or, equivalently, the group (of order 20) generated by elements a, b with the defining relations

$$a^5 = b^4 = 1, \quad b^{-1} a b = a^2.$$

Let C be cyclic of order 4, generated by an element c. Finally let G be the direct product

$$G = A \times C.$$

The Frattini subgroup of A is trivial; that of C is the cycle of order 2 generated by c^2; and that of G is the direct product of these two[5]),

$$\Phi(G) = \Phi(A) \times \Phi(C),$$

that is again $\{c^2\}$. If η denotes the endomorphism of G which maps A trivially and C on the subgroup $\{b\}$ of order 4 in A, then

$$\Phi(G\eta) = \{b^2\} \not\subseteq \Phi(G).$$

Thus $\Phi(G)$ does not admit η and is not fully invariant.

[3]) Compare for instance [8].

[4]) Adapted from one used by GASCHÜTZ [5] for a similar purpose. In this paper GASCHÜTZ is interested in finite groups only; for this reason, and also to make the present paper reasonably self-contained, I have not tried to avoid any overlap with his paper.

[5]) MILLER [7]; GASCHÜTZ [5], Satz 6.

The monotoneity mentioned at the end of § 2 does not apply to Frattini subgroups either: this is seen at once from the group A of our example and its subgroup $\{b\}$.

A homomorphism does not necessarily map the Frattini subgroup of the original onto the Frattini subgroup of the image, but at least onto a group that is comparable with the Frattini subgroup of the image; for we have the following lemma[6]).

LEMMA 4.1. *If θ is a homomorphism of the group G then*

$$(\Phi(G))\,\theta \leqq \Phi(G\theta).$$

PROOF. If M is a maximal subgroup of G then $M\theta$ is either a maximal subgroup of $G\theta$ or the whole of $G\theta$ (namely according as M does, or does not, contain the kernel of θ). Conversely, if M^* is a maximal subgroup of $G\theta$, and if M is the complete inverse image of M^* under θ (that is the unique greatest subgroup of G mapped by θ into M^*), then M is a maximal subgroup of G. It follows that

$$\Phi(G\theta) = \cap M^* = \cap (M\theta), \tag{4.2}$$

the first intersection extending over all maximal subgroups M^* of $G\theta$, the second over all maximal subgroups M of G. Now

$$(\Phi(G))\,\theta = (\cap M)\,\theta \leqq \cap (M\theta),$$

and combining this with (4.2), we obtain the lemma. One can prove the lemma also by showing that θ maps every non-generator s of G on a non-generator of $G\theta$; for if $s\theta$ together with a set T^* generates $G\theta$, if T is an inverse image of T^* in G, and if K is the kernel of θ, then s, T, and K together generate G; then also T and K together generate G, and applying θ we find that $T\theta = T^*$ generates $G\theta$. Thus $s\theta$ is a non-generator of $G\theta$, and the lemma again follows.

We now consider ascending Frattini series

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = \Phi(G_{i+1}).$$

If θ is a homomorphism of

$$G^* = \cup G_i,$$

and $G_i\theta = H_i$, then

$$H_0 \leqq H_1 \leqq H_2 \leqq \cdots$$

is not in general again a Frattini series, because Lemma 4.1 allows us only to conclude that

$$H_i \leqq \Phi(H_{i+1}). \tag{4.3}$$

Nevertheless it is possible to prove propositions analogous to Theorems 3.2 and 3.4:

THEOREM 4.4. *Let G_i have a characteristic subgroup N with finite, non-abelian factor group G_i/N. Then the ascending Frattini series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

[6]) GASCHÜTZ [5], Satz 3.

PROOF. As before, N is normal in G^*. , We denote by Γ_i^* the group of automorphisms induced by G^*/N in G_i/N, and by Γ_i^k the subgroup of Γ_i^* induced in G_i/N by G_k/N. Then

$$\Gamma_i^* = G^* \theta_i, \qquad \Gamma_i^k = G_k \theta_i,$$

where the homomorphism θ_i is obtained by first reducing G^* modulo N and then the factor group modulo the centralizer of G_i/N. The ascending series

$$\Gamma_i^0 \leqq \Gamma_i^1 \leqq \Gamma_i^2 \leqq \cdots \tag{4.5}$$

is not in general a Frattini series; but applying (4.3) we obtain that

$$\Gamma_i^k \leqq \Phi(\Gamma_i^{k+1}). \tag{4.6}$$

Now each Γ_i^k is an automorphism group of the group G_i/N which is finite by assumption. Hence each Γ_i^k is finite, and therefore either trivial or distinct from its Frattini subgroup: this is in fact true, more generally, of all finitely generated groups. Hence if the series (4.5) contains a non-trivial group, then it must, by (4.6), ascend properly (after, possibly, some trivial terms). Now Γ_i^i is the group of inner automorphisms of G_i/N, and as G_i/N is assumed non-abelian, Γ_i^i is non-trivial. It follows that the series (4.5) does ascend properly; but as it consists of automorphism groups of the fixed finite group G_i/N, it must break off, and the theorem follows.

COROLLARY 4.7. *If G_i/G_0 is finite and non-abelian then the ascending Frattini series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

COROLLARY 4.8. *If G_i/G_0 is finitely generated and soluble but not abelian, then the ascending Frattini series breaks off.*

This follows like Theorem 3.4 from Lemma 3.5. The example at the end of § 3 can be used to show that here also the assumption that G_i/G_0 is not abelian can not be dispensed with; the assumption of solubility is most probably superfluous.

It may be remarked that in all these results the Frattini subgroup $\Phi(G)$ can be replaced by the Baer-Frattini subgroup $\Phi^e(G)$ which is defined as the intersection of all proper maximal subgroups of finite index (see BAER [2] p. 314).

Our results imply that there are groups that cannot be Frattini subgroups of any group whatsoever. And indeed a finite Frattini subgroup must be nilpotent[7]). There are also examples among the nilpotent groups, even the finite nilpotent groups, that are not Frattini subgroups of any group, finite or infinite. In fact an interesting necessary condition formulated by GA-

[7]) BAER [3] remarks that the Frattini subgroup is nilpotent if it is soluble with maximal condition for subgroups. If it is finite, one can do without the assumption of solubility: in fact the classical proof of FRATTINI [4] applies without change. For examples of non-nilpotent Frattini subgroups, see [6].

SCHÜTZ [5, Theorem 11] for a group H to be the Frattini subgroup of a finite group G does not really require G, but only H to be finite (and can be extended also to some infinite groups H). It follows from this that, for example, neither of the non-abelian groups of order 8 is a Frattini subgroup — a fact not difficult to verify directly. In this context we state an unsolved problem: If the finite group H is the Frattini subgroup of some group, is H then also (isomorphic to) the Frattini subgroup of a suitable *finite* group?

References

[1] BAER, R.: The higher commutator subgroups of a group. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 143–160 (1944). — [2] BAER, REINHOLD: Das Hyperzentrum einer Gruppe III. Math. Z. **59**, 299–338 (1953). — [3] BAER, R.: Review of K. A. HIRSCH: On infinite soluble groups V. Math. Reviews **15**, 851 (1954). — [4] FRATTINI, G.: Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni. Atti R. Accad. dei Lincei, Rendiconti (IV) **1**, 281–285 (1885). — [5] GASCHÜTZ, WOLFGANG: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **58**, 160–170 (1953). — [6] HIGMAN, GRAHAM, and B. H. NEUMANN: On two questions of ITÔ. J. London Math. Soc. **29**, 84–88 (1954). — [7] MILLER, G. A.: The φ-subgroup of a group. Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 20–26 (1915); Collected Works **3**, 441–447 (1946). — [8] NEUMANN, B. H.: Some remarks on infinite groups. J. London Math. Soc. **12**, 120–127 (1937). — [9] NEUMANN, B. H.: Identical relations in groups I. Math. Ann. **114**, 506–525 (1937). — [10] NEUMANN, B. H.: Ascending derived series. Compos. Math. **13**, 47–64 (1956).

The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 14. Oktober 1967)

THRON, W. J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 173–182 (1958)

On Parabolic Convergence Regions for Continued Fractions*)

By
W. J. THRON

1. INTRODUCTION. Among convergence criteria for continued fractions

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\cdots, \tag{1.1}$$

those based on the family of parabolas P_α play a particularly important roll. The parabolas P_α can be defined geometrically as those that have their focus at the origin and pass through the point $z=-\frac{1}{4}$, analytically they can be described as follows:

$$a_n \in P_\alpha \text{ if and only if } |a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha.$$

Here $-\pi/2<\alpha<\pi/2$.

Two groups of requirements enter into the statements of the convergence theorems, which we are concerned with. In each group the conditions are here arranged in order of increasing strength.

I
(a) $a_n \in P_\alpha$, for all $n \geq 1$;
(b) $a_n \in K$, for all $n \geq 1$, where K is a closed set in the interior of P_α.

II
(a) at least one of the series $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_2 \cdots a_{2\nu}}{a_3 \cdots a_{2\nu+1}}$, $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_4 \cdots a_{2\nu}}$ diverges,
(b) $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-\frac{1}{2}}$ diverges,
(c) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu|a_\nu|)^{-1}$ diverges,
(d) $|a_n| < M$, for all $n \geq 1$.

The first parabola theorem, for $\alpha=0$, is due to SCOTT and WALL [5]. They proved that I(a) and II(a) together are sufficient for the convergence of the continued fraction (1.1).

*) This research was supported in part by the United States Air Force under Contract No. AF 49(638)–100 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

For general α the sufficiency of I(b) and II(a) was proved by PAYDON and WALL [2]. LEIGHTON and THRON [1] independently, proved that I(b) and II(d) together are sufficient for the convergence of (1.1). Somewhat later THRON [7] established the sufficiency of conditions I(a) and II(a) for all permissible α. This is known to be a best result.

Nevertheless there are some deficiencies in the present state of the subject. All proofs, except those for the case $\alpha = 0$, are non-elementary, in that use is made of either the Stieltjes-Vitali theorem [8, p. 142] or the theory of positive definite continued fractions and the theorem of invariability [9, IV and p. 96]. This, as PERRON [3, v. 2 p. 82] points out, is aesthetically undesirable. In addition these methods do not yield results of uniform convergence in case all elements are allowed to vary independently. This type of uniform convergence is of importance in the convergence neighborhood theorems (see [3, v. 2 p. 90]). Finally, the present proofs give very little or no insight at all into the question of how fast the approximants of the continued fraction approach their limiting value.

In this article we attempt to remedy these shortcomings: Our methods are elementary, and in the key formula (3.3) we have a usable estimate of the error committed if the continued fraction is replaced by one of its approximants. The formula also gives a good deal of information as to the factors that influence the rapidity of convergence of the continued fraction. A convergence neighborhood result in which the convergence is proved to be uniform, even though the elements a_n be functions of any number of variables, is presented in Theorem B. In this theorem the convergence neighborhoods extend to the boundary of the parabola P_α. In Theorem C we obtain a parabola theorem which requires only condition (a) in group I, but does require condition (c) in group II. In addition two results in which the a_n lie in different parabolas for different values of n are established.

In the proof we employ the well known "nest of circles" argument, the sharp estimate for B_n/B_{n-1} first used by SINGH and THRON [6], and a new way of computing the radii of the nested circles. This last step involves integration and can, if desired, be replaced by the possibly more elementary argument using the geometry of inversions.

2. PRELIMINARY CONSIDERATIONS. Let regions P_n and V_n be defined respectively by

(2.1) $a_n \in P_n$, if and only if $a_n = e^{2i\alpha} k_n g_n (1 - g_{n+1}) \cos^2\alpha (u_n + i v_n)$,

$$\text{where } v_n^2 \leq 4u_n + 4,\ 0 < k_n \leq 1$$

and

(2.2) $v_n \in V_n$, if and only if $\Re(v_n e^{-i\alpha}) \geq -g_n \cos\alpha$.

Here the constants α and g_n, $n = 1, 2, \ldots$, are subject to the following restrictions $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $0 < g_n < 1$.

The following group of lemmas will be useful.

LEMMA 1. $\Re\left((u+iv)/(x+iy)\right) \geq -1/c$, *provided* $v^2 \leq 4u+4$, *and* $x \geq c > 0$.

For the proof we note that

$$F = \Re\left((u+iv)/(x+iy)\right) = \frac{ux+vy}{x^2+y^2}.$$

Leaving u, v and x fixed we determine the value of y that minimizes F. From elementary calculus this value is known to be one of the solutions of the equation

$$v y^2 + 2uxy - x^2 v = 0.$$

That is

$$y = x\left(-u \pm \sqrt{u^2+v^2}\right)/v.$$

Thus

$$\min_{-\infty<y<\infty} F = \frac{-v^2\sqrt{u^2+v^2}}{2x\left(u^2+v^2+u\sqrt{u^2+v^2}\right)} = \frac{-v^2}{2x\left(u+\sqrt{u^2+v^2}\right)}.$$

Continuing to keep u and x fixed we now allow v to vary. It can vary only between $0 \leq v^2 \leq 4u+4$. There is no critical point in this range, so the minimum is attained for $v^2 = 4u+4$. This leads to

$$\min_{y,v} F = \frac{-(4u+4)}{2x(u+(u+2))} = -\frac{1}{x}.$$

Since $x \geq c > 0$ the lemma is proved.

Our next lemma is not new (see for example [9, p. 70]). For completeness sake a proof is included here.

LEMMA 2. *If* $w_{n+1} \in V_{n+1}$, *and* $a_n \in P_n$, *then*

$$\frac{a_n}{1+w_{n+1}} \in V_n.$$

If w_{n+1} satisfies the conditions of the lemma then $1+w_{n+1}$ can be written as

$$1 + w_{n+1} = e^{i\alpha}(1-g_{n+1})\cos\alpha\,(s+it),$$

where $s \geq 1$. Hence

$$\Re\left(e^{-i\alpha}\frac{a_n}{1+w_{n+1}}\right) = k_n g_n \cos\alpha\,\Re\left(\frac{u_n+iv_n}{s+it}\right).$$

An application of Lemma 1 then completes the proof of this lemma.

Now introduce

$$t_n(w) = \frac{a_n}{1+w},$$

and inductively

$$T_1(w) = t_1(w), \quad T_n(w) = T_{n-1}\left(t_n(w)\right), \quad n \geq 2.$$

If we denote, as is customary, the numerator and denominator of the n-th approximant of the continued fraction (1.1) by A_n and B_n, respectively,

then we can write

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \cdots + \frac{a_n}{1} = T_n(0),$$

and in general

$$T_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}. \tag{2.1}$$

The quantities A_n and B_n satisfy the well known (see for example [3, vol. 1, p. 7 and p. 14]) relations

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2}, & A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \\ B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}, & B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

and

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu, \qquad n \geq 1. \tag{2.3}$$

Now let K_n be the circular region[1]) defined[2]) by $K_n = T_n(V_{n+1})$, and let C_n and R_n be its boundary and radius, respectively. From Lemma 2 we have $t_n(V_{n+1}) \subset V_n$ and hence

$$K_n = T_{n-1}(t_n(V_{n+1})) \subset T_{n-1}(V_n) = K_{n-1}.$$

The regions K_n thus form a set of nested circles. Since $w = 0 \in V_{n+1}$ for every n, $T_n(0) \in K_n$, and since $K_{n+m} \subset K_n$ it also follows that $T_{n+m}(0) \in K_n$, so that we have

$$|T_n(0) - T_{n+m}(0)| \leq 2R_n.$$

Since the sequence of approximants of the continued fraction (1.1) is the sequence $\{T_n(0)\}$, convergence of (1.1) can therefore be established if it can be shown that $\lim R_n = 0$.

To obtain R_n we use the formula

$$2\pi R_n = l(C_n) = \int_{D_{n+1}} |T_n'(w)| \, |dw|, \tag{2.4}$$

where D_{n+1} is the boundary of V_{n+1}. From formulas (2.1) and (2.3) we have

$$|T_n'(w)| = \frac{\left| \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \right|}{|B_{n-1}|^2 |w + S_n|^2},$$

where $S_n = B_n/B_{n-1}$. That $B_{n-1} \neq 0$ follows from Lemma 3 below. In our approach to the evaluation of R_n, we require more information about S_n. From relations (2.2) one deduces that $S_1 = 1$ and that

$$S_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} = 1 + a_n / S_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

---

[1]) K_n is the interior of C_n, since K_n is contained in the half-plane V_1.

[2]) The symbol $f(V)$ is understood to mean the set of all $f(w)$, $w \in V$.

With the help of this formula we are now able to prove our third lemma.

LEMMA 3. *Let* $a_n \in P_n$, *and write*

$$S_n = e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_{n+1}(x_n + i y_n),$$

then

$$\min x_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}.$$

Here the minimum is taken over all permissible k_n.

From the relation $S_n = 1 + a_n/S_{n-1}$ we have immediately

$$e^{i\alpha} g_{n+1}\cos\alpha\,(x_n + i y_n) = 1 + k_n \frac{e^{2i\alpha}\cos^2\alpha\, g_n(1-g_{n+1})\,(u_n + i v_n)}{e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_n(x_{n-1} + i y_{n-1})}$$

and hence, since $1 = e^{i\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, by dividing both sides by $e^{i\alpha}\cos\alpha$ and then taking real parts, one obtains

$$g_{n+1}x_n = 1 + k_n(1-g_{n+1})\frac{u_n x_{n-1} + y_{n-1}v_n}{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}.$$

If now $\min x_{n-1}$ exists and is positive an application of Lemma 1 yields for $c = \min x_{n-1}$

$$g_{n+1}\min x_n = 1 - (1-g_{n+1})/\min x_{n-1}. \tag{2.5}$$

From the relation $1 = S_1 = e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_2(x_1 + i y_1)$ follows

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos\alpha\, g_2(x_1 + i y_1)$$

and hence

$$x_1 = \min x_1 = 1/g_2.$$

Since $\prod_{\nu=1}^{0}$ has to be interpreted as 1, this establishes the lemma for $n = 1$. Now assume $\min x_{n-1}$ exists and is given by our formula then from (2.5)

$$\min x_n = \left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right) + 1 - \left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right) / \min x_{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)},$$

and the lemma is thus proved by induction.

It is convenient to write

$$\min x_n = 1 + d_n$$

so that

$$d_n = \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}. \tag{2.6}$$

3. THE MAIN THEOREMS. We are now ready to return to the evaluation of R_n.

$$\int_{D_{n+1}} |T_n'(w)|\,|dw| = \left|\frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{B_{n-1}^2}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha\, g_{n+1}\, dy}{(\cos\alpha\, g_{n+1}\, y + \Im(e^{-i\alpha} S_n))^2 + (\Re(e^{-i\alpha} S_n) - g_{n+1}\cos\alpha)^2}.$$

To arrive at this expression we had set w, which has to move along D_{n+1}, equal to

$$e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_{n+1}(-1+iy)$$

and had written

$$|w+S_n| = |\cos\alpha\, g_{n+1}(-1+iy) + e^{-i\alpha} S_n|.$$

Now let $u = y\cos\alpha\, g_{n+1} + \Im(S_n e^{-i\alpha})$, the integral then becomes

$$2\pi R_n = \left|\frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{B_{n-1}^2}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + (\Re(e^{-i\alpha} S_n) - g_{n+1}\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{\pi\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{|B_{n-1}|^2\,|\Re(e^{i\alpha}\bar{S}_n) - g_{n+1}\cos\alpha|},$$

so that we have on the one hand

$$R_n = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|-g_{n+1}\cos\alpha|\,B_{n-1}^2| + \Re(\bar{B}_n B_{n-1} e^{i\alpha})|}, \tag{3.1}$$

and on the other hand, using the formulas (2.2) for the B_n

$$R_n = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|\Re((\bar{B}_n B_{n-1} - g_{n+1} B_{n-1}\bar{B}_{n-1})\, e^{i\alpha})|}$$

$$= \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|\Re(e^{i\alpha} B_{n-1}(\bar{B}_{n-1}(1-g_{n+1}) + \bar{a}_n \bar{B}_{n-2}))|},$$

and finally

$$R_n = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|(1-g_{n-1})\cos\alpha\,|B_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n B_{n-1}\bar{B}_{n-2} e^{i\alpha})|}. \tag{3.2}$$

Replacing n by $n-1$ in (3.1) we have

$$R_{n-1} = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right|}{2|-g_n\cos\alpha|\,B_{n-2}|^2 + \Re(\bar{B}_{n-1}B_{n-2}e^{i\alpha})|}.$$

Hence

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \left|\frac{|a_n|\,(-g_n\cos\alpha|\,B_{n-2}|^2 + \Re(\bar{B}_{n-1}B_{n-2}e^{i\alpha}))}{(1-g_{n+1})\cos\alpha|\,B_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n B_{n-1}\bar{B}_{n-2}e^{i\alpha})}\right|$$

$$= \left|\frac{|a_n|\,\{-g_n\cos\alpha + \Re(\bar{S}_{n-1}e^{i\alpha})\}}{(1-g_{n+1})\cos\alpha|\,S_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n S_{n-1}e^{i\alpha})}\right|.$$

Since we assume $a_n \in P_n$ we can set

$$a_n = e^{2i\alpha}k_n g_n(1-g_{n+1})\cos^2\alpha(u_n + iv_n), \qquad v_n^2 \le 4u_n + 4,\ 0 < k_n \le 1,$$

and

$$S_{n-1} = e^{i\alpha}g_n\cos\alpha(x_{n-1} + iy_{n-1}), \qquad x_{n-1} \ge 1 + d_{n-1}.$$

Upon substitution one obtains

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \left|\frac{k_n g_n(1-g_{n+1})\cos^2\alpha(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(-g_n\cos\alpha + g_n\cos\alpha\, x_{n-1})}{(1-g_{n+1})\cos^3\alpha\, g_n^2(x_{n-1}^2+y_{n-1}^2) + (1-g_{n+1})g_n^2\cos^3\alpha\, k_n(x_{n-1}u_n + y_{n-1}v_n)}\right|$$

$$= \left|\frac{k_n(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2+k_n(x_{n-1}u_n+y_{n-1}v_n)}\right|$$

$$= \left|k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{x_{n-1}^2+x_{n-1}u_n k_n + \left(y_{n-1}+\frac{k_n v_n}{2}\right)^2 - \frac{v_n^2k_n^2}{4}}\right|.$$

The denominator is not increased if the square is omitted and the remaining v_n^2 is replaced by $4u_n+4$. The absolute value signs can now be omitted, since numerator and denominator are clearly positive.

This leads to the inequality

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \le k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{(x_{n-1}-k_n)(x_{n-1}+k_n+u_n k_n)}$$

$$= k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{(x_{n-1}-k_n)(x_{n-1}-k_n+k_n(u_n+2))}.$$

The inequality is further strengthened if we replace the first k_n in the denominator by 1, and u_n+2 by $(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Thus

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \le \frac{1}{\left(1+\frac{x_{n-1}-k_n}{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}k_n}\right)}.$$

From (3.1) we have $R_1 = |a_1|/2(1-g_2)\cos\alpha$. Also

$$(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}k_n = |a_n|/\cos^2\alpha\, g_n(1-g_{n+1}), \quad \text{and} \quad x_{n-1} \ge 1 + d_{n-1},$$

so that

$$(3.3) \qquad R_n \le \frac{|a_1|}{2(1-g_2)\cos\alpha\prod_{\nu=2}^{n}\left(1+\frac{(1-k_\nu+d_{\nu-1})\cos^2\alpha\, g_\nu(1-g_{\nu+1})}{|a_\nu|}\right)}.$$

It follows from the definition of R_n that the difference between the n-th approximant and the limiting value of a convergent continued fraction is, in absolute value, not greater than $2R_n$. We note that the convergence of the continued fraction can be quite rapid if the a_n are bounded in absolute value and stay a sufficient distance away from the boundaries of the parabolic regions P_n, for example if $k_n = \frac{1}{2}$ for all n.

For the derivation of convergence criteria we are only interested in the case $k_n = 1$, for all n. A sufficient condition for $\lim R_n = 0$ is then the divergence of the series

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{d_{\nu-1}\, g_\nu (1-g_{\nu+1})}{|a_\nu|}. \tag{3.4}$$

This, as was pointed out earlier is thus sufficient for the convergence of the continued fraction (1.1).

Now let $|a_n| < M$, and $\varepsilon < g_n < 1-\varepsilon$, for all n, then the series (3.4) diverges if the series $\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu$ diverges. It is well known that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(c_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \Big)$$

converge and diverge together [4, p. 327]. From formula (2.6) we can therefore conclude that the continued fraction (1.1) converges if the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{k} \Big(\frac{1}{g_{\nu+1}} - 1 \Big)$$

diverges. This completes the proof of Theorem A.

THEOREM A. *Let $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ and let M and ε be positive constants, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. The continued fraction* (1.1), *whose elements are of the form*

$$a_n = e^{2i\alpha} g_n (1-g_{n+1}) \cos^2\alpha\, (u_n + i v_n), \qquad \text{where } v_n^2 \le 4u_n + 4$$

converges if the three conditions

(i) $$|a_n| < M,$$

(ii) $$\varepsilon < g_n < 1-\varepsilon,$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{k} \Big(\frac{1}{g_{\nu+1}} - 1 \Big) \text{ diverges,}$$

are satisfied.

This theorem overlaps a result of WALL [9, p. 137] if all $\varphi_n = -\alpha$. Our theorem is weaker in that more stringent requirements are imposed on the g_n and in that we require boundedness of the $|a_n|$. However we permit the a_n to approach or lie on the boundaries of the regions P_n. This is not the case in WALL'S result.

The case in which all $g_n = \frac{1}{2}$ is the most interesting. Then $d_n = 1/n$, so that if we require in addition that $|a_n| < M$, we arrive at an estimate for R_n

which is completely independent of the elements a_n of the continued fraction. We have

$$R_n \leq \frac{2M}{\cos\alpha \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{4M\nu}\right)}.$$

It follows that the convergence of the continued fraction is uniform, regardless of what variables, finite or infinite in number, the a_n may depend on. The following result has now been proved.

THEOREM B. *Let $-\pi/2<\alpha<\pi/2$. If all elements of the continued fraction* (1.1) *lie in the parabola P_α, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

and if in addition there exists an $M>0$ such that $|a_n|<M$ for all n, then the continued fraction (1.1) *converges. If the a_n are functions of any number of variables then the convergence of the continued fraction is uniform, provided that throughout the ranges of the variables the elements a_n are subject to the above conditions.*

If the a_n are not assumed to be bounded one easily establishes the following parabola theorem.

THEOREM C. *Let $-\pi/2<\alpha<\pi/2$. If all elements of the continued fraction* (1.1) *lie in the parabola P_α, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

then a sufficient condition for the convergence of (1.1) *is the divergence of*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n|\, n)^{-1}.$$

The relation of this theorem to previously known results was discussed fully in the introduction to this article.

As a final case we discuss the results obtained by setting $g_n = \frac{n}{2n-1}$. Then

$$d_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right) > 1/\left(\tfrac{1}{2}(n+1)(1+\log n)\right),$$

so that the divergence of the series $\sum (|a_n|\, n \log n)^{-1}$ insures the convergence of the continued fraction (1.1). The resulting theorem gives a sequence of parabolas $P_{\alpha,n}$, which close down upon the parabola P_α from the outside.

THEOREM D. *Let $-\pi/2<\alpha<\pi/2$. If the element a_n of the continued fraction* (1.1) *lies in the parabola $P_{\alpha,n}$, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \frac{2n^2}{4n^2-1}\cos^2\alpha,$$

for all $n \geq 1$, then a sufficient condition for the convergence of (1.1) *is the divergence of*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|\, n \log n)^{-1}.$$

References

[1] LEIGHTON, W., and W. J. THRON: Continued fractions with complex elements. Duke Math. J. **9**, 763–772 (1942). — [2] PAYDON, J. F., and H. S. WALL: The continued fraction as a sequence of linear fractional transformations. Duke Math. J. **9**, 360–372 (1942). — [3] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl. Stuttgart: Bd. 1, 1954 und Bd. 2, 1957. — [4] PRINGSHEIM, A.: Vorlesungen über Zahlenlehre, Bd. I/2. Leipzig 1916. — [5] SCOTT, W. T., and H. S. WALL: A convergence theorem for continued fractions. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 155–172 (1940). — [6] SINGH, V., and W. J. THRON: A family of best twin convergence regions for continued fractions. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 277–282 (1956). — [7] THRON, W. J.: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke Math. J. **10**, 677–685 (1943). — [8] THRON, W. J.: Introduction to the theory of functions of a complex variable. New York 1953. — [9] WALL, H. S.: Analytic Theory of Continued Fractions. New York 1948.

Dept. of Math., University of Colorado, Boulder, Col. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. Oktober 1957)

RIEGER, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 183–194 (1958)

Verallgemeinerung der Selbergschen Formel auf Idealklassen mod f in algebraischen Zahlkörpern

Von
G. J. RIEGER

Alle bisher bekanntgewordenen elementaren Beweise für den Primzahlsatz ruhen auf der sog. Selbergschen Formel

$$(1) \qquad \sum_{p \le x} \log^2 p + \sum_{pq \le x} \log p \cdot \log q = 2x \log x + O(x) \qquad (p, q \text{ prim})$$

oder einer damit sehr verwandten Aussage. Auch der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen läßt sich auf diesem Wege elementar beweisen, wenn man von der ganz analog beweisbaren Formel

$$(2) \qquad \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l \bmod k}} \log^2 p + \sum_{\substack{pq \le x \\ pq \equiv l \bmod k}} \log p \cdot \log q = \frac{2}{\varphi(k)} x \log x + O(x) \qquad \begin{pmatrix} p, q \text{ prim} \\ (k, l) = 1 \end{pmatrix}$$

ausgeht. Offenbar ist (1) als Spezialfall $k = 1$ in (2) enthalten. Wie SHAPIRO zeigte, läßt sich auch in beliebigen algebraischen Zahlkörpern (an Stelle des Körpers der rationalen Zahlen) eine Selbergsche Formel beweisen:

$$(3) \qquad \sum_{N\mathfrak{p} \le x} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{pq} \le x} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} = 2x \log x + O(x) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \text{ Primideale}),$$

wobei über alle Primideale $\mathfrak{p}$ bzw. alle Ideale der Gestalt $\mathfrak{pq}$ summiert wird, deren Norm $\le x$ ist. Aus (3) folgerte dann SHAPIRO den Primidealsatz in elementarer Weise[1]). Es ist offensichtlich, daß (3) die Formel (1) als Spezialfall enthält, nicht jedoch die Formel (2).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Selbergsche Formel für Idealklassen mod f algebraischer Zahlkörper zu beweisen (Satz 1)[2]). Das gelingt mit der gleichen Methode, mit der SHAPIRO (2) und (3) bewies[3]). Satz 1 wird dann die Aussagen (1), (2), (3) als Sonderfälle enthalten.

Bei den im folgenden immer wiederkehrenden Bezeichnungen bedeuten:

x eine positive reelle Zahl,
a, b, k, l, m, n natürliche Zahlen,
p, q Primzahlen,
K einen algebraischen Zahlkörper vom Grad n,
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}$ Ideale aus K,
$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Primideale,
$N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$,

[1]) Vgl. [5].
[2]) Für eine ähnliche Fragestellung vgl. [1].
[3]) Vgl. [4] und [5].

$\mathfrak{o}$ das Einheitsideal,

c_1, c_2 höchstens von K und f abhängige Konstanten.

Alle in $O(\,)$ auftretenden Konstanten hängen höchstens von K und f ab. „$O(\,)$" meint stets „$O(\,)$ für $x \to \infty$".

1. Bekanntes aus der Idealtheorie

Definition 1[3]). $\mathfrak{a}$ ist äquivalent zu $\mathfrak{b}$ mod f oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören zur selben Klasse $\mathfrak{H}$ mod f:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \bmod f,$$

wenn

$$(\mathfrak{a}, f) = \mathfrak{o}, \ (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}$$

ist und wenn es zwei ganze totalpositive Zahlen ξ und η im Körper K gibt, daß

$$\langle \xi \rangle \mathfrak{a} = \langle \eta \rangle \mathfrak{b}$$

und

$$\xi \equiv \eta \equiv 1 \bmod f$$

ist; dabei bedeutet $\langle \xi \rangle$ das von ξ erzeugte Hauptideal.

Die Anzahl der Klassen, in welche mod f die zu f teilerfremden Ideale zerfallen, bezeichnen wir mit $h(f)$.

Definition 2[4]). $\mathfrak{a}$ ist äquivalent zu $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören zur selben Klasse $\mathfrak{K}$ des Körpers K:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b},$$

wenn es zwei ganze Zahlen ξ und η in K gibt mit

$$\langle \xi \rangle \mathfrak{a} = \langle \eta \rangle \mathfrak{b}.$$

Die Anzahl der Klassen des Körpers bezeichnen wir mit h.

Zur Unterscheidung sprechen wir also im einen Falle von „Klassen mod f" und im anderen Falle von „Klassen des Körpers" oder von „Klassen" schlechthin. Offenbar liegen zwei Zahlen, die mod f zur selben Klasse gehören, in ein und derselben Klasse des Körpers. Darüber hinaus gilt, daß die zu f teilerfremden Ideale jeder Klasse des Körpers in gleich viele, also in je $\frac{h(f)}{h}$ Klassen mod f zerfallen[5]).

Satz [von LANDAU[6])]. *Für die Anzahl* $H(x; \mathfrak{H} \bmod f)$ *der Ideale* $\mathfrak{a}$ *einer Klasse* $\mathfrak{H}$ mod f *mit Norm* $\leq x$ *gilt:*

$$H(x; \mathfrak{H} \bmod f) = \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H} \bmod f}} 1 = \beta(f)\, x + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}}\right), \tag{4}$$

$$\beta(f) = \frac{h}{h(f)} \lambda \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right),$$

[3]) Vgl. [3], Definition VIII.
[4]) Vgl. [2], Definition 36.
[5]) Vgl. [3], Satz XCVII.
[6]) Vgl. [3], Satz XCVI.

wo λ das Residuum der zu irgendeiner Klasse $\mathfrak{K}$ gehörigen ζ-Funktion an der Stelle $s=1$ bedeutet.

[Bekanntlich ist diese Funktion in der ganzen Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s=1$, und das Residuum an dieser Stelle ist von der Klasse $\mathfrak{K}$ unabhängig[7].] Somit gilt für die Anzahl $H(x)$ der zu f teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}$ mit Norm $\leq x$:

$$H(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x \\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} 1 = \gamma x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right), \tag{5}$$

$$\gamma = h(f)\beta. \tag{6}$$

Satz [von WEBER[8]]. *Für die Anzahl $H(x,\mathfrak{K})$ der Ideale $\mathfrak{a}$ einer Klasse $\mathfrak{K}$ mit Norm $\leq x$ gilt:*

$$H(x,\mathfrak{K}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x \\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{K}}} 1 = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Somit gilt für die Anzahl $H'(x)$ aller Ideale $\mathfrak{a}$ des Körpers K mit Norm $\leq x$:

$$H'(x) = \sum_{\mathfrak{a}\leq x} 1 = h\lambda x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right);$$

dabei haben λ und h die oben angegebene Bedeutung.

Wir führen jetzt die verallgemeinerte Möbiussche Funktion und die verallgemeinerte von Mangoldtsche Funktion ein.

Definition 3. Es sei

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a}=\mathfrak{o}, \\ (-1)^m & \text{für „quadratfreie“ } \mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 4. Es sei

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \log N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}.$$

Für diese Funktionen gilt bekanntlich:

$$\sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a}=\mathfrak{o}, \\ 0 & \text{für } \mathfrak{a}\neq\mathfrak{o} \end{cases} \tag{7}$$

[7]) Vgl. [2], Satz 154.

[8]) WEBER hatte das schwächere Restglied $O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right)$. Die verschärfte Form geht auf LANDAU zurück (vgl. [2], Satz 210). Für unsere Zwecke ist ein beliebiges Restglied $O(x^{1-\varepsilon(K)})$ mit $\varepsilon(K)>0$ ausreichend.

und

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \\ \log N\mathfrak{p} & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8}$$

Hilfssatz A. *Es ist*

$$\sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \Lambda(\mathfrak{a}) \log N\mathfrak{a} + \sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \Lambda(\mathfrak{b})\, \Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Diese Identität läßt sich entweder direkt verifizieren oder bequemer aus der für die Dedekindsche Z-Funktion

$$Z(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

offensichtlich geltenden Identität

$$\frac{Z''(s)}{Z(s)} = \left(\frac{Z'(s)}{Z(s)}\right)' + \left(\frac{Z'(s)}{Z(s)}\right)^2$$

durch Koeffizientenvergleich gewinnen.

Während der Beweis von SHAPIRO für (3) wesentlich auf dem Satz von WEBER ruht, stützen wir uns entscheidend auf den Satz von LANDAU.

2. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Es sei $f(x)$ eine für alle reellen $x>0$ erklärte komplexwertige Funktion und*

$$g(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right); \tag{9}$$

dann ist

$$f(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, g\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right). \tag{10}$$

Beweis. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, g\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right) &= \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{N\mathfrak{b}\le \frac{x}{N\mathfrak{a}} \\ (\mathfrak{b},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}\right) \\ &= \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}\le x \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) \\ &= \sum_{\substack{N\mathfrak{c}\le x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{c}}\right) \sum_{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{c}} \mu(\mathfrak{a}) = f(x) \end{aligned}$$

wegen (7), womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}}=\gamma\log x+c_1+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Beweis. Schreiben wir (5) in der Gestalt

$$H(x)=\gamma x+r(x),\qquad r(x)=O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right),\tag{11}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}}&=\sum_{m\le x}\frac{H(m)-H(m-1)}{m}=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\sum_{m\le x}\frac{r(m)-r(m-1)}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\frac{r([x])}{[x]}+\sum_{m\le x-1}\frac{r(m)}{m(m+1)}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r(m)}{m(m+1)}+O\Big(\sum_{m\ge x}m^{-1-\frac{2}{n+1}}\Big)+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right)\\&=\gamma\log x+c_1+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right),\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}=\frac{\gamma}{2}\log^2 x+c_2+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right).$$

Beweis. Wegen (11) ist

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}&=\sum_{m\le x}\big(H(m)-H(m-1)\big)\frac{\log m}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\sum_{m\le x}\big(r(m)-r(m-1)\big)\frac{\log m}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\frac{r([x])\log[x]}{[x]}+\sum_{m\le x-1}r(m)\left(\frac{\log m}{m}-\frac{\log(m+1)}{m+1}\right)\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}r(m)\left(\frac{\log m}{m}-\frac{\log(m+1)}{m+1}\right)+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right)\\&=\frac{\gamma}{2}\log^2 x+c_2+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right),\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\beta(f)\,x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right).$$

Beweis. Wegen (4) ist

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\sum_{m\le x}\big(H(m,\mathfrak{H})-H(m-1,\mathfrak{H})\big)\log\frac{x}{m}$$

$$=H\big([x],\mathfrak{H}\big)\log\frac{x}{[x]}+\sum_{m\le x-1}H(m,\mathfrak{H})\Big(\log\frac{x}{m}-\log\frac{x}{m+1}\Big)$$

$$=\sum_{m\le x-1}H(m,\mathfrak{H})\log\Big(1+\frac{1}{m}\Big)+O(1)$$

$$=\beta\sum_{m\le x-1}m\Big(\frac{1}{m}+O(m^{-2})\Big)+O\Big(\sum_{m\ge x}m^{-\frac{2}{n+1}}\Big)$$

$$=\beta x+O(\log x)+\begin{cases}O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\Big) & \text{für } n>1\\ O(\log x) & \text{für } n=2\end{cases}$$

$$=\beta x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\Big),$$

womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Hilfssatz 5. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}=2\beta(f)\,x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big).$$

Beweis. Wegen (4) ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\le x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\sum_{m\le x}\big(H(m,\mathfrak{H})-H(m-1,\mathfrak{H})\big)\log^2\frac{x}{m}$$

$$=\sum_{m\le x}H(m,\mathfrak{H})\Big(\log^2\frac{x}{m}-\log^2\frac{x}{m+1}\Big)+H\big([x],\mathfrak{H}\big)\log^2\frac{x}{[x]+1}$$

$$=\sum_{m\le x}H(m,\mathfrak{H})\log\Big(1+\frac{1}{m}\Big)\big(2\log x-\log m(m+1)\big)+O(1)$$

$$=\sum_{m\le x}\Big(\beta m+O\Big(m^{1-\frac{2}{n+1}}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{m}+O(m^{-2})\Big)\times$$

$$\times\Big(2\log x-2\log m+O\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big)+O(1)$$

$$=2\log x\sum_{m\le x}\Big(\beta+O\Big(m^{-\frac{2}{n+1}}\Big)\Big)-\sum_{m\le x}\times$$

$$\times\Big(2\beta\log m+O\Big(m^{-\frac{2}{n+1}}\log m\Big)\Big)+O(\log^2 x)$$

$$=2\beta x\log x-2\beta\big(x\log x-x+O(\log x)\big)+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big)$$

$$=2\beta x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big),$$

womit Hilfssatz 5 bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H} \bmod f}} \log N\mathfrak{a} = \beta(f)\, x \log x - \beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}} \log x\right).$$

Beweis. Hilfssatz 4 besagt

$$\log x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} 1 - \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{a} = \beta x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}} \log x\right),$$

woraus zusammen mit (4) sofort Hilfssatz 6 folgt.

Hilfssatz 7. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H} \bmod f}} \log^2 N\mathfrak{a} = \beta(f)\, x \log^2 x - 2\beta(f)\, x \log x + 2\beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}} \log^2 x\right).$$

Beweis. Hilfssatz 5 besagt

$$\log^2 x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} 1 - 2\log x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{a} + \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log^2 N\mathfrak{a} = 2\beta x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}} \log^2 x\right),$$

woraus zusammen mit (4) und Hilfssatz 6 sofort Hilfssatz 7 folgt.

Hilfssatz 8. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=1$; dann wird wegen (9)

$$g(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} 1.$$

Aus (10) erhalten wir also wegen (5)

$$1 = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a}) \left(\gamma \frac{x}{N\mathfrak{a}} + O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right). \tag{12}$$

Da aber $|\mu(\mathfrak{a})| \leq 1$ und

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} = x^{1-\frac{2}{n+1}} \sum_{m\leq x} \left(H(m) - H(m-1)\right)\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} \\ \qquad = x^{1-\frac{2}{n+1}} \left(\frac{H([x])}{[x]^{1-\frac{2}{n+1}}} + \right. \\ \qquad\quad \left. + \displaystyle\sum_{m\leq x-1} H(m) \left(\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right) \\ \qquad = O\left(x + \displaystyle\sum_{m\leq x-1} m \cdot m^{\frac{2}{n+1}-2}\right) = O(x) \end{cases} \tag{13}$$

wegen (5), folgt aus (12) unmittelbar Hilfssatz 8.

Hilfssatz 9. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \log\frac{x}{N\mathfrak{a}} = O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=x$; dann wird

$$g(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \frac{x}{N\mathfrak{a}} = \gamma x\log x + c_1 x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right)$$

wegen (9) und Hilfssatz 2. Aus (10) erhalten wir also

$$x = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\left(\gamma\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}} + c_1\frac{x}{N\mathfrak{a}} + O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right),$$

woraus wegen (13) und Hilfssatz 8 unmittelbar Hilfssatz 9 folgt.

Hilfssatz 10. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} \log\frac{x}{N\mathfrak{a}} = O(x).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{o},f)=\mathfrak{a}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} \log\frac{x}{N\mathfrak{a}} &= \sum_{m\le x}\left(H(m)-H(m-1)\right)\left(\frac{x}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{m}\ \text{[wegen (5)]}\\
&= x^{1-\frac{2}{n+1}}\left(\frac{H([x])}{[x]^{1-\frac{2}{n+1}}}\log\frac{x}{[x]} + \sum_{m\le x-1} H(m)\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(m^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{m} - (m+1)^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{m+1}\right)\right)\\
&= O(x) + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\sum_{m\le x-1} m\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(m^{\frac{2}{n+1}-2}\log\frac{x}{m} + m^{\frac{2}{n+1}-2}\right)\right)\ \text{[wegen (5)]}\\
&= O(x) + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_1^{x-1}\left(t^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{t} + t^{\frac{2}{n+1}-1}\right)dt + O(\log x)\right)\right)\\
&= O(x),
\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 10 bewiesen ist.

Hilfssatz 11. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\frac{2}{\gamma}\log x+O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=x\log x$; dann wird

$$g(x)=x\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log x-\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}$$

$$=\frac{\gamma}{2}x\log^2 x+c_1 x\log x-c_2 x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right)$$

wegen (9), Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3. Aus (10) erhalten wir also

$$x\log x=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\mu(\mathfrak{a})\left(\frac{\gamma}{2}\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}+c_1\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}-c_2\frac{x}{N\mathfrak{a}}+\right.$$

$$\left.+O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)\right),$$

woraus wegen Hilfssatz 9, Hilfssatz 8 und Hilfssatz 10 die Behauptung folgt.

3. Beweis von Satz 1

Satz 1. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq x\\\mathfrak{p}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log^2 N\mathfrak{p}+\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\leq x\\\mathfrak{p}\mathfrak{q}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q}=\frac{2}{h(f)}x\log x+O(x).$$

Beweis. Wir summieren die Identität von Hilfssatz A über eine Klasse $\mathfrak{H}$ mod f:

$$(14)\qquad\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{b})\log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\Lambda(\mathfrak{a})\log N\mathfrak{a}+\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\Lambda(\mathfrak{b})\Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Für die Summe auf der linken Seite ergibt sich

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{b})\log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\sum_{\substack{N\mathfrak{b}\mathfrak{d}\leq x\\\mathfrak{b}\mathfrak{d}\in\mathfrak{H}}}\mu(\mathfrak{b})\log^2\mathfrak{N}\mathfrak{d}$$

$$=\sum_{\substack{N\mathfrak{b}\leq x\\(\mathfrak{b},f)=\mathfrak{o}}}\mu(\mathfrak{b})\cdot\sum_{\substack{N\mathfrak{d}\leq x/N\mathfrak{b}\\\mathfrak{d}\in\mathfrak{H}'}}\log^2 N\mathfrak{d}.$$

Dabei haben wir die wohlbekannte Tatsache benutzt[9]): Die Menge aller $\mathfrak{d}$, für die bei gegebenem $\mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{b},f)=\mathfrak{o}$ die Ideale $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ in einer bestimmten Klasse $\mathfrak{H}$ mod f liegen, ist selbst eine Klasse $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}'(b)$ mod f. Unter Benutzung von

[9]) Vgl. [3], Satz XXX.

Hilfssatz 7 können wir in der letzten Formel so fortfahren:

$$= \sum_{\substack{N\mathfrak{b} \leq x \\ (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{b}) \left(\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} - 2\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} \log \frac{x}{N\mathfrak{b}} + 2\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} + O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{b}} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} \right) \right)$$

$$= \frac{2\beta}{\gamma} x \log x + O(x)$$

wegen Hilfssatz 11, Hilfssatz 9, Hilfssatz 8 und wegen

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{b} \leq x \\ (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{b}} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} = \sum_{m \leq x} \left(H(m) - H(m-1) \right) \left(\frac{x}{m} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{m}$$

$$= x^{1 - \frac{2}{n+1}} \left(\frac{H([x])}{[x]^{1 - \frac{2}{n+1}}} \log^2 \frac{x}{[x]} \right.$$

$$\left. + \sum_{m \leq x-1} H(m) \left(m^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{m} - (m+1)^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{m+1} \right) \right)$$

$$= O(x) + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}} \sum_{m \leq x-1} m \left(m^{\frac{2}{n+1} - 2} \log^2 \frac{x}{m} + m^{\frac{2}{n+1} - 2} \log \frac{x}{m} \right) \right) \text{ [wegen (5)]}$$

$$= O(x) + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}} \left(\int_1^{x-1} \left(t^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{t} + t^{\frac{2}{n+1} - 1} \log \frac{x}{t} \right) dt + O(\log^2 x) \right) \right)$$

$$= O(x).$$

Wegen (6) haben wir damit gefunden:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \cdot \log^2 N \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{2}{h(f)} x \log x + O(x).$$

Da außerdem wegen (8)

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \Lambda(\mathfrak{a}) \cdot \log N\mathfrak{a} = \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} a \cdot \log^2 N\mathfrak{p},$$

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \leq x \\ \mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \in \mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} (a-1) \log^2 N\mathfrak{p} = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \Lambda(\mathfrak{b}) \Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \right),$$

geht (14) über in

$$(15) \qquad \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} (2a-1) \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \leq x \\ \mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \in \mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h(f)} x \log x + O(x).$$

Da nun zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ eine rationale Primzahl p gehört mit $N\mathfrak{p} = p^{e_\mathfrak{p}}$, wo $e_\mathfrak{p}$ eine natürliche Zahl $\leq n$ ist[10]), und da zu jedem p höchstens n Prim-

[10]) Vgl. [2], Satz 107.

ideale $\mathfrak{p}$ gehören, deren Normen Potenzen dieser Zahl p sind, folgt:

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\le x\\ a>1\\ \mathfrak{p}^a\in\mathfrak{H}}}(2a-1)\log^2 N\mathfrak{p} &\le \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\le x\\ a>1}}(2a-1)\log^2 N\mathfrak{p}\\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\le x\\ a>1}}\log^2 N\mathfrak{p}\\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\,n\sum_{\substack{p^a\le x\\ a>1}}\log^2 p^n\\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\,n^3\log x\sum_{\substack{p^a\le x\\ a>1}}\log p\\
&\le 2\cdot\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2 n^3\log x\sum_{p^3\le x}\log p\\
&= O\left(\sqrt{x}\log^3 x\right)\\
&= O(x)
\end{aligned}\right.
$$

$\left[\text{wegen } \sum_{p\le x}\log p = O(x)\right]$ und

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b\le x\\ ab>1\\ \mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b\in\mathfrak{H}}}\log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} &\le \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b\le x\\ ab>1}}\log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q}\\
&\le n^2\sum_{\substack{p^aq^b\le x\\ ab>1}}\log p^n\cdot\log q^n\\
&= n^4\sum_{\substack{p^aq^b\le x\\ ab>1}}\log p\cdot\log q\\
&\le 2n^4\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2\sum_{pq^3\le x}\log p\log q\\
&\le 2n^4\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2\log x\sum_{q^3\le x}\log q\\
&= O\left(\sqrt{x}\log^3 x\right)\\
&= O(x)
\end{aligned}\right.
$$

$\left[\text{wegen } \sum_{p\le x}\log p = O(x)\right]$. Schreiben wir jetzt in (15) die Summen für $a=1$ und $a>1$ bzw. für $ab=1$ und $ab>1$ getrennt auf und beachten wir (16) und (17), so folgt

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\le x\\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{H}}}\log^2 N\mathfrak{p}+\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\le x\\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}\in\mathfrak{H}}}\log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q}=\frac{2}{h(f)}\,x\log x+O(x),$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar eine Selbergsche Formel für Idealklassen $\mathfrak{R}$ (also im Sinne von Definition 2):

Satz 2. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq x \\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{R}}} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{N\mathfrak{pq}\leq x \\ \mathfrak{pq}\in\mathfrak{R}}} \log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h}\, x\log x + O(x).$$

Selbstverständlich läßt sich Satz 2 auch direkt und zwar auf dem gleichen Wege wie Satz 1 beweisen.

4. Bemerkungen

Offenbar ist (3) als Spezialfall $f=\mathfrak{o}$ und somit (1) als Spezialfall $f=\mathfrak{o}$, $n=1$ in Satz 1 enthalten.

Da die Klasseneinteilung vermöge des Äquivalenzbegriffes von Definition 1 im Falle $n=1$ (also im Falle des Körpers der rationalen Zahlen) genau die Einteilung aller zu $f=k$ teilerfremden natürlichen Zahlen in prime Restklassen ist, enthält Satz 1 (und auch Satz 2) für $f=k$ die Formel (2) und damit auch wieder Formel (1).

Der Beweis von Satz 1 (und Satz 2) ist noch nicht in allen Teilen elementar, da der Beweis von (4) und (5) bis heute nur mit Hilfe komplexer Funktionentheorie (Residuensatz) bewiesen werden konnte. Die von WEBER zum Beweis von

$$H(x) = \gamma\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right)\ ^{11})$$

benutzte Methode ist frei von komplexer Funktionentheorie; sie läßt sich unmittelbar auf den Fall von $H(x, \mathfrak{H} \bmod f)$ übertragen und liefert

$$H(x, \mathfrak{H} \bmod f) = \beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right),$$

womit Satz 1 (und Satz 2) elementar, d.h. ohne Verwendung des Residuensatzes bewiesen ist.

Auf die Frage nach einem in f gleichmäßig gültigen Fehlerglied in (4) und Anwendung auf Satz 1 hoffen wir bei späterer Gelegenheit zurückzukommen.

Literatur

[1] FORMAN, W., and H. N. SHAPIRO: Abstract Prime Number Theorems. Comm. Pure Appl. Math. **7**, 587—619 (1954). — [2] LANDAU, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig-Berlin 1918. — [3] LANDAU, E.: Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z. **2**, 52—154 (1918). — [4] SHAPIRO, H. N.: On Primes in Arithmetic Progressions I. Ann. of Math. **52**, 217—230 (1950). — [5] SHAPIRO, H. N.: An Elementary Proof of the Prime Ideal Theorem. Comm. Pure Appl. Math. **2**, 309—323 (1949).

Gießen (Lahn), Mathem. Institut der Justus Liebig-Hochschule

(Eingegangen am 15. Februar 1957)

11) Vgl. 8).

SHUKLA, H. S.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 195–201 (1958)

On certain Transformations of nearly-poised Basic bilateral Hypergeometric Series of the Type ${}_M\Psi_M$

By

HARI SHANKER SHUKLA

1. *Introduction.* SLATER [4] in 1952 gave relations involving general and well-poised ${}_M\Psi_M$ series, but relations connecting nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$ were not considered by her. In this paper I consider SLATER'S transformation to obtain certain relations involving nearly-poised basic bilateral hypergeometric series of the type ${}_M\Psi_M$. The main interest in considering these relations is in giving particular values to M to obtain special transformations of nearly-poised series with the help of known transformations.

The following notation is used throughout the paper:

$$(a;n)=(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}); \qquad (a;0)=1$$

$$(a;-n)=(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}/a^n(q/a;n); \qquad |q|<1$$

$$(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1); \qquad (a)_0=1; \qquad (a)_{-n}=(-1)^n/(1-a)_n$$

$${}_r\Psi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1;n)(a_2;n)\dots(a_r;n)}{(b_1;n)(b_2;n)\dots(b_r;n)}z^n;$$

$${}_rH_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\dots(a_r)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\dots(b_r)_n}z^n;$$

$$\Pi\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\right]=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a_1q^n)(1-a_2q^n)\dots(1-a_rq^n)}{(1-b_1q^n)(1-b_2q^n)\dots(1-b_rq^n)};$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_r)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\dots\Gamma(b_r)};$$

and idem $(a;b)$ means that the preceding expression is repeated with a and b interchanged.

2. SLATER [4] gave the following relation which expresses a general bilateral ${}_M\Psi_M(x)$ series in terms of M other series of the same type:

$$\begin{aligned}&\Pi\left[\begin{matrix}xA,q/xA,b_1,b_2,\dots,b_M,q/c_1,q/c_2,\dots,q/c_M;\\ a_2,a_2,\dots,a_M,q/a_1,q/a_2,\dots,q/a_M\end{matrix}\right]{}_M\Psi_M\left[\begin{matrix}c_1,c_2,\dots,c_M;\\ b_1,b_2,\dots,b_M\end{matrix}x\right]\\ &=\frac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix}a_1xA/q,q^2/Axa_1,a_1/c_1,a_1/c_2,\dots,a_1/c_M,qb_1/a_1,qb_2/a_1,\dots,qb_M/a_1;\\ a_1,q/a_1,a_1/a_2,a_1/a_3,\dots,a_1/a_M,qa_2/a_1,qa_3/a_1,qa_4/a_1,\dots,qa_M/a_1\end{matrix}\right]\times\\ &\quad\times{}_M\Psi_M\left[\begin{matrix}qc_1/a_1,qc_2/a_1,\dots,qc_M/a_1;\\ qb_1/a_1,qb_2/a_1,\dots,qb_M/a_1\end{matrix}x\right]+\text{idem }(a_1;a_2,\dots,a_M),\end{aligned} \tag{2.1}$$

where

$$A=\frac{c_1c_2\dots c_M}{a_1a_2\dots a_M}, \qquad |x|<1, \qquad \left|\frac{b_1b_2\dots b_M}{c_1c_2\dots c_Mx}\right|<1.$$

If we first put $x=\frac{a_1 a_2 \dots a_M}{q c_1 c_2 \dots c_M}$ in (2.1) in order to make the series on the left vanish and then substitute $a_1=q$, $b_2=c_1 b_1/c_2$, $b_3=c_1 b_1/c_3, \dots, b_{M-1}=c_1 b_1/c_{M-1}$, we get the following relation between M nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$:

$$
\begin{cases}
\Pi\begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \dots, q/c_M, b_1, c_1 b_1/c_2, c_1 b_1/c_3, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, b_M; \\ q/a_2, q/a_3, \dots, q/a_M, a_2, a_3, \dots, a_M \end{bmatrix} \times \\
\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_{M-1}, c_M; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, b_M \end{bmatrix} \\
= \Pi\begin{bmatrix} a_2/c_1, a_2/c_2, \dots, a_2/c_M, q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q b_M/a_2; \\ a_2, q/a_2, a_2/a_3, \dots, a_2/a_M, q a_3/a_2, \dots, q a_M/a_2 \end{bmatrix} \times \\
\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} q c_1/a_2, q c_2/a_2, \dots, q c_{M-1}/a_2, q c_M/a_2; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q b_M/a_2 \end{bmatrix} + \\
\quad + \text{idem } (a_2; a_3, a_4, \dots, a_M), \\
\text{where} \\
\quad \left|\frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M}\right| < 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b_1^{M-1} \cdot c_1^{M-2} \cdot b_M}{a_2 a_3 \dots a_M c_2 c_3 \dots c_{M-1}}\right| < 1.
\end{cases} \tag{2.2}
$$

Particular cases:

(i) If we put $b_1=q$ in (2.2), we get a relation between a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and $(M-1)$ nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

(ii) Again if we put $b_M=a_M$ in (2.2), we get the following relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind:

$$
\begin{cases}
\Pi\begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \dots, q/c_M, b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}; \\ q/a_2, q/a_3, \dots, q/a_M, a_2, a_3, \dots, a_{M-1} \end{bmatrix} \times \\
\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_{M-1}, c_M; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, a_M \end{bmatrix} \\
= \Pi\begin{bmatrix} a_2/c_1, a_2/c_2, \dots, a_2/c_M, q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}; \\ a_2, q/a_2, a_2/a_3, \dots, a_2/a_M, q a_3/a_2, \dots, q a_{M-1}/a_2 \end{bmatrix} \times \\
\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} q c_1/a_2, q c_2/a_2, \dots, q c_{M-1}/a_2, q c_M/a_2; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q a_M/a_2 \end{bmatrix} + \\
\quad + \text{idem } (a_2; a_3, a_4, \dots, a_{M-1}) +
\end{cases} \tag{2.3}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&+\Pi\begin{bmatrix} a_M/c_1, \ldots, a_M/c_M, qb_1/a_M, qc_1b_1/a_Mc_2, \ldots, qc_1b_1/a_Mc_{M-1}, q; \\ a_M, q/a_M, a_M/a_2, \ldots, a_M/a_{M-1}, qa_2/a_M, \ldots, qa_{M-1}/a_M \end{bmatrix} \times \\
&\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} qc_M/a_M, qc_1/a_M, qc_2/a_M, \ldots, qc_{M-1}/a_M; \dfrac{a_2a_3\ldots a_M}{c_1c_2\ldots c_M} \\ qb_1/a_M, qc_1b_1/a_Mc_2, \ldots, qc_1b_1/a_Mc_{M-1} \end{bmatrix}, \\
&\text{where } \left|\frac{a_2a_3\ldots a_M}{c_1c_2\ldots c_M}\right| < 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b_1^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{a_2a_3\ldots a_{M-1}c_2c_3\ldots c_{M-1}}\right| < 1.
\end{aligned}
\right.
$$

(iii) Now if we put $c_M = 1$, after reversing the ${}_M\Psi_M$ series on the left of (2.3), we get a relation between two ${}_M\Phi_{M-1}$ nearly poised series of the first kind and $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series.

(iv) Again if we put $b_1 = q$, $c_2 = qc_1/a_2$, $c_3 = qc_1/a_3$, $\ldots$, $c_{M-1} = qc_1/a_{M-1}$ in (2.2), we get a relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

(v) If we put $a_2 = c_1b_1/c_2$, $a_3 = c_1b_1/c_3$, $\ldots$, $a_{M-1} = c_1b_1/c_{M-1}$ and $a_M = b_M$ in (2.2), we get a relation between a nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series, $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind.

If should be noted that if we put $b_M = a_M$ in the particular case (iv) we get a relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind; also, if we put $a_2 = c_1b_1/c_2$, $a_3 = c_1b_1/c_3$, $\ldots$, $a_{M-1} = c_1b_1/c_{M-1}$ in the particular case (iii), we shall get a relation involving $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and two nearly poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind.

(vi) Now if we first reverse the ${}_M\Psi_M$ series in the particular case (iv) and then put $a_M = qc_1$ in it, we get the following relation between M nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Pi\begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \ldots, q/c_M, b_M, q; \\ c_2/c_1, \ldots, c_{M-1}/c_1, 1/c_1, qc_1 \end{bmatrix} {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_1, c_2, \ldots, c_{M-1}, c_M; \dfrac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2} \\ qc_1/c_2, \ldots, qc_1/c_{M-1}, b_M \end{bmatrix} \\
&= \Pi\begin{bmatrix} q/c_2, qc_1/c_2^2, qc_1/c_2c_3, \ldots, qc_1/c_2c_M, qc_2/c_1, b_Mc_2/c_1, q; \\ qc_1/c_2, c_3/c_2, \ldots, c_{M-1}/c_2, 1/c_2, c_2/c_1, qc_2 \end{bmatrix} \times \\
&\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_2^2/c_1, c_2, c_2c_3/c_1, \ldots, c_2c_{M-1}/c_1, c_2c_M/c_1; \dfrac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2} \\ qc_2/c_1, qc_2/c_3, \ldots, qc_2/c_{M-1}, c_2b_M/c_1 \end{bmatrix} + \\
&+ \text{idem } (c_2; c_3, c_4, \ldots, c_{M-1}) + \\
&+ \Pi\begin{bmatrix} q, qc_1/c_2, qc_1/c_3, \ldots, qc_1/c_M, q/c_1, b_M/c_1; \\ qc_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, 1/c_1 \end{bmatrix} \times \\
&\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, qc_1/b_M; \dfrac{b_M}{c_1} \\ qc_1/c_2, qc_1/c_3, \ldots, qc_1/c_{M-1}, qc_1/c_M \end{bmatrix} \\
&\text{where } \left|\frac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2}\right| < 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b_M}{c_1}\right| < 1.
\end{aligned}
\right. \tag{2.4}
$$

(vii) Again if we put $a_2=c_1b_1/c_2$, and then put $c_2^2=qc_1b_1$ in (2.2), we get the following relation between $(M-1)$ nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

$$
(2.5)\quad \begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix} q^2b_1/c_2^2, q/c_2, \ldots, q/c_M, b_1, c_2^2/qc_3, \ldots, c_2^2/qc_{M-1}, b_M; \\ q^2/c_2, q/a_3, \ldots, q/a_M, a_3, a_4, \ldots, a_M \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix} c_2^2/qb_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, c_M; \dfrac{b_1a_3a_4\ldots a_M}{c_2^2c_3c_4\ldots c_M} \\ b_1, c_2/q, c_2^2/qc_3, \ldots, c_2^2/qc_{M-1}, b_M \end{matrix}\right] \\ = \Pi\left[\begin{matrix} qa_3b_1/c_2^2, a_3/c_2, \ldots, a_3/c_M, qb_1/a_3, c_2^2/a_3c_3, \ldots, c_2^2/a_3c_{M-1}, qb_M/a_3; \\ a_3, q/a_3, qa_3/c_2, a_3/a_4, \ldots, a_3/a_M, qa_4/a_3, \ldots, qa_M/a_3 \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix} c_2^2/b_1a_3, qc_2/a_3, qc_3/a_3, \ldots, qc_{M-1}/a_3, qc_M/a_3; \dfrac{b_1a_3a_4\ldots a_M}{c_2^2c_3c_4\ldots c_M} \\ qb_1/a_3, c_2/a_3, c_2^2/a_3c_3, \ldots, c_2^2/a_3c_{M-1}, qb_M/a_3 \end{matrix}\right] + \\ \quad + \text{idem}\,(a_3; a_4, a_5, \ldots, a_M), \\ \text{where} \\ \quad \left|\dfrac{b_1a_3a_4\ldots a_M}{c_2^2c_3c_4\ldots c_M}\right| < 1 \quad \text{and} \quad \left|\dfrac{b_1\cdot c_2^{2M-6}\cdot b_M}{q^{M-3}a_3a_4\ldots a_Mc_3c_4\ldots c_{M-1}}\right| < 1. \end{cases}
$$

If we put $c_M=1$, after reversing the first ${}_M\Psi_M$ series in (2.5), we shall get a relation between a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind and $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series and also if we put $a_M=b_M$ in it, we get a relation between two nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind and $(M-3)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series.

(viii) If we let $q\to 1$ in (2.2) in the usual manner, we get a relation between M nearly-poised ordinary bilateral hypergeometric series of the type ${}_MH_M$ and corresponding particular cases for ordinary bilateral hypergeometric series can be either deduced directly from it or as limiting cases of the basic results.

3. So far we have found relations involving nearly-poised series only and if we make substitutions similar to those which we have made to derive (2.2) in (2.1), we shall again get a relation involving $(M+1)$ nearly-poised series, but in this section I find certain relations involving well-poised and nearly-poised series.

If we put $M=5$, $c_1=aq^{-N}$, $c_2=b$, $c_3=c$, $c_4=dq^N$, $c_5=q^{-N}$, $b_1=q^{1+N}$, $b_2=aq/b$, $b_3=aq/c$, $b_4=aq^{1-N}/d$, $b_5=a^2q^{-N}/k^2$ and $x=q$, where $k=a^2q/bcd$ and N is a positive integer, in (2.1) we get the following relation between a nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series terminating at both ends and five nearly-poised non-terminating ${}_5\Psi_5$ series:

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix} Aq, 1/A, q^{1+N}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2, q^{N+1}/a, q/b, q/c, q^{1-N}/d, q^{1+N}; \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5 \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} aq^{-N}, b, c, dq^N, q^{-N}; q \\ q^{N+1}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2 \end{matrix}\right] \\ = \dfrac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix} a_1A, q/Aa_1, a_1q^N/a, a_1/b, a_1/c, a_1q^{-N}/d, a_1q^N, q^{2+N}/a_1, q^2a/ba_1, q^2a/ca_1, \\ q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1; \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, qa_2/a_1, qa_3/a_1, qa_4/a_1, qa_5/a_1 \end{matrix}\right] \times \end{cases}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; \\ q^{2+N}/a_1, aq^2/a_1b, aq^2/a_1c, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1 \end{matrix}\ q\right] + \\
&+ \text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5)\,, \\
&\text{where} \qquad k = a^2q/bcd \quad \text{and} \quad A = abcdq^{-N}/a_1a_2a_3a_4a_5.
\end{aligned}\right.$$

Last year I [5] gave the following transformation which expresses a nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series in terms of a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ series[1]):

$$(3.2)\quad \left\{\begin{aligned}
&{}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} aq^{-N}, b, c, dq^N, q^{-N}; \\ q^{1+N}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2 \end{matrix}\ q\right] \\
&= \frac{(kq/a;N)\,(k^2q/a;N)\,(kd/a;N)\,(q/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)}{(kq;N)\,(k^2q/a^2;N)\,(d;N)\,(q/k;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)} \times \\
&\times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, kq/\sqrt{a}, -kq/\sqrt{a}, k\sqrt{q/a}, \end{matrix}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\begin{matrix} k^2q^{1+N}/a, q^{-N}; \\ -k\sqrt{q/a}, aq^{-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\ q\right] \\
&\text{where} \qquad k = a^2q/bcd.
\end{aligned}\right.$$

Now by using (3.2) in (3.1), we get the following relation between a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ and five nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series:

$$(3.3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Pi\left[\begin{matrix} Aq, 1/A, q^{1+N}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2, q^{N+1}/a, q/b, q/c, \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5 \end{matrix}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\begin{matrix} q^{1-N}/d, q^{1+N}; \end{matrix}\right] \times \\
&\times \frac{(kq/a;N)\,(k^2q/a;N)\,(kd/a;N)\,(q/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)}{(kq;N)\,(k^2q/a^2;N)\,(d;N)\,(q/k;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)} \times \\
&\times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, kq/\sqrt{a}, -kq/\sqrt{a}, k\sqrt{q/a}, \end{matrix}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\begin{matrix} k^2q^{N+1}/a, q^{-N}; \\ -k\sqrt{q/a}, aq^{-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\ q\right] \\
&= \frac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix} a_1A, q/Aa_1, a_1q^N/a, a_1/b, a_1/c, a_1q^{-N}/d, a_1q^N, q^{2+N}/a_1, aq^2/ba_1, \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, qa_2/a_1, qa_3/a_1, qa_4/a_1, qa_5/a_1 \end{matrix}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\begin{matrix} aq^2/ca_1, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1; \end{matrix}\right] \times \\
&\times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; \\ q^{2+N}/a_1, aq^2/a_1b, aq^2/a_1c, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1 \end{matrix}\ q\right] + \\
&+ \text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5) \\
&\text{where} \qquad k = a^2q/bcd \quad \text{and} \quad A = abcdq^{-N}/a_1a_2a_3a_4a_5.
\end{aligned}\right.$$

If we put $a_1 = q$ in (3.3), the last four ${}_5\Psi_5$ series on the right of (3.3) vanish and we again get (3.2). Hence (3.3) is a generalization of (3.2).

Also if we put $d = aq^{-N}$ in (3.3), we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ and five nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series and if we put $a_1 = q$ in it, we get the

[1]) Transformations (3.2) and (3.4) given in [5] have been further generalized by me.

transformation of a nearly-poised Saalschützian ${}_5\Phi_4$ series into a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ series given by BAILEY [2], when $dq^N = a$.

Again if we put $M=7$, $c_1 = aq^{-N}$, $c_2 = q\sqrt{a}$, $c_3 = -q\sqrt{a}$, $c_4 = b$, $c_5 = c$, $c_6 = dq^N$, $c_7 = q^{-N}$, $b_1 = q^{1+N}$, $b_2 = \sqrt{a}$, $b_3 = -\sqrt{a}$, $b_4 = aq/b$, $b_5 = aq/c$, $b_6 = aq^{1-N}/d$, $b_7 = a^2q^{2-N}/k^2$ and $x = q$ in (2.1) where $k = a^2q/bcd$, we get a relation between a nearly-poised ${}_7\Psi_7$ terminating at both ends and seven non-terminating nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series. Now we use in it the following transformation, which expresses a nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series in terms of a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ series, deduced by me [5]

$$
\begin{cases}
{}_7\Psi_7\left[\begin{matrix} aq^{-N}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, dq^N, q^{-N}; \\ q^{1+N}, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{2-N}/k^2 \end{matrix}; q\right] \\
= \dfrac{\left(1-k^2q^{2N-1}/a\right)(k/aq;N)(k^2/a;N-1)(kd/a;N)(aq/kb;N)(aq/kc;N)(q/a;N)}{(kq;N)(k^2/a^2q;N)(d;N)(q/b;N)(q/c;N)(q/k;N)} \times \\
\times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, k\sqrt{q/a}, -k\sqrt{q/a}, k/\sqrt{a}, \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} k^2q^{N-1}/a, q^{-N}; \\ -k/\sqrt{a}, aq^{2-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}; q\right] \\
\text{where} \qquad k = a^2q/bcd.
\end{cases} \tag{3.4}
$$

Then we get the following relation between a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ and seven nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series:

$$
\begin{cases}
\Pi\left[\begin{matrix} qA, 1/A, q^{1+N}, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{2-N}/k^2, q^{1+N}/a, \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5, q/a_6, q/a_7 \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} 1/\sqrt{a}, -1/\sqrt{a}, q/b, q/c, q^{1-N}/d, q^{1+N}; \end{matrix}\right] \times \\
\times \dfrac{\left(1-k^2q^{2N-1}/a\right)(k/aq;N)(k^2/a;N-1)(kd/a;N)(aq/kb;N)(aq/kc;N)(q/a;N)}{(kq;N)(k^2/a^2q;N)(d;N)(q/b;N)(q/c;N)(q/k;N)} \times \\
\times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, k\sqrt{q/a}, -k\sqrt{q/a}, k/\sqrt{a}, \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} k^2q^{N-1}/a, q^{-N}; \\ -k/\sqrt{a}, aq^{2-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}; q\right] \\
= \dfrac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix} a_1A, q/Aa_1, a_1q^N/a, a_1/q\sqrt{a}, -a_1/q\sqrt{a}, a_1/b, a_1/c, a_1q^{-N}/d, a_1q^N, \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, a_1/a_6, a_1/a_7, qa_2/a_1, qa_3/a_1, \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} q^{2+N}/a_1, q\sqrt{a}/a_1, -q\sqrt{a}/a_1, aq^2/ba_1, aq^2/ca_1, q^{2-N}a/da_1, \\ qa_4/a_1, qa_5/a_1, qa_6/a_1, qa_7/a_1 \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} q^3{}^{-N}a^2/k^2a_1; \end{matrix}\right] \times \\
\times {}_7\Psi_7\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, q^2\sqrt{a}/a_1, -q^2\sqrt{a}/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; \\ q^{2+N}/a_1, q\sqrt{a}/a_1, -q\sqrt{a}/a_1, aq^2/ba_1, aq^2/ca_1, aq^{2-N}/da_1, \end{matrix}\right. \\
\qquad \left.\begin{matrix} q \\ a^2q^{3-N}/k^2a_1 \end{matrix}\right] + \\
+ \text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \\
\text{where} \qquad k = a^2q/bcd \quad \text{and} \quad A = -a^2bcdq^{2-N}/a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7.
\end{cases} \tag{3.5}
$$

If we put $a_1 = q$ in (3.5), the last six ${}_7\Psi_7$ series on the right of it vanish and again we get (3.4). Hence (3.5) generalizes (3.4).

Also if we put $dq^N = a$ in (3.5), we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ and seven nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series and if we put $a_1 = q$, we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ series, and a nearly-poised ${}_7\Phi_6$ series given by BAILEY [3], when $dq^N = a$.

4. *The sum of a nearly-poised* ${}_3\Psi_3$. If we put $M = 3$ and $b_1 = q$ in (2.5), we get the following relation between a nearly-poised ${}_3\Psi_3$ and a nearly-poised ${}_3\Phi_2$ series of the second kind:

$$(4.1)\quad \left\{ {}_3\Psi_3\left[\begin{matrix} c_2^2/qa_3, qc_2/a_3, qc_3/a_3; & \frac{qa_3}{c_2^2c_3} \\ q^2/a_3, c_2/a_3, qb_3/a_3 & \end{matrix}\right] \right.$$
$$\left. = \Pi\left[\begin{matrix} q^3/c_2^2, q/c_2, q/c_3, q, b_3, qa_3/c_2; \\ q^2/c_2, q^2a_3/c_2^2, qb_3/a_3, a_3/c_2, a_3/c_3, q^2/a_3 \end{matrix}\right] {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} c_2^2/q^2, c_2, c_3; & \frac{qa_3}{c_2^2c_3} \\ c_2/q, b_3 & \end{matrix}\right] \right\}.$$

If we put $c_3 = 1$ in (4.1), we get,

$$(4.2)\quad \left\{ {}_3\Psi_3\left[\begin{matrix} c_2^2/qa_3, qc_2/a_3, q/a_3; & \frac{qa_3}{c_2^2} \\ q^2/a_3, c_2/a_3, qb_3/a_3 & \end{matrix}\right] = \Pi\left[\begin{matrix} q^3/c_2^2, q/c_2, q, q, b_3, qa_3/c_2; \\ q^2/c_2, q^2a_3/c_2^2, qb_3/a_3, a_3/c_2, a_3, q^2/a_3 \end{matrix}\right] \right\}.$$

If we put $a_3 = b_3$ in (4.2), we get the sum of a nearly-poised ${}_3\Phi_2$ series which is the basic analogue of a particular case of (2) of § 6.4 of the Tract [1].

It should be noted that if we let $q \to 1$ in (2.5) after putting $M = 3$, in the usual manner and then put $a_3 = b_3$, the ${}_3F_2$ series in it becomes summable and we get the sum of nearly-poised ${}_3H_3$ series.

5. *Conclusion.* So far relations between particular basic bilateral nearly-poised and well-poised series terminating at both ends only are known to us. We do not know relations either between basic non-terminating nearly-poised and well-poised series excepting one due to SEARS or nearly-poised and Saalschützian series, though a few relations between terminating nearly-poised and well-poised basic series have been deduced by BAILEY. But in the case of ordinary hypergeometric series several relatins of non-terominating nearly-poised series are known to us. So by giving particular values to M in the particular case (viii) of Section 2 and making use of known transformations of nearly-poised series, we can find out several interesting transformations of bilateral nearly-poised series; these special transformation form the subject matter of another paper of mine which I soon intend to publish.

I am grateful to Dr. R. P. AGARWAL for his kind guidance during the preparation of this paper.

References

[1] BAILEY, W. N.: On generalized hypergeometric series. Cambridge Tract. (1935). — [2] BAILEY, W. N.: Some identities in combinatory analysis. Proc. London Math. Soc. (2) **49**, 421—435 (1947). — [3] BAILEY, W. N.: A transformation of nearly-poised basic hypergeometric series. J. London Math. Soc. **22**, 237—240 (1947). — [4] SLATER, L. J.: General transformations of bilateral series. Quart. J. Math. (2) **3**, 73—80 (1952). — [5] SHUKLA, H. S.: Certain transformations of nearly-poised bilateral hypergemetric series. Ganita, **7**, 113—121 (1956).

Dept. of Math., The University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 24. Juli 1957)

HARTMAN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 202–210 (1958)

On Isometries and on a Theorem of Liouville*)

By

PHILIP HARTMAN

In this paper, it is shown that LIOUVILLE's theorem [Theorem (III)] on conformal mappings of space is valid for (local) transformations of class C^1. This is deduced by a procedure used to prove Theorem (I) dealing with the smoothness of solutions of overdetermined systems of partial differential equations. This procedure depends on the notion of strong L^2-derivatives. A particular case of Theorem (I) implies that if two non-singular Riemann metrics of class C^σ, where $\sigma = 1, 2, \ldots$, are isometric by virtue of a mapping of class C^1, then the mapping is necessarily of class $C^{1+\sigma}$; Theorem (II).

1. Overdetermined systems. The first theorem of this paper concerns smoothness properties of solutions of overdetermined systems of partial differential equations.

(I) *Let* $u = (u^1, \ldots, u^d)$ *and* $v = (v^1, \ldots, v^d)$. *Let* $f^I(u, v, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_d^d)$, *where* $I = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}d(d+1)$, *be functions of class* C^σ, $\sigma \geq 1$, *on a* $(d + d + d^2)$-*dimensional domain. Let* $v = v(u)$ *be of class* C^1 *and satisfy the system of partial differential equations*

$$(1) \qquad f^I(u, v, \partial v^1/\partial u^1, \ldots, \partial v^d/\partial u^d) = 0, \qquad \text{where } I = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}d(d+1),$$

on some u-domain. In addition, let

$$(2) \qquad \Delta(u) \neq 0,$$

where $\Delta(u)$ *is the determinant of the matrix of coefficients of* $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k$ *in the system of* $\frac{1}{2}d^2(d+1)$ *linear equations obtained by differentiating* (1) *formally with respect to* u^k, $k = 1, \ldots, d$, *and assuming* $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k = \partial^2 v^i/\partial u^k \partial u^j$. *Then* $v = v(u)$ *is of class* $C^{1+\sigma}$.

This theorem (with $d = 2$) was proved in [4] under the stronger assumption that $v = v(u)$ is of class C^2 (instead of class C^1). The question as to whether or not the above form of (I) is true was left open.

The proof of (I) below will depend on properties of functions having a finite "modified Dirichlet integral" in which partial derivatives are replaced by difference quotients. Essentially, (I) will first be proved in an L^2-sense for the case $\sigma = 1$.

It will be clear from the proof of (I) that an analogue holds if u and v are vectors of different dimensions, say, u is a d'-vector and v is a d-vector.

*) The preparation of this paper was sponsored in part by the Office of Naval Research, U. S. Navy. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

In this case, the system (1) of $\frac{1}{2}d(d+1)$ equations must be replaced by a system of $[\frac{1}{2}d(d'+1)+\frac{1}{2}]$ equations and condition (2) must be replaced by the assumption that the rank of the corresponding $d'[\frac{1}{2}d(d'+1)+\frac{1}{2}]$ by $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ matrix of coefficients of the $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ variables $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k = \partial^2 v^i/\partial u^k \partial u^j$ is $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ at every point u under consideration.

2. Isometries. It is clear from [4] that (I) has applications in differential geometry (and, in some cases, leads to refinements of the assertions in [4]). In particular, the considerations of [4] indicate that (I) has the following corollary (cf. Section 8 below):

(II) *Let* $u=(u^1, \ldots, u^d)$, $v=(v^1, \ldots, v^d)$. *Let* $(g_{ik}(u))$, $(h_{ik}(v))$ *be non-singular, symmetric matrices of class* C^σ *in vicinities of* $u=0$, $v=0$, *respectively. Let* $v=v(u)$ *be a mapping of class* C^1 *in a vicinity of* $u=0$ *satisfying* $v(0)=0$ *and transforming the Riemannian metric*

$$ds^2 = g_{ik}\,du^i\,du^k \tag{3}$$

into

$$ds^2 = h_{ik}\,dv^i\,dv^k. \tag{4}$$

Then $v=v(u)$ *is of class* $C^{1+\sigma}$.

If $\sigma=0$, this theorem is trivial. If $\sigma \geq 1$ and if $v=v(u)$ is of class C^2 (instead of class C^1), then (II) follows from the transformation rules for the Christoffel symbols. For these rules show that the second order partial derivatives of v^i can be expressed as polynomials in g^{jk}, h^{jk} and the first order partial derivatives of v^j, g_{jk} and h_{jk}.

Using the theory of geodesics and parallel transport, (II) was proved in [3], pp. 222–226, in the binary ($d=2$), positive definite case. In [5], (II) was proved for $d=2$ without the assumption that (3) is a positive definite metric. The proof in [5] is not applicable to the case of d (>2) dimensions; for example, in the positive definite case, it depends on the Cauchy-Riemann equations.

3. Liouville's theorem. Theorem (II) and the arguments used in the proof of (I) will be used to obtain the following form of LIOUVILLE's theorem.

(III) *Let* $d \geq 3$, $u=(u^1, \ldots, u^d)$, $v=(v^1, \ldots, v^d)$. *Let* $v=v(u)$ *be a (local) mapping of class* C^1 *with non-vanishing Jacobian which maps the Euclidean metric*

$$ds^2 = (dv^1)^2 + \cdots + (dv^d)^2 \tag{5}$$

into a conformal metric

$$ds^2 = \gamma^2[(du^1)^2 + \cdots + (du^d)^2], \qquad \text{where } \gamma = \gamma(u) > 0. \tag{6}$$

Then $v=v(u)$ *is a Möbius transformation (hence, analytic).*

The proofs of LIOUVILLE's theorem in standard texts require that $v=v(u)$ is of class C^3. A proof in which it is only assumed that $v=v(u)$ is of class C^2 is given in [2]. In (III), there is, of course, no assumption on the smoothness of γ; if γ is assumed to be of class C^1, then (III) follows from [2] and (II).

4. Two lemmas. The proofs of (I), (II), (III) will depend on two simple lemmas. The first is a consequence of a result of SÓLYI [8]. The second is obtained by a crude variation of arguments of MORREY [6] dealing with quasi-conformal maps and generalizations of these arguments by NIRENBERG [7].

The following notation will be used below: The range of a lower case index is to 1 to d, that of I is 1 to $\frac{1}{2}d(d+1)$. Repeated indices denote summation. When there is no possibility for confusion, partial differentiation with respect to the i-th component u^i of u will be denoted by the subscript i. If $g=g(u)$ is of class C^1 on a u-domain R, the Dirichlet integral of g over R will be denoted by $I_R(g)$,

$$I_R(g)=\sum_{i=1}^{d}\int_R |g_i(u)|^2\,du,$$

where $du=du^1\dots du^d$. If $g(u)$ is continuous on a domain containing the closure of R, then, for small $|h|>0$, $I_{Rh}(g)$ will denote the modified Dirichlet integral

$$I_{Rh}(g)=h^{-2}\sum_{i=1}^{d}\int_R |\Delta_i g|^2\,du, \tag{7}$$

where Δ_i denotes the difference operator

$$\Delta_i g=g(u^1,\dots,u^{i-1},u^i+h,u^{i+1},\dots,u^d)-g(u^1,\dots,u^d). \tag{8}$$

The following is implied by SÓLYI's paper [8] (cf. Section 5 below):

Lemma 1. *Let $g=g(u)$ be a continuous function on a domain containing the closure of a sphere T. Let there exist a constant K satisfying*

$$I_{Th}(g)\le K \tag{9}$$

for small $|h|>0$. Then $g(u)$ has strong L^2-derivatives on compact subsets of T.

In particular, the partial derivatives $g_k(u)$, $k=1,\dots,d$, exist almost everywhere on T. Below, this lemma will be applied to the components $g=v^i_j(u)$ of $v_j=\partial v/\partial v^j$. It will follow that v^i has second order partial derivatives $v^i_{jk}=v^i_{kj}$ almost everywhere and that if $f(u,v,v^1_1,\dots,v^d_d)$ is of class C^1 in its $d+d+d^2$ variables, then $f\big(u,v(u),v^1_1(u),\dots,v^d_d(u)\big)$ can be differentiated by the chain rule almost everywhere with respect to u^k, $k=1,\dots,d$.

Lemma 2. *Let $z=z(u)=\big(z^1(u),\ \dots,z^d(u)\big)$ be a vector function of class C^1 on a bounded u-domain R. Let there exist constants C_1, C_2, C_{ijkm} such that $|z^i(u)|\le C_1$ and*

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|z^i_j|^2\le C_{ijkm}\,\partial(z^i,z^j)/\partial(u^k,u^m)+C_2. \tag{10}$$

Then, for any compact subset T of R, there exists a constant K, depending only on R, T, C_1, C_2, C_{ijkm}, such that the Dirichlet integrals of z^j satisfy

$$\sum_{j=1}^{d}I_T(z^j)\le K. \tag{11}$$

5. Proof of Lemma 1. In order to make clear the meaning of "strong L^2-derivatives" and the validity of the remarks following Lemma 1, a verification of Lemma 1 will be indicated.

In this verification, there is no loss of generality in supposing that $g(u^1, \ldots, u^d)$ is of period 2π in each variable u^j and that (9) holds for the parallelopiped T: $|u^j| \leq \pi$; [8], pp. 53—54. Let $g(u)$ have the Fourier development

$$g(u) \sim \sum a_n e^{i n \cdot u},$$

where $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n \cdot u = n_1 u^1 + \cdots + n_d u^d$ and $n_j = 0, \pm 1, \ldots$. Let $g^N(u)$ denote the (finite) Fejér sum

$$g^N(u) = \sum \left(1 - |n_1|/N\right) \ldots \left(1 - |n_d|/N\right) a_n e^{i n \cdot u}, \qquad \text{where } |n_j| < N.$$

The inequality (9) implies the convergence of the d-fold series

$$\sum |a_n|^2 |n|^2 = \sum |a_n|^2 (n_1^2 + \cdots + n_d^2) < \infty;$$

[8], pp. 49—50.

From the continuity of g, it follows by FEJER's theorem that $g^N \to g$ uniformly as $N \to \infty$. Finally, from the last formula line, it follows that, for $j = 1, \ldots, d$, the sequence $\partial g^1/\partial u^j, \partial g^2/\partial u^j, \ldots$ converges in the L^2-mean on T: $|u^k| \leq \pi$, to

$$g_j \sim \sum i n_j a_n e^{i n \cdot u}.$$

6. Proof of Lemma 2. Without loss of generality, it can be supposed that T is a sphere, say $|u| \leq a$, and that R contains the slightly larger sphere $T(\theta)$: $|u| \leq a/\theta$, where θ is a fixed number on the range $0 < \theta < 1$. Let $e(r)$ be a non-negative function of class C^∞ for $r \geq 0$ satisfying $e = 1$ for $0 \leq r \leq a$ and $e = 0$ for $r \geq \frac{1}{2}(a + a/\theta)$.

An integration by parts gives

$$\int_{T(\theta)} e^2(r) \left(z_k^i z_m^j - z_m^i z_k^j\right) du = -2 \int_{T(\theta)} e e' z^i \left(z_m^j r_k - z_k^j r_m\right) du,$$

where $r = |u|$ and $e' = de/dr$. This integration by parts is valid even though z is only of class C^1 (rather, than of class C^2).

If $\varepsilon > 0$, then the absolute value of the last integral is majorized by

$$\varepsilon \int_{T(\theta)} e^2 \left(|z_m^j|^2 + |z_k^j|^2\right) du + \varepsilon^{-1} C_1^2 \int_{T(\theta)} e'^2(r)\, du,$$

since $|ab| \leq \frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1} b^2$, $|z^i| \leq C_1$ and $|r_k|, |r_m| \leq 1$. Thus (10) implies that

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_{T(\theta)} e^2 |z_j^i|^2 du \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{d} |C_{i\,j\,k\,m}| \int_{T(\theta)} e^2 \left(|z_m^j|^2 + |z_k^j|^2\right) du + \tfrac{1}{2} K,$$

where K is a constant depending only on $C_1, C_2, C_{i\,j\,k\,m}, \varepsilon, R, T$ and the function $e(r)$. Hence if ε is chosen so small that $2d^2 \varepsilon |C_{i\,j\,k\,m}| \leq \frac{1}{2}$, then

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_{T(\theta)} e^2 |z_j^k|^2 du \leq K.$$

Since $e \geq 0$ for $r \geq 0$ and $e = 1$ for $r \leq a$, the inequality (11) follows.

7. Proof of (I). Consider first the case $\sigma = 1$. In view of the local nature of the assertion of (I), it is sufficient to prove it for a vicinity of a given point, say $u = 0$, in the domain of definition of $v = v(u)$.

Let i be a fixed integer, $1 \leq i \leq d$, and h be a number such that $|h| > 0$ is small. Put

$$z = h^{-1} \Delta_i v, \tag{12}$$

where Δ_i is the difference operator defined in (8). Thus $z = z(u, h) = (z^1, \ldots, z^d)$ is a vector function of class C^1 for small $|u|$ and $|h| > 0$. It is a continuous function, even for $h = 0$, if $z(u, 0)$ is defined to be $\partial v / \partial u^i$.

Apply the difference operator $h^{-1}\Delta_i$ to the equation (1). By the mean value theorem of differential calculus, the result can be written as

$$(\partial f^I / \partial u^i)_0 + (\partial f^I / \partial v^j)_0 z^j + (\partial f^I / \partial v_n^j)_0 z_n^j = 0,$$

where the subscript 0 means that the partial derivative is evaluated at a suitable intermediary point. By virtue of the continuity assumptions, the last equation can be written as

$$d_j^{I\,n} z_n^j = \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=1}^{d} o(1) |z_n^j| + g^I(u, h), \tag{13}$$

where $d_j^{I\,n}$ is the value of $\partial f^I / \partial v_n^j$ at the point $(u, v, v_1^1, \ldots, v_d^d) = (0, v(0), v_1^1(0), \ldots, v_d^d(0))$; $o(1)$ refers to $|u| \to 0$ and $0 < |h| \to 0$; and $g^I(u, h)$ denotes a continuous function for small $|u|, |h|$ (≥ 0).

Multiply (13) by z_m^k and write the resulting equation in the form

$$\sum_{j=1}^{d} \Big[\sum_{n=1}^{m} d_j^{I\,n} z_n^j z_m^k + \sum_{n=m+1}^{d} d_j^{I\,n} z_m^j z_n^k \Big] = \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=m+1}^{d} d_j^{I\,n} (z_m^j z_n^k - z_n^j z_m^k) + \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=1}^{d} o(1) |z_n^j|^2 + g^I z_m^k,$$

where $I = 1, \ldots, \frac{1}{2} d(d+1)$, $m = 1, \ldots, d$ and k is fixed. This gives an inhomogeneous, linear system of $\frac{1}{2} d^2 (d+1)$ equation in the $\frac{1}{2} d^2 (d+1)$ variables $z_n^j z_m^k$, where $1 \leq j \leq d$ and $1 \leq n \leq m \leq d$. The definition of $\Delta(u)$ in (2) shows that the determinant of this system is $\Delta(0) \neq 0$. Hence, $z_n^j z_m^k$, where $1 \leq n \leq m \leq d$, can be written in the form

$$c_{pqrs} \partial(z^p, z^q) / \partial(u^r, u^s) + \sum_{p=1}^{d} \sum_{q=1}^{d} o(1) |z_q^p|^2 + c_q^I g^I z_q^k,$$

where c_{pqrs}, c_q^I are constants. In particular, $|z_m^k|^2$, when $m = 1, \ldots, d$, is of this form. Since k is arbitrary on the range $1 \leq k \leq d$, an application of an inequality of the type $|g^I z_q^k| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |z_q^k|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} |g^I|^2$ and the boundedness of g^I imply that

$$\sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} \big(1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon + o(1)\big) |z_m^k|^2 \leq C_{pqrs} \partial(z^p, z^q) / \partial(u^r, u^s) + C \varepsilon^{-1},$$

for suitable constants C_{pqrs} and C.

It follows from Lemma 2 that there exists a constant K such that (11) holds for small $|h|>0$ if T is a fixed small sphere $|u|\leq a$. The definitions of I_T and $z=h^{-1}\Delta_i v$ show, therefore, that

$$h^{-2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{m=1}^{d}\int_T |\Delta_i v_m^k|^2\,du\leq K$$

for every $i=1,\ldots,d$. Hence, $I_{Th}(v_m^k)\leq Kd$.

By virtue of Lemma 1, v_m^k has strong L^2-derivatives and $\partial^2 v^k/\partial u^i\,\partial u^m=\partial^2 v^k/\partial u^m\,\partial u^i$ exist almost everywhere. Furthermore, $f^I\left(u, v(u), v_1^1(u), \ldots, v_d^d(u)\right)$ can be differentiated by the chain rule almost everywhere with respect to u^k, $k=1,\ldots,d$. The resulting set of $\frac{1}{2}d^2(d+1)$ equations,

$$\partial f^I/\partial u^k+(\partial f^I/\partial v^i)\,v_k^i+(\partial f^I/\partial v_j^i)\,v_{jk}^i=0,$$

is linear in the variables $v_{jk}^i=v_{kj}^i$ and can be solved for these variables, by virtue of (2). The continuity of the functions

$$\partial f^I/\partial u^k,\ (\partial f^I/\partial v^i)\,v_k^i,\qquad \partial f^I/\partial v_j^i \tag{14}$$

shows that $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k$ can be extended to continuous functions. Thus, v has continuous, second order partial derivatives. This proves the case $\alpha=1$ of (I).

If $\sigma=2$, it follows that the functions (14) are of class C^1 and, hence, $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k$ is of class C^1; that is, v is of class C^3. Clearly, (I) follows for any $\sigma\geq 1$ by induction.

8. Proof of (II). The transformation rule for metric tensors shows that the equivalence ot (3) und (4) means that the $\frac{1}{2}d(d+1)$ equations

$$g^{ij}(u)\,v_i^k\,v_j^m-h^{km}(v)=0 \tag{15}$$

hold, where (g^{ij}), (h^{km}) are the (symmetric) matrices inverse to (g_{ij}), (h_{km}), respectively. The function of $(u, v, v_1^1, \ldots, v_d^d)$ on the left of (15) is of class C^σ with respect to its $d+d+d^2$ variables, by the assumptions of (II). If $v=v(u)$ and $v_i^k=\partial v^k(u)/\partial u^i$, formal differentiation of (15) with respect to u^j, where $j=1,\ldots,d$, leads to a linear system of equations for the second order partials of v. Furthermore, the determinant of the matrix of coefficients of these derivatives does not vanish; cf. the transformation rule for the Christoffel symbols. Hence (II) is the particular case of (I) in which (15) plays the role of (1).

9. Proof of (III). The equivalence of (5) and (6) means that

$$\sum_{k=1}^{d} v_k^i v_k^j=\gamma^2\delta^{ij}, \tag{16}$$

where δ^{ij} is 1 or 0 according as $i=j$ or $i\neq j$. After an affine change of variables, it can be supposed that $u=0$ is a point of the u-domain under consideration and that

$$v_k^i(0)=\delta^{ik}. \tag{17}$$

Let i, h, Δ_i, and z have the same significance as in (12). Then (16) and (17) show that

$$z_k^i + z_j^k = (h^{-1}\Delta_i\gamma^2)\,\delta^{jk} + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|, \tag{18}$$

where the $o(1)$ refers to $|u|\to 0$ and $0<|h|\to 0$.

If $j=k$, then the last relation becomes

$$z_j^i = \tfrac{1}{2}(h^{-1}\Delta_i\gamma^2) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|. \tag{19}$$

This formula and the corresponding one for z_k^k show that

$$z_j^i - z_k^k = \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|. \tag{20}$$

Hence, by (18) and (20), where $j\neq k$,

$$z_j^j z_k^k - z_k^j z_j^k = \tfrac{1}{2}\left(|z_j^j|^2 + |z_k^k|^2 + |z_k^j|^2 + |z_j^k|^2\right) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|^2. \tag{21}$$

Clearly, this implies an inequality of the type (10).

The proof of (I) implies, therefore, that the function $v=v(u)$ (of class C^1) has strong, second order, L^2-derivatives in a vicinity of $u=0$; in particular, $\partial^2 v^i/\partial u^j\partial u^k$ exists and equals $\partial^2 v^i/\partial u^k\partial u^j$ almost everywhere. It follows from (16) and $\gamma>0$ that γ has strong, first order, L^2-derivatives.

It will now be verified that a standard proof of LIOUVILLE's theorem ([*1*], pp. 460–462) involving the Lamé equations can be carried out under these differentiability conditions on $v=v(u)$ and $\gamma=\gamma(u)$.

The derivation formulae for (16) (that is, the transformation rules for the Christoffel symbols) are valid almost everywhere and give

$$v_{ij} = \gamma^{-1}(\gamma_j v_i + \gamma_i v_j) \qquad \text{if } i\neq j, \tag{22}$$

$$v_{ii} = \gamma^{-1}\Big(\gamma_i v_i - \sum_{k\neq i}\gamma_k v_k\Big). \tag{23}$$

Let $y_i = y_i(u)$ denote the unit vector

$$y_i = \lambda v_i, \qquad \text{where } \lambda = \gamma^{-1}. \tag{24}$$

(Note that the subscript i on y_i does not denote partial differentiation.) The vectors (24) have strong L^2-derivatives and (22), (23) imply

$$\partial y_i/\partial u^j = -\lambda_i v_j \qquad \text{if } i\neq j, \tag{25}$$

$$\partial y_i/\partial u^i = \sum_{k\neq i}\lambda_k v_k \tag{26}$$

almost everywhere.

Let the i-th coordinate u^i be fixed, not on a certain 1-dimensional zero set. Then (25) gives

$$\int_J \lambda_i\,dv = 0, \tag{27}$$

if J is, for example, the boundary of a rectangle $a^j \leq u^j \leq b^j$, $a^k \leq u^k \leq b^k$, $u^m = \text{const}$ if $m \neq j, k$; $i \neq j, k$; and the numbers a^j, b^j, a^k, b^k do not belong to certain 1-dimensional zero sets. Obvious modifications of the proof of Theorem 2, [2], p. 328, show that λ_i does not depend on u^j if $j \neq i$; that is, $\lambda_i = \partial\lambda/\partial u^i$ which is defined almost everywhere is a function only of the i-th component u^i of u. (The proof in [2] remains essentially valid for the present situation since the property of having strong L^2-derivatives is invariant under C^1 changes of the independent variables.)

If $i, j\ (\neq i)$ are fixed, the relations (25), (26) imply

$$\int_J \lambda_i v_j \, du^j - \Big(\sum_{k \neq i} \lambda_k v_k\Big) \, du^i = 0, \tag{28}$$

if J is the boundary of a rectangle $a \leq u^i \leq b$, $\alpha \leq u^j \leq \beta$, $u^k = \text{const}$ if $k \neq i, j$, and a, b, α, β do not belong to a certain 1-dimensional zero set. Since λ_k depends only on u^k, (28) gives

$$\lambda_i(b)\, s(b) - \lambda_i(a)\, s(a) - \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,[t_k(\beta) - t_k(\alpha)] = 0, \tag{29}$$

where

$$\left\{ \begin{aligned} s(u^i) = s(u^i, \alpha, \beta) = v(u^1, \ldots, u^{j-1}, \beta, u^{j+1}, \ldots, u^d) - \\ - v(u^1, \ldots, u^{j-1}, \alpha, u^{j+1}, \ldots, u^d) \end{aligned} \right. \tag{30}$$

and

$$t_k(u^i) = t_k(u^i, a, b) = \int_a^b v_k(u)\, du^i. \tag{31}$$

Rewrite (29) in the form

$$s(b)\,[\lambda_i(b) - \lambda_i(a)] = -\lambda_i(a)\,[s(b) - s(a)] + \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,[t_k(\beta) - t_k(\alpha)]. \tag{32}$$

Consider a, α, β, u^k for $k \neq i$ to be fixed and b to be a variable. Then $s(b)$ is of class C^1. Also $t_k(u^j, a, b)$ is of class C^1, as a function of b; cf. (31). Thus, by (32), $s(b)\,[\lambda_i(b) - \lambda_i(a)]$ is of class C^1. The vector $s(b)$ does not vanish if α and β are suitably chosen (and fixed), for v cannot be a constant on any u^j-interval; cf. (16).

It follows that $\lambda_i(u^i) = \partial\lambda/\partial u^i$ can be extended to a continuous function and so, λ has continuous partial derivatives with respect to u^i, $i = 1, \ldots, d$. Thus λ (hence γ) is of class C^1. By (II), $v = v(u)$ is of class C^2.

Divide (32) by $b - a$ and let $b \to a$. It follows that λ_i has a derivative λ_{ii} with respect to u^i and that

$$s(a)\,\lambda_{ii}(a) = -\lambda_i(a)\,\{v_i\} + \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,\{v_k\},$$

where $\{g\}$ denotes the difference of the values of g when $u^i = a$, $u^j = \beta$ and $u^i = a$, $u^j = \alpha$. Consequently, λ has continuous second derivatives, λ_{ii} and $\lambda_{ij} = 0$ if $i \neq j$. Hence, by (II), $v = v(u)$ is of class C^3. The proof of (III) can now be completed as in [1], pp. 460–462.

References

[1] BIANCHI, L.: Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa (1894). — [2] HARTMAN, P.: Systems of total differential equations and Liouville's theorem on conformal mappings. Amer. J. Math. **69**, 327–332 (1947). — [3] HARTMAN, P.: On unsmooth two-dimensional Riemannian metrics. Amer. J. Math. **74**, 215–226 (1952). — [4] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the solutions of certain overdetermined systems of partial differential equations. Archiv Math. **5**, 168–174 (1954). — [5] HARTMAN, P., and A. WINTNER: Regular binary Pfaffians and non-parabolic partial differential equations. Rend. Circ. Math. Palermo (2) **3**, 347–362 (1954). — [6] MORREY, C. B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938). — [7] NIRENBERG, L.: On a generalization of quasi-conformal mappings and its applications to elliptic partial differential equations. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Princeton 1954, pp. 95–100. — [8] SÓLYI, A.: Über Funktionen, die ein endliches Dirichletsches Integral haben. Acta Sci. Math., Szeged **10**, 48–54 (1941).

University of California, Los Angeles and The Johns Hopkins University, Baltimore

(Eingegangen am 1. Oktober 1957)

HOOLEY, C.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 211–227 (1958)

On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product

By
CHRISTOPHER HOOLEY

1. Introduction

PAGE [1]), in a series of papers published some twenty-five years ago, derived asymptotic formulae for the number of representations of a positive integer n as the sum of r squares and t products, as $n \to \infty$, where r, t were fixed integers such that $r, t > 0$ and $2r + t \geq 4$. These formulae shewed that the number of representations could be expressed asymptotically in terms of arithmetical functions of n, these being divisor functions if $2r + t$ was even, but Dirichlet series of a Smith-Minkowski type with argument $s = \frac{1}{2}(2r + t - 1)$ if $2r + t$ was odd. As results for $r = 0$ [2]) and $t = 0$ [3]) had been known previously, PAGE's work left only the problem of the case $r = t = 1$ outstanding. PAGE's methods do not appear to be applicable to this problem, and no alternative method has hitherto been suggested.

It is the purpose of this paper to solve this problem, which, stated precisely, is to prove an asymptotic formula for $\varkappa(n)$, the number of representations of n in the form

$$n = \lambda\mu + \nu^2,$$

where λ, μ are positive integers and ν is an integer. An equivalent interpretation of $\varkappa(n)$ is as a divisor sum, since it is almost immediate that

$$\varkappa(n) = \sum_{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n}} d(n - \nu^2),$$

where $d(m)$ denotes the number of (positive) divisors of m. If n is not a perfect square, we shall prove a formula that corresponds to what would be obtained by formally substituting $r = t = 1$ in PAGE's general result for $2r + t$ odd. If, however, n is a perfect square, this formula no longer holds, the behaviour of $\varkappa(n)$ being then quite different. In the latter case, if $n = m^2$,

[1]) PAGE, A.: On the representation of a number as a sum of squares and products. Proc. London Math. Soc., Ser. 2; paper I, **36**, 241–256 (1933); paper II, **36**, 471–484 (1933); paper III, **37**, 1–16 (1934).

[2]) See, for example, INGHAM, A. E.: Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. **2**, 202–208 (1927). — ESTERMANN, T.: On the representations of a number as the sum of three or more products. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **34**, 190–195 (1932).

[3]) This case, of course, corresponds to the classical problem of a number as a sum of squares.

then $n-\nu^2=(m-\nu)(m+\nu)$, and it is not very hard to see that the problem becomes almost identical with that of the sum

$$\sum_{\mu=1}^{2m-1} d(\mu)\, d(2m-\mu),$$

for which a result has already been obtained by INGHAM[2]). Henceforth, therefore, we shall always assume that n is not a perfect square.

Problems of this type in additive number theory often group themselves into what HARDY and LITTLEWOOD termed *conjugate* pairs, and it is a common experience that a method successful with such a problem is normally applicable, with but slight modification, to the conjugate problem. It is therefore an interesting and somewhat unexpected feature of our problem, that it proves to be considerably harder than the conjugate problem of estimating the sum

$$N(x,n)=\sum_{\nu\leq x} d(\nu^2-n),$$

where $x\to\infty$ and n is now a fixed non-zero integer. BELLMAN[4]) has in fact solved the latter problem, although he has published but a brief hint regarding the method of proof. If his suggestion be adopted, it can be shewn that

$$N(x,n)=2x\sum_{\lambda\leq\sqrt{x}}\frac{\varrho(\lambda)}{\lambda}+O\Big(\sqrt{x}\sum_{\lambda\leq\sqrt{x}}\frac{\varrho(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\Big)=N_1+O(N_2),\quad \text{say},$$

where $\varrho(\lambda)$ is the number of roots of the congruence $\nu^2\equiv n \pmod{\lambda}$. In a parallel manner we can prove, as will be demonstrated in Section 3, that

$$\varkappa(n)=4\sqrt{n}\sum_{\lambda<\sqrt{n}}\frac{\varrho(\lambda)}{\lambda}+O\Big(\sum_{\lambda<\sqrt{n}}\varrho(\lambda)\Big)=\varkappa_1+O(\varkappa_2),\quad \text{say}.$$

The problems, alike till this point, diverge in difficulty when the estimations of N_1, N_2, and $\varkappa_1, \varkappa_2$, are attempted. Whereas the estimation of N_1 and N_2 can be effected easily in a variety of ways, that of $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ is the subject to which the major part of this paper is devoted.

After expressing $\varkappa(n)$ in terms of $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$, we evaluate $\varrho(\lambda)$, and thereby shew that $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ are equal to combinations of sums $A(y)$ and $B(y)$, respectively, over a set of values y not exceeding $\sqrt{n}$, where

$$A(y)=\sqrt{n}\sum_{h\leq y}\frac{\varrho_{d_1}(h)}{h},\qquad B(y)=\sum_{h\leq y}\varrho_{d_1}(h),$$

and $\varrho_{d_1}(h)$ is a positive function of real Dirichlet characters to a (generally large) modulus that depends on n. Our treatment of $A(y)$ and $B(y)$ depends on whether y belong to a range, R_1, of values in the neighbourhood of $\sqrt{n}$, or y belong to a range, R_2, of smaller values. In the latter case the contribution to $\varkappa(n)$ of the corresponding $A(y)$ and $B(y)$ is of a lower order of

[4]) BELLMAN, R.: Ramanujan sums and the average value of arithmetical functions. Duke Math. J. **17**, 159–168 (1950).

magnitude than $\varkappa(n)$ itself. For the former case, we begin by obtaining, with the aid of the best known estimates for character sums $\sum_l \chi(l)$, an asymptotic formula of the form

$$A(x) = S(x) + O\{T(x)\},$$

where $x \to \infty$, $S(x)$ is a combination of DIRICHLET's L-functions with argument $s = 1$, and the error term holds uniformly with respect to n. This formula shews that $A(x)$ and $S(x)$ are asymptotically equivalent for $x > \sqrt{n} \log^9 n$, and also, in the special case where n has a large odd square factor, for values of x belonging to R_1. In the general case, however, where the largest odd square factor of n is small, the error term in this formula is such that we cannot immediately deduce the asymptotic equivalence of $A(x)$ and $S(x)$ for x belonging to R_1; indeed, in the present state of knowledge about the L-functions, it is not even evident that $S(x)$ is positive. Although we shall not actually do so, it would be possible to consider $B(x)$ in a similar way, obtaining an asymptotic formula to which, mutatis mutandis, the above remarks would be applicable. The crux of our problem, therefore, is the estimation of $A(x)$ and $B(x)$ when $x \in R_1$ and n has no large odd square factor. In fact, in view of the results already stated as proved, it now remains to shew: (i) that $A(x) = o\{B(x)\}$ for $x \in R_1$ and all n; (ii) that $A(x)$ and $S(x)$ are asymptotically equivalent for $x \in R_1$ and n with no large square factor (and hence $S(x) > 0$). Firstly, we use the principles of SELBERG's sieve method (BRUN's method would serve equally well, but would involve more complications in detail) to prove a result that includes (i) as a special case, namely, (iii) $A(x) = o\{B(x)\}$, uniformly with respect to n, as $x \to \infty$. From (iii) and the asymptotic equivalence of $A(x)$ and $S(x)$ for $x > \sqrt{n} \log^9 n$, we then deduce (ii) by a method simple in principle, but somewhat intricate in detail.

Finally, it may be of some interest to remark that this problem is essentially related to the theory of the class-number of binary quadratic forms of determinant n.

I am greatly indebted to Mr. INGHAM for reading a preliminary draft of this paper.

2. Notation

The following notation will be adopted throughout.

n, D, Ω, d, and d_1, are positive integers such that: n is to be regarded as tending to infinity; n is not a perfect square; $n = 2^r D \Omega^2$, where r is a non-negative integer, D and Ω are odd, and D is square-free; $d^2 | n$ and $d_1 = n/d^2$; also r_1 is 0 or 1, according as r be even or odd.

$h, k, l, m, \delta, \lambda$, and μ, are positive integers; ν is an integer; p is a prime; s is a continuous real variable.

(l, m) denotes the highest common factor of l and m. $p | l$, $p \nmid l$, $p^\alpha || l$, mean p divides l, p does not divide l, p^α is the highest power of p dividing l, respectively. JACOBI's symbol of quadratic residuality is denoted by either

$\left(\frac{l}{m}\right)$ or $(l|m)$. $(l|m)$ is not defined for even m, while $(l|m)=0$ if m is odd and $(l, m)>1$.

The equation $f=O(|g|)$ denotes an inequality of the type $|f|<A|g|$, true for all values of the variables consistent with stated conditions, where A is an absolute constant.

3. Initial transformation of sum

Let $\varkappa(n)$ be the number of representations of the integer n (restricted so as not to be a perfect square) in the form

$$n=\lambda\mu+\nu^2.$$

Then

$$\varkappa(n)=\sum_{-\sqrt{n}<\nu<\sqrt{n}} d(n-\nu^2)=\sum_{\lambda\mu=n-\nu^2} 1.$$

Now in the right-hand sum not more than one of λ and μ can exceed $\sqrt{n}$. Therefore we have

$$(1)\qquad \begin{cases} \varkappa(n)=\displaystyle\sum_{\substack{\lambda\mu=n-\nu^2\\ \lambda\le\sqrt{n}}} 1+\sum_{\substack{\lambda\mu=n-\nu^2\\ \mu\le\sqrt{n}}} 1-\sum_{\substack{\lambda\mu=n-\nu^2\\ \lambda,\mu\le\sqrt{n}}} 1 \\ \quad =2\displaystyle\sum_{\substack{\lambda\mu=n-\nu^2\\ \lambda\le\sqrt{n}}} 1-\sum_{\substack{\lambda\mu=n-\nu^2\\ \lambda,\mu\le\sqrt{n}}} 1=2\Sigma_1-\Sigma_2, \quad \text{say.} \end{cases}$$

Let $\varrho(\lambda)$ denote the number of roots of the congruence

$$\nu^2\equiv n \pmod{\lambda}.$$

Then

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma_1=\displaystyle\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\sum_{\substack{-\sqrt{n}<\nu<\sqrt{n}\\ \nu^2\equiv n(\mathrm{mod}\,\lambda)}} 1=\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\left(2\frac{\sqrt{n}}{\lambda}+O(1)\right)\varrho(\lambda) \\ \quad =2\sqrt{n}\displaystyle\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\frac{\varrho(\lambda)}{\lambda}+O\Big(\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\varrho(\lambda)\Big), \end{cases}$$

and

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma_2=\displaystyle\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\sum_{\substack{\sqrt{n-\lambda n^{\frac{1}{2}}}<|\nu|<\sqrt{n}\\ \nu^2\equiv n(\mathrm{mod}\,\lambda)}} 1 \\ \quad =\displaystyle\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\left(2\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-\lambda n^{\frac{1}{2}}}}{\lambda}+O(1)\right)\varrho(\lambda)=O\Big(\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\varrho(\lambda)\Big). \end{cases}$$

We deduce from (1), (2) and (3)

$$(4)\qquad \varkappa(n)=4\sqrt{n}\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\frac{\varrho(\lambda)}{\lambda}+O\Big(\sum_{\lambda\le\sqrt{n}}\varrho(\lambda)\Big).$$

This completes the first stage of our transformation of the sum. Before we proceed to the second stage, it is necessary to investigate the series $\sum\varrho(\lambda)/\lambda^s$.

4. The series $\sum \varrho(\lambda)/\lambda^s$

Our aim in this section is to transform the series $\Sigma\varrho(\lambda)/\lambda^s$ by means of a principle due to EULER, in order that $\varrho(\lambda)$ may be expressed in terms of the coefficients of more familiar and manageable Dirichlet series. We remark that throughout this section each identity has two possible interpretations; firstly, as a numerical equality that is valid for all s exceeding a certain value; secondly, as a statement of coefficient relations, expressed through a theory of formal operations on Dirichlet series. The second interpretation is strictly all that is required here; under this, it is fairly plain that our identities would be true, regardless of any questions concerning the convergency or the numerical values of the series involved. Unfortunately, however, no formal theory of this type, such as is sketched by HARDY and WRIGHT[5]), has ever been developed in sufficient detail, for us to insist on this second interpretation alone. We therefore observe that the absolute convergency of the series below implies the validity of the first interpretation, the second interpretation then following in virtue of a well known uniqueness theorem in the theory of Dirichlet series.

Since[6]) $\varrho(\lambda) \leq \lambda$, we have that $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \varrho(\lambda)/\lambda^s$ is absolutely convergent for $s>2$. Furthermore, we know from the elementary theory of congruences that $\varrho(\lambda)$ is a multiplicative function of λ. We thus have, for $s>2$,

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varrho(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} = \prod_{p=2}^{\infty} A_p(s), \quad \text{say.}$$

We now evaluate $A_p(s)$ separately for the five cases: (a) $p \nmid 2n$; (b) $p \mid D$, $p \nmid \Omega$; (c) $p \mid D$, $p \mid \Omega$; (d) $p \nmid D$, $p \mid \Omega$; (e) $p=2$. We shall suppose $p^\beta \| n$.

Case (a). If $\alpha>0$, it is known from the theory of quadratic congruences that $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ has two or no solutions, according as to whether $(n \mid p)$ equals 1 or -1. Thus, if $(n \mid p)=1$, then

$$A_p(s) = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2}{p^{2s}} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

while, if $(n \mid p) = -1$, then

$$A_p(s) = 1 = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Therefore

$$(6) \qquad A_p(s) = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 - \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2 \mid p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

---

[5]) *The Theory of Numbers*, third edition, Chapter XVII, 251–253.

[6]) It will be evident, either from what follows or from the general theory of congruences, that the series is in fact absolutely convergent for $s>1$. We do not require here any more than the existence of some s_0 such that the series involved are absolutely convergent for $s>s_0$.

Case (b). We have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The case $\alpha = 0, 1$, is trivial. If $\varrho(p^\alpha)$ were non-zero for $\alpha > 1$, the congruence $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ would be resoluble; this would imply $p \mid v$; and so $p^2 \mid n$, contrary to hypothesis. Therefore

$$(7) \quad \begin{cases} A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 - \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ \qquad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2 \mid p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Case (c). Here β is odd, and equals $2\beta' + 1$, say. We have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} p^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq \beta, \\ 0\ , & \text{if } \alpha > \beta. \end{cases}$$

For if $\alpha \leq \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ is equivalent to $v^2 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$; hence it is equivalent to $v \equiv 0 \pmod{p^{[\frac{1}{2}(\alpha+1)]}}$, which congruence has $p^{[\frac{1}{2}\alpha]}$ solutions, modulo p^α. If $\alpha > \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ implies that $v^2 \equiv 0 \pmod{p^\beta}$; hence $v^2 \equiv 0 \pmod{p^{\beta+1}}$, since β is odd; and so $p^{\beta+1} \mid n$, contrary to hypothesis. Therefore

$$(8) \quad \begin{cases} A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'}}{p^{(\beta-1)s}} + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}} \\ \qquad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \frac{p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'}}{p^{2\beta' s}}\right) \\ \qquad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2 \mid p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2 \mid p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Case (d). Here β is even, and equals $2\beta'$, say. If $n_1 = n/p^\beta$, we have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} p^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq \beta, \\ 2p^{\beta'}, & \text{if } \alpha > \beta \text{ and } (n_1 \mid p) = 1, \\ 0\ , & \text{if } \alpha > \beta \text{ and } (n_1 \mid p) = -1. \end{cases}$$

If $\alpha \leq \beta$, the proof is as for the corresponding case in (c). If $\alpha > \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ implies that $p^\beta \mid v^2$; we then obtain the equivalent congruence $v_1^2 \equiv n_1 \pmod{p^{\alpha-\beta}}$, where $v = p^{\beta'} v_1$; the latter congruence has two or no solutions, according as to whether $(n_1 \mid p)$ equals 1 or -1; the second and third parts of the result are therefore true. Thus

$$A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \\ + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}}\left(1 + \frac{\varepsilon_p}{p^s} + \frac{\varepsilon_p}{p^{2s}} + \cdots\right),$$

where $\varepsilon_p = 2$ or 0, according as to whether $(n_1|p)$ is 1 or -1; and so, as in case (a),

$$(9)\quad \begin{cases} A_p(s) = 1 + \dfrac{1}{p^s} + \dfrac{p}{p^{2s}} + \dfrac{p}{p^{3s}} + \cdots + \dfrac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \dfrac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}}\left(1 + \dfrac{1}{p^s}\right)\left(1 - \left(\dfrac{n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ \qquad = \left(1 + \dfrac{1}{p^s}\right)\left(1 + \dfrac{p}{p^{2s}} + \cdots + \dfrac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \dfrac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}}\left\{1 - \left(\dfrac{n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}\right\}^{-1}\right) \\ \qquad = \left(1 + \dfrac{1}{p^s}\right)\sum_{\delta^2|p^\beta} \dfrac{\delta}{\delta^{2s}}\left(1 - \left(\dfrac{n/\delta^2}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Case (e). If r is odd, we can shew, exactly as for case (c), that

$$\varrho(2^\alpha) = \begin{cases} 2^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq r, \\ 0, & \text{if } \alpha > r. \end{cases}$$

If r is even and equals $2r'$, we have

$$\varrho(2^\alpha) = \begin{cases} 2^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq r, \\ 2^{r'}, & \text{if } \alpha = r+1, \\ 2^{r'+1}, & \text{if } \alpha = r+2 \text{ and } D\Omega^2 \equiv 1 \pmod 4, \\ 2^{r'+2}, & \text{if } \alpha > r+2 \text{ and } D\Omega^2 \equiv 1 \pmod 8, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $\alpha \leq r$, the proof is as for the corresponding case in (c). If $\alpha > r$, then from $\nu^2 \equiv n \pmod{2^\alpha}$ we deduce the equivalent congruence $\nu'^2 \equiv D\Omega^2 \pmod{2^{\alpha-r}}$, where $\nu = 2^{r'}\nu'$; the last four parts then follow at once from a consideration of the latter congruence. We obtain

$$(10)\quad \begin{cases} A_2(s) = \left(1 + \dfrac{1}{2^s}\right)K(s), \\ \text{where} \\ K(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \dfrac{a_\alpha}{2^{\alpha s}}, \\ \text{and} \\ a_\alpha = O(2^{\frac{1}{2}\alpha}). \end{cases}$$

We deduce from (5), (6), (7), (8), (9) and (10)

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = K(s) \prod_{p=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\prod_{p=3}^{\infty}\left\{\sum_{\delta^2|p^\beta}\frac{\delta}{\delta^{2s}}\left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{K(s)\zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{p=3}^{\infty}\left\{\sum_{\delta^2|p^\beta}\delta^{2s}\left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right\}.$$

Now, for each p in the infinite product above, let p^ν be a particular value of δ. Then the infinite product is equal to the sum of all possible terms of

the type

$$\prod_{p=3}^{\infty} \frac{p^{\gamma}}{p^{2\gamma s}} \left(1 - \left(\frac{n/p^{2\gamma}}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Therefore

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = \frac{K(s)\,\zeta(s)}{\zeta(2s)} \sum_{\substack{d^2 \mid n \\ (d,2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/p^{2\gamma}}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

where $p^{\gamma} \| d$. Now $(np^{-2\gamma} \mid p) = (nd^{-2} \mid p)$, since $d^2 p^{-2\gamma}$ divides n, but is prime to p. Therefore

$$(11) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = \frac{K(s)\,\zeta(s)}{\zeta(2s)} \sum_{\substack{d^2 \mid n \\ (d,2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/d^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha}}{2^{\alpha s}} \sum_{\substack{d^2 \mid n \\ (d,2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s}, \end{cases}$$

where

$$(12) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s} = \frac{\zeta(s)\,L_{d_1}(s)}{\zeta(2s)},$$

$$(13) \quad L_{d_1}(s) = \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/d^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{\infty} \left(\frac{n/d^2}{l}\right) \frac{1}{l^s},$$

and

$$(14) \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^s}.$$

Also[7], we have, by (12) and (13),

$$(15) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s} = \prod_{(d_1 \mid p) \neq -1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \prod_{(d_1,p)=1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

We observe that

$$(16) \quad \varrho_{d_1}(1) = 1, \qquad 0 \leq \varrho_{d_1}(h) \leq d(h),$$

as is evident from (15). These simple facts will be of some importance in the sequel.

5. Final transformation of sum

To lighten the notation, it will be assumed from henceforth that d always satisfies the conditions laid down in Section 2, whether or not these be expressly stated.

[7]) We adopt the convention that $p = 2$ satisfies the condition $(d_1 \mid p) \neq -1$, since $(d_1 \mid 2)$, being undefined, is certainly not equal to -1.

By (11), we have

$$\sum_{\lambda \le \sqrt{n}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} = \sum_{2^\alpha d^2 h \le \sqrt{n}} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \sum_{2^\alpha d^2 \le \sqrt{n}} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}; \tag{17}$$

and, by (12),

$$\sum_{\lambda \le \sqrt{n}} \varrho(\lambda) = \sum_{2^\alpha d^2 \le \sqrt{n}} a_\alpha d \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h). \tag{18}$$

Let $N = N(n) = N(n, \Omega)$ be a number which is to be defined explicitly later. Then, by (4), (10), (16), (17) and (18),

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa(n) &= 4\sqrt{n} \sum_{2^\alpha d^2 \le N} \frac{a^\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} + O\Big(\sum_{2^\alpha d^2 \le N} a_\alpha d \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h) \Big) + \\ &+ O\Big(\sqrt{n} \sum_{N < 2^\alpha d^2 \le \sqrt{n}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d} \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{d(h)}{h} \Big) + O\Big(\sum_{N < 2^\alpha d^2 \le \sqrt{n}} 2^{\frac{1}{2}\alpha} d \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} d(h) \Big) \\ &= 4\sqrt{n} \sum_{2^\alpha d^2 \le N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} + O\Big(\sum_{2^\alpha d^2 \le N} a_\alpha d \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h) \Big) + \\ &+ O\Big(\sqrt{n} \log^2 n \sum_{N < 2^\alpha d^2 \le \sqrt{n}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d} \Big) \\ &= 4\sqrt{n}\, \Sigma_3 + O(\Sigma_4) + O\big(\sqrt{n} \log^2 n\, \Sigma_5\big), \quad \text{say.} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Also let

$$\Sigma_{d_1} = \Sigma_{d_1, n} = \sum_{h \le \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}.$$

Then

$$\Sigma_3 = \sum_{2^\alpha d^2 \le N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \Sigma_{d_1}. \tag{20}$$

Our problem is thus reduced to one concerning the sums $\sum_{h \le y} \varrho_{d_1}(h)/h$ and $\sum_{h \le y} \varrho_{d_1}(h)$, for whose estimation we shall first require two lemmata on characters.

6. Lemmata on characters

LEMMA 1. *If $\chi_{d_1}(l)$ is defined by the equations*

$$\chi_{d_1}(l) = \begin{cases} \left(\frac{n/d^2}{l}\right), & \text{if } 2 \nmid l, \\ 0, & \text{if } 2 \mid l, \end{cases}$$

then $\chi_{d_1}(l)$ is a real character, modulo either $2D\Omega/d$, or $4D\Omega/d$, or $8D\Omega/d$, associated with (or equivalent to) a real primitive non-principal character, modulo either $2D$, or $4D$, or $8D$, respectively.

If $2 \nmid l$, we have

$$\left(\frac{n/d^2}{l}\right) = \left(\frac{2^r D(\Omega/d)^2}{l}\right) = \begin{cases} (2^{r_1} D \mid l), & \text{if } (l, \Omega/d) = 1, \\ 0, & \text{if } (l, \Omega/d) > 1. \end{cases}$$

Also $2^{r_1}D \neq 1$, since n is not a perfect square. Let

$$X(l) = \begin{cases} (2^{r_1}D|l), & \text{if } 2 \nmid l, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$\chi_{d_1}(l) = \begin{cases} X(l), & \text{if } (l, \Omega/d) = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is apparent from DIRICHLET's derivation of his table [8]) that $X(l)$ is a primitive non-principal character, modulo either $2D$, $4D$, or $8D$; the lemma is thus established.

LEMMA 2. *We have, for any positive* x,

$$\sum_{l \leq x} \chi_{d_1}(l) = O\left(\log n \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We have, by an inequality due to PÓLYA [9]),

$$\sum_{h \leq x} X(h) = O\left(\sqrt{D} \cdot \log 2D\right);$$

also, by Lemma 1,

$$\chi_{d_1}(l) = X(l) \sum_{m|(l, \Omega/d)} \mu(m).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq x} \chi_{d_1}(l) = \sum_{l \leq x} X(l) \sum_{\substack{m|l \\ m|(\Omega/d)}} \mu(m) &= \sum_{\substack{m|(\Omega/d) \\ m \leq x}} \mu(m) \sum_{\substack{l \leq x \\ l \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)}} X(l) \\ &= \sum_{\substack{m|(\Omega/d) \\ m \leq x}} \mu(m)\, \chi(m) \sum_{h \leq \frac{x}{m}} X(h) \\ &= O\Big(\sum_{m|(\Omega/d)} \sqrt{D} \log 2D\Big) \\ &= O\left(\sqrt{D}\, d(\Omega) \log 2D\right), \end{aligned}$$

from which the lemma follows, since $D \leq n\Omega^{-2}$ and $d(\Omega) \leq 2\sqrt{\Omega}$.

7. The sums $\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h)/h$ and $\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h)$

LEMMA 3. *If* $x \geq \sqrt{n}\, \Omega^{-\frac{1}{2}}$, *we have*

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{n^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{1}{12}}} \log^2 x\right),$$

where

$$B = \frac{\gamma}{\zeta(2)} - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}.$$

[8]) DIRICHLET, P. G. LEJEUNE: Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 121.

[9]) PÓLYA, G.: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. Göttinger Nachr. **1918**, 21–29.

Firstly, for any $y \geq 1$, we have from (14)

$$
(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sum_{m\leq y}\frac{|\mu(m)|}{m} &= \sum_{h^2k\leq y}\frac{\mu(h)}{h^2k} = \sum_{h\leq\sqrt{y}}\frac{\mu(h)}{h^2}\sum_{k\leq y/h^2}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{h\leq\sqrt{y}}\frac{\mu(h)}{h^2}\left\{\log\left(\frac{y}{h^2}\right)+\gamma+O\left(\frac{h^2}{y}\right)\right\}\\
&= (\log y+\gamma)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mu(h)}{h^2} - 2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mu(h)}{h^2}\log h +\\
&\quad + O\left\{\sum_{h>\sqrt{y}}\frac{1}{h^2}\left[\log\left(\frac{h^2}{y}\right)+\gamma\right]\right\} + O\left\{\frac{1}{y}\sum_{h\leq\sqrt{y}}1\right\}\\
&= \frac{1}{\zeta(2)}\log y + B + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Secondly, we have from (12) and (14)

$$
(22)\qquad \sum_{h\leq x}\frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \sum_{lm\leq x}\frac{\chi_{d_1}(l)\,|\mu(m)|}{lm} = \sum_{l\leq X} + \sum_{l>X} = \Sigma_6 + \Sigma_7, \quad \text{say,}
$$

where X is to be chosen later, but is such that $1 \leq X \leq x$.

Now we have

$$
\Sigma_6 = \sum_{l\leq X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\sum_{m\leq x/l}\frac{|\mu(m)|}{m}.
$$

Therefore, by (21),

$$
(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Sigma_6 &= \sum_{l\leq X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\left\{\frac{1}{\zeta(2)}\log\left(\frac{x}{l}\right)+B+O\left(\sqrt{\frac{l}{x}}\right)\right\}\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\left\{\frac{1}{\zeta(2)}\log\left(\frac{x}{l}\right)+B\right\} -\\
&\quad - \sum_{l>X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\left\{\frac{1}{\zeta(2)}\log\left(\frac{x}{l}\right)+B\right\} + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right)\\
&= \left(\frac{1}{\zeta(2)}\log x + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\log 2x\left|\sum_{l>X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\right|\right) +\\
&\quad + O\left(\left|\sum_{l>X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\log l\right|\right) + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right),
\end{aligned}\right.
$$

the convergence of the infinite series above being known from the work of DIRICHLET himself[10]). Let

$$
s_y = \sum_{l\leq y}\chi_{d_1}(l).
$$

[10]) The convergence is of course easily proved by a slight modification of the ensuing argument.

Then

$$(24)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{l>X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l} = \sum_{l>X}\frac{1}{l}(s_l - s_{l-1}) \\ \qquad = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{s_m}{m+1} - \frac{s_{[X]}}{[X+1]} + \sum_{X<l\le m}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)s_l\right\} \\ \qquad = O\left(\frac{\log x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right), \end{cases}$$

by Lemma 2. Similarly

$$(25)\qquad \sum_{l>X}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}\log l = O\left(\frac{\log^2 x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We deduce from (23), (24) and (25)

$$(26)\quad \Sigma_6 = \left(\frac{1}{\zeta(2)}\log x + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{\log^2 x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right).$$

The conditions of summation in Σ_7 imply that $m < x/X$. Therefore

$$\Sigma_7 = \sum_{m<x/X}\frac{|\mu(m)|}{m}\sum_{X<l\le x/m}\frac{\chi_{d_1}(l)}{l}.$$

By a method similar to that used to derive (24), we can shew that the inner sum is

$$O\left(\frac{\log x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

Therefore

$$(27)\qquad \Sigma_7 = O\left(\frac{\log x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\sum_{m<x/X}\frac{1}{m}\right) = O\left(\frac{\log^2 x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We have now, by (22), (26) and (27),

$$\sum_{h\le x}\frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)}\log x + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{\log^2 x}{X}\sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right).$$

If X is chosen so that

$$X^{-1}\sqrt{(n/\Omega)} = \sqrt{(X/x)},$$

then

$$X = x^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\Omega^{-\frac{1}{3}};$$

consequently

$$X/x = \left(\sqrt{n}\,\Omega^{-\frac{1}{2}}x^{-1}\right)^{\frac{2}{3}} < 1,$$

and the condition $1 \le X \le x$ is satisfied. Therefore

$$\sum_{h\le x}\frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)}\log x + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}\Omega^{\frac{1}{4}}}\log^2 x\right).$$

With a little care, it would be possible by this method to obtain a slightly improved version of Lemma 3. The resulting formula, however, would still not be sufficiently accurate to estimate Σ_{d_1} in all cases, and would not enable us to abbreviate the subsequent procedure.

LEMMA 4. *If* $x \geq 1$, *we have*

$$\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h) = O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

Let l_1 denote, generally, either 1 or numbers composed entirely of prime factors p such that $(d_1|p) = 1$; let l_2, m_1, m_2 be defined similarly, except that the condition $(d_1|p) = 1$ be replaced by $(d_1|p) \neq -1$, $(d_1|p) \neq 1$, $(d_1|p) = -1$, respectively[7]). Then, by (15),

$$\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h) \leq \sum_{l_1 l_2 \leq x} 1 \leq \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq x \\ l_1 \leq \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq x \\ l_2 \leq \sqrt{x}}} 1 = \Sigma_8 + \Sigma_9, \quad \text{say.} \tag{28}$$

We have

$$\Sigma_8 = \sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{l_2 \leq x/l_1} 1 = \sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \Sigma_{l_1}, \quad \text{say.}$$

We can find an upper bound for Σ_{l_1} by SELBERG's sieve method[11]). Any number l_2 belongs to the set of numbers that remain, after all multiples of primes p such that $(d_1|p) = -1$ have been removed from the natural numbers. Now let z be an arbitrary positive number, and λ_{m_2} a sequence such that

$$\lambda_{m_2} \text{ is } \begin{cases} 1, & \text{if } m_2 = 1, \\ \text{arbitrary}, & \text{if } 1 < m_2 \leq z, \\ 0, & \text{if } m_2 > z. \end{cases}$$

Then plainly

$$\Sigma_{l_1} \leq \sum_{h \leq x/l_1} \left(\sum_{m_2 | h} \lambda_{m_2}\right)^2,$$

and, by a straightforward modification of SELBERG's argument, we obtain the following analogue of his formula [3][12]):

$$\Sigma_{l_1} \leq \left(\frac{x}{l_1}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2 \leq z} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)}\right) + \sum_{m_2', m_2'' \leq z} |\lambda_{m_2'} \lambda_{m_2''} R_{[m_2', m_2'']}|,$$

where

$$R_{[m_2', m_2'']} = O(1)$$

and

$$\lambda_{m_2} = \mu(m_2) \prod_{p | m_2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{\substack{m_2''' \leq z/m_2 \\ (m_2''', m_2) = 1}} \frac{\mu^2(m_2''')}{\varphi(m_2''')}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2'''' \leq z} \frac{\mu^2(m_2'''')}{\varphi(m_2'''')}\right)$$

$$= O(\log \log 10 m_2).$$

---

[11]) SELBERG, A.: On an elementary method in the theory of primes. Det Kong. Norske Vidensk. Selsk. Forh., Trondhjem **19**, No. 18 (1947).

[12]) m_2', m_2'', etc., have the same signification as m_2.

Hence, choosing $z=(x/l_1)^{\frac{1}{3}}$, we have

$$\Sigma_{l_1} \leq \left(\frac{x}{l_1}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2 \leq (x/l_1)^{\frac{1}{3}}} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)}\right) + O\left\{\left(\frac{x}{l_1}\right)^{\frac{2}{3}} (\log\log 10x)^2\right\}$$

$$= O\left\{\left(\frac{x}{l_1}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)}\right)\right\}.$$

Therefore

$$\Sigma_8 = O\left\{x\left(\sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l_1}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu^2(m_2)}{m_2}\right)\right\}$$

$$= O\left\{x\left(\sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l_1} \sum_{l_2 \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{l_2}\right) \Big/ \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu^2(m_2)}{m_2} \sum_{l_2 \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu^2(l_2)}{l_2}\right)\right\}$$

$$= O\left\{x\left(\sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2}\right) \Big/ \left(\sum_{m \leq x^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu^2(m)}{m}\right)\right\}$$

$$= O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2}\right).$$

It is clear from (15) that

$$\sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2} \leq \zeta(2) \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h},$$

and so

$$\Sigma_8 = O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

It can be proved similarly that Σ_9 satisfies the same inequality as Σ_8. The lemma then follows from (28).

LEMMA 5. *If* $\sqrt{n}\log^{-36} n \leq x \leq \sqrt{n}$, *we have*

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

Let $x_i = \sqrt{n}\log^{t_i} n$, where t_1 and t_2 are fixed numbers satisfying the inequalities $9 < t_1 < t_2 < 10$. Then, by Lemma 3,

$$(29)_i \quad \sum_{h \leq x_i} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_i + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} + O\left\{\frac{1}{\log n}\right\}.$$

Since from (16) the left-hand side of $(29)_2$ is at least 1, we conclude that

$$(30) \quad \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_2 + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

Also, subtracting $(29)_1$ from $(29)_2$, we have

$$(31) \quad \sum_{x_1 < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \frac{1}{\zeta(2)} (t_2 - t_1) L_{d_1}(1) \log\log n + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Now, for $x \leq y \leq x_2$, Lemma 4 gives

$$\sum_{h \leq y} \varrho_{d_1}(h) = O\left(\frac{y}{\log n} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right),$$

from which we deduce by partial summation

$$(32) \qquad \sum_{x < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = O\left(\frac{1}{\log n} \log\left\{\frac{x_2}{x}\right\} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right) = O\left(\frac{\log\log n}{\log n} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

Therefore

$$(33) \qquad \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h},$$

and

$$(34) \qquad \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}.$$

We obtain from (32) and (34)

$$\sum_{x_1 < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} \leq \sum_{x < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = O\left(\frac{\log\log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right),$$

and from this and (31)

$$(35) \qquad \log\log n\, L_{d_1}(1) = O\left(\frac{\log\log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

We have, by (30) and (33),

$$\begin{aligned}\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} &= \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_2 + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\zeta(2)} \log\left(\frac{x_2}{x}\right) L_{d_1}(1)\right\},\end{aligned}$$

and, by this and (35),

$$\begin{aligned}\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} &= \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} + \\ &\qquad + O\left\{\frac{\log\log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right\},\end{aligned}$$

from which the lemma follows.

8. The final theorem

We are now in a position to complete the proof of the main result. We define the number N, introduced in Section 5, by $N = \Omega^{\frac{1}{2}} \log^6 n$.

Since $\sqrt{n}/N > n^{\frac{1}{4}} \log^{-6} n$, we have

$$(36) \qquad \Sigma_4 = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n} \Sigma_3\right),$$

by (19) and Lemma 4.

In order to estimate Σ_3, it will first be shewn that

$$(37)\qquad \Sigma_{d_1} = \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)}\log\frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1)\right\}.$$

We must consider two cases, distinguished by whether Ω be small or large. Suppose first that $\Omega \leq \log^{90} n$. Then the conditions of summation in Σ_4 imply that

$$\sqrt{n}/2^\alpha d^2 \geq \sqrt{n}/N = \sqrt{n}\,\Omega^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n \geq \sqrt{n}\log^{-36} n,$$

and (37) follows from Lemma 5. Suppose secondly that $\Omega > \log^{90} n$. Then we have that

$$\sqrt{n}/2^\alpha d^2 \geq \sqrt{n}/N = \sqrt{n}\,\Omega^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n = \sqrt{n}\,\Omega^{-\frac{1}{2}}(\Omega^{\frac{1}{6}}\log^{-6} n) > \sqrt{n}\,\Omega^{-\frac{1}{2}}\log^{9} n,$$

and so, by Lemma 3,

$$(38)\qquad \begin{cases} \Sigma_{d_1} = \left(\dfrac{1}{\zeta(2)}\log\dfrac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right)L_{d_1}(1) + \dfrac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\dfrac{N^{\frac{1}{2}}}{\Omega^{\frac{1}{2}}}\log^2 n\right) \\ \qquad = \left(\dfrac{1}{\zeta(2)}\log\dfrac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right)L_{d_1}(1) + \dfrac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1) + O\left(\dfrac{1}{\log n}\right), \end{cases}$$

since $N^{\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}\log^2 n = \Omega^{-\frac{1}{18}}\log^4 n < \log^{-1} n$. Equation (37) now follows from (38), because Σ_{d_1} is at least 1.

As Σ_{d_1} is positive, we deduce from (19), (20) and (37)

$$(39)\qquad \begin{cases} \Sigma_3 = \left\{1 + O\left(\dfrac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \times \\ \qquad\qquad \times \displaystyle\sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)}\log\frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1)\right\}. \end{cases}$$

But, since[13] $L_{d_1}(1) = O(\log n)$ and $L'_{d_1}(1) = O(\log^2 n)$, we have from (10)

$$(40)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{2^\alpha d^2 > N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d}\left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)}\log\frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right)L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)}L'_{d_1}(1)\right\} \\ \qquad = O\left(\displaystyle\sum_{2^\alpha d^2 > N} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d}(\log^2 n + \alpha\log n)\right) \\ \qquad = O\left(\displaystyle\sum_{d \mid \Omega} \frac{1}{d} \sum_{2^\alpha > N/d^2} \frac{\log^2 n + \alpha\log n}{2^{\frac{1}{2}\alpha}}\right) \\ \qquad = O\left(\displaystyle\sum_{d \mid \Omega} \frac{1}{d}\left[\frac{d\log^2 n}{\sqrt{N}} + \frac{d\log n\,(1 + |\log^2(N/d^2)|)}{\sqrt{N}}\right]\right) \\ \qquad = O\left(\dfrac{d(\Omega)\log^2 n}{\sqrt{N}}\right) = O\left(\dfrac{d(\Omega)}{\Omega^{\frac{1}{2}}\log n}\right) = O\left(\dfrac{1}{\log n}\right). \end{cases}$$

[13] See, for example, ESTERMANN, T.: Introduction to Modern Prime Number Theory. Cambridge Mathematical Tract, Theorems 36 and 46.

Therefore, since Σ_3 is at least 1, we have from (39) and (40)

$$(41)\quad \Sigma_3 = \left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ d^2 \mid n;\ (d,2)=1}}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

We have, by (19) and the argument used to derive (40),

$$\Sigma_5 = O\left(\sum_{2^\alpha d^2 > N} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d}\right) = O\left(\frac{1}{\log^3 n}\right).$$

Therefore

$$(42)\qquad \Sigma_5 = O\left(\frac{1}{\log^3 n}\, \Sigma_3\right).$$

We deduce finally from (19), (36), (41) and (42)

$$\varkappa(n) = 4\sqrt{n}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ d^2 \mid n;\ (d,2)=1}}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

But the sum on the right-hand side of the above equation is equal to

$$\sum_{d^2 \mid n;\ (d,2)=1} \left[\left(\frac{d}{d^2}\left(\log\sqrt{n} + \gamma\right) \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha}\right) + \left(-\frac{d \log d^2}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha}\right) + \right.$$

$$+ \left(-\frac{d}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha \log 2^\alpha}{2^\alpha}\right) +$$

$$\left. + \left(-\frac{d}{d^2} \frac{2\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{d}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha}\right)\right].$$

We have thus proved the following result.

THEOREM. *For any positive integer n that is not a perfect square, let $\varkappa(n)$ be the number of representations of n in the form*

$$n = \lambda\mu + \nu^2,$$

or, what is equivalent, let $\varkappa(n)$ be the sum

$$\sum_{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n}} d(n - \nu^2).$$

Then, as $n \to \infty$, we have

$$\varkappa(n) = 4\sqrt{n}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\log\sqrt{n} + \gamma\right) f_n(1) + f'_n(1)\right\},$$

where

$$f_n(s) = \frac{K(s)}{\zeta(2s)} \sum_{d^2 \mid n;\ (d,2)=1} \frac{d}{d^{2s}}\, L_{(n/d^2)}(s).$$

Corpus Christi College, Cambridge, England

(Eingegangen am 4. September 1957)

NARAIN, R.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 228–233 (1958)

On a Generalized Laplace Transform

By
ROOP NARAIN

1. A generalization of the classical Laplace transform

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

has been given by VARMA ([1], p. 209) in the form

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, f(t)\,dt \tag{1.2}$$

which reduces to (1.1) on putting $k+m=\frac{1}{2}$. We denote (1.2) symbolically by

$$\varphi(s:k,m) = W[f(t);k,m]$$

and (1.1) is, as usually, denoted by

$$\varphi(s) \doteqdot f(t).$$

In this paper we have established certain properties of the generalized Laplace transform which help us in obtaining integral representations of generalized Laplace transforms of some functions. The results have been obtained by utilizing the integral representations of the Whittaker function.

2. THEOREM 1. *If*

$$W[t^\sigma f(t);k,m] = \varphi(s:k,m;\sigma),$$

then

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(s:k,m;\sigma) = {}& \frac{s^{k+m-\lambda-\mu+1}}{\Gamma(2\lambda-2k)}\int_0^\infty y^{2\lambda-2k-1}(y+s)^{-1}\times\\ & \times {}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda+\mu-k\pm m\\ 2\lambda-2k\end{matrix};\ -\frac{y}{s}\right\}\varphi(y+s:\lambda,\mu;\sigma+\lambda-\mu-k+m)\,dy,\end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

provided[1] $R(s)\geqq s_0>0$, $R(\lambda-k)>0$, *the generalized Laplace transform of* $|t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m}f(t)|$ *exists and the integral in* (2.1) *is absolutely convergent.*

Proof. We have ([2], p. 440)

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^{\lambda-k}e^{\frac{1}{2}z}}{\Gamma(2\lambda-2k)}\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}zv}\,W_{\lambda,\mu}(zv)\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda-k+\mu\pm m\\ 2\lambda-2k\end{matrix};\ 1-v\right\}\times$$
$$\times(v-1)^{2\lambda-2k-1}v^{\mu-\frac{1}{2}}\,dv,\quad z\neq 0,\ |\arg z|<\pi/2\ \text{ and }\ R(\lambda-k)>0.$$

[1]) For the sake of brevity ${}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots\\ \gamma_1\pm\delta_1,\gamma_2\pm\delta_2,\cdots\end{matrix};\ z\right\}$ has been employed to denote ${}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1+\beta_1,\alpha_1-\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_2-\beta_2,\cdots\\ \gamma_1+\delta_1,\gamma_1-\delta_1,\gamma_2+\delta_2,\gamma_2-\delta_2,\cdots\end{matrix};\ z\right\}$ and $\Gamma_*(\alpha\pm\beta)$ to denote $\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-\beta)$.

Replacing z by st, substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s:k,m;\sigma)=s\int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}st}W_{k,m}(st)\,t^{\sigma}f(t)\,dt$$

and changing the order of integration, we have

$$\varphi(s:k,m;\sigma)=\frac{s^{\lambda-\mu-k+m+1}}{\Gamma(2\lambda-2k)}\int_1^\infty (v-1)^{2\lambda-2k-1}\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda-k+\mu\pm m\\ 2\lambda-2k\end{matrix};\ 1-v\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty (stv)^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}stv}W_{\lambda,\mu}(stv)\,t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m}f(t)\,dt\,dv$$

$$=\frac{s^{\lambda-\mu-k+m}}{\Gamma(2\lambda-2k)}\int_1^\infty (v-1)^{2\lambda-2k-1}\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\lambda-k+\mu\pm m\\ 2\lambda-2k\end{matrix};\ 1-v\right\}\times$$

$$\times\,\varphi\left(sv:\lambda,\mu;\sigma+\lambda-\mu-k+m\right)\frac{dv}{v}.$$

Putting $v=1+\frac{y}{s}$, we get the result.

Regarding the change of order of integration, we observe that the v-integral is absolutely and uniformly convergent if $R(s)\geqq s_0>0$ and $R(\lambda-k)>0$, the t-integral is absolutely and uniformly convergent if the generalized Laplace transform of $|t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m}f(t)|$ exists and the absolute convergence of the repeated integral follows from that of the integral in (2.1). Hence, the change of order of integration is justified by de la Vallee Poussin's theorem ([3], p. 504).

2.1. COROLLARIES.

(i) Putting $\sigma=0$, $\lambda=k+\varrho$ and $\mu=m+\varrho$ in the theorem, the hypergeometric function ${}_2F_1$ reduces to $\left(1+\frac{y}{s}\right)^{-2\varrho-2m}$, and we have:

If $W[f(t);k,m)=\varphi(s:k,m)$, *then*

$$\varphi(s:k,m)=\frac{s^{2m+1}}{\Gamma(2\varrho)}\int_0^\infty y^{2\varrho-1}(y+s)^{-2\varrho-2m-1}\,\varphi(y+s:k+\varrho,m+\varrho)\,dy,\tag{2.2}$$

provided $R(s)\geqq s_0>0$, $R(\varrho)>0$, *the generalized Laplace transform of* $|f(t)|$ *exists and the integral in* (2.2) *is absolutely convergent.*

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $2\lambda-2k=\varrho$, the theorem reduces to a known result on Laplace transform ([4], p. 33):

If $t^{\sigma}f(t)\doteqdot\psi(s;\sigma)$, *then*

$$\psi(s;\sigma)=\frac{s}{\Gamma(\varrho)}\int_0^\infty \frac{y^{\varrho-1}}{y+s}\,\psi(y+s;\sigma+\varrho)\,dy,\tag{2.3}$$

provided $R(s)\geqq s_0>0$, $R(\varrho)>0$, *the Laplace transform of* $|t^{\sigma+\varrho}f(t)|$ *exists and the integral in* (2.3) *is absolutely convergent.*

2.2. EXAMPLES.

(i) Let $f(t)=_{p-2}F_{q-1}\left\{\begin{matrix}\alpha_3,\ldots,\alpha_p\\ \beta_2,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -t\right\}$, so that ([5], p. 383)

$$\varphi(s:k,m;\sigma)=\frac{\Gamma_*(\sigma+1+m\pm m)}{\Gamma(\sigma+\frac{3}{2}+m-k)}\,s^{-\sigma}\,{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\sigma+1+m\pm m,\alpha_3,\ldots,\alpha_p\\ \sigma+\frac{3}{2}+m-k,\beta_2,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -\frac{1}{s}\right\},$$

$R(\sigma+1+m\pm m)>0$, $R(s)>0$ if $p<q+1$, with an additional condition $|s|>1$ if $p=q+1$.

Using this in Theorem 1 and replacing $\sigma+1$ by α_1, $\sigma+1+2m$ by α_2, $\sigma+\frac{3}{2}+m-k$ by β_1, $\sigma+\lambda+\mu-k+m+1$ by α_1' and $\sigma+\lambda-\mu-k+m+1$ by α_2', we get

$$(2.4)\quad \left\{\begin{aligned}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -\frac{1}{s}\right\}&=\frac{\Gamma(\alpha_1')\,\Gamma(\alpha_2')\,s^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha'}}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_1'+\alpha_2'-\alpha_1-\alpha_2)}\int_0^\infty\frac{y^{\alpha_2'+\alpha_2'-\alpha_1-\alpha_2-1}}{(y+s)^{\alpha_2'}}\times\\ &\times{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\alpha_1'-\alpha_1,\ \alpha_1'-\alpha_2\\ \alpha_1'+\alpha_2'-\alpha_1-\alpha_2\end{matrix};\ -\frac{y}{s}\right\}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -\frac{1}{y+s}\right\}dy,\end{aligned}\right.$$

$R(\alpha_2'+\alpha_2)>R(\alpha_1)>0$, $R(\alpha_2'+\alpha_1')>R(\alpha_1+\alpha_2)$, $R(\alpha_2)>0$, $R(\alpha_2')>0$ and $R(s)>0$ if $p<q+1$, with an additional condition $|s|>1$ if $p=q+1$.

If in (2.4) we put $\alpha_2'=\alpha_2$, it reduces to

$$(2.5)\quad \left\{\begin{aligned}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -\frac{1}{s}\right\}&=\frac{\Gamma(\alpha_1')\,s^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_1'-\alpha_1)}\int_0^\infty\frac{y^{\alpha_1'-\alpha_1-1}}{(y+s)^{\alpha_1'}}\times\\ &\times{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1',\alpha_2,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix};\ -\frac{1}{y+s}\right\}dy,\end{aligned}\right.$$

under similar conditions as in (2.4).

As the generalized hypergeometric function is symmetrical in the α's, p different formulae similar to (2.5) can be obtained.

(ii) Let $f(t)=(1+t)^{-\beta}$, so that ([5], p. 384)

$$\varphi(s:k,m;\sigma)=\frac{s^{-\sigma}}{\Gamma(\beta)}\,E\left(\beta,\sigma+1,\sigma+1+2m:\sigma+\frac{3}{2}+m-k:s\right),$$
$$R(\sigma+1+m\pm m)>0\quad\text{and}\quad R(s)>0.$$

Using this in Theorem 1 and replacing $\sigma+1$ by γ, $\sigma+1+2m$ by δ, $\sigma+\frac{3}{2}+m-k$ by ε, $\sigma+\lambda+\mu-k+m+1$ by γ' and $\sigma+\lambda-\mu-k+m+1$ by δ', we get

$$E(\beta,\gamma,\delta:\varepsilon:s)$$
$$=\frac{s^{\gamma+\delta-\gamma'}}{\Gamma(\gamma'+\delta'-\gamma-\delta)}\int_0^\infty\frac{y^{\gamma'+\delta'-\gamma-\delta-1}}{(y+s)^{\delta'}}\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}\gamma'-\gamma,\gamma'-\delta\\ \gamma'+\delta'-\gamma-\delta\end{matrix};\ -\frac{y}{s}\right\}E(\beta,\gamma',\delta':\varepsilon:y+s)\,dy,$$

$R(\gamma'+\delta')>R(\gamma+\delta)$, $R(\gamma'+\delta)>R(\gamma)>0$, $R(\delta)>0$ and $R(s)>0$.

3. THEOREM 2. *If*

$$W\left[t^\sigma f(t);k,m\right]=\varphi(s:k,m;\sigma)$$

and

$$W[t^{\sigma} e^{yt} f(t); k, m] = \varphi(s : y : k, m; \sigma),$$

then

$$(3.1)\quad \begin{cases} \varphi(s : k, m; \sigma) = \dfrac{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu)\, s^{1+m-\lambda-\mu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)\, \Gamma(2\lambda)} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y^{2\lambda-1}}{y+s} \times \\ \qquad \times {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \lambda + \mu \pm m \\ 2\lambda \end{matrix};\ -\frac{y}{s} \right\} \varphi(y+s : y : k-\lambda, \mu; \sigma + \lambda - \mu + m)\, dy, \end{cases}$$

provided $R(\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$, $R(\sigma + \lambda + 1 + \alpha + m \pm \mu) > 0$, *where* $f(t) = O(t^{\alpha})$ *for small* t, $t^{\sigma+k+m-\frac{1}{2}} e^{-st} f(t)$ *tends to zero as* t *tends to infinity for* $R(s) \geqq s_0 > 0$ *and the integral in* (3.1) *is absolutely convergent.*

Proof. We have ([6], p. 601)

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}z} \Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu)}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)\, \Gamma(2\lambda)} \int_1^{\infty} e^{\frac{1}{2}zv} W_{k-\lambda,\mu}(zv) \times$$

$$\times {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \lambda + \mu \pm m \\ 2\lambda \end{matrix};\ 1 - v \right\} (v-1)^{2\lambda-1} v^{\mu-\frac{1}{2}}\, dv,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \tfrac{3}{2}\pi, \quad R\left(\frac{1}{2} - k \pm m\right) > 0 \quad \text{and} \quad R(\lambda) > 0.$$

Replacing in this z by st and v by $1 + \frac{y}{s}$, substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s : k, m; \sigma) = s \int_0^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, t^{\sigma} f(t)\, dt$$

and changing the order of integration, which can easily be seen to be permissible under the conditions stated in the theorem, we get

$$\varphi(s : k, m; \sigma) = \frac{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu)\, s^{1+m-\lambda-\mu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)\, \Gamma(2\lambda)} \int_0^{\infty} y^{2\lambda-1} {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \lambda + \mu \pm m \\ 2\lambda \end{matrix};\ -\frac{y}{s} \right\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \{(y+s)t\}^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y+s)t} W_{k-\lambda,\mu}\{(y+s)t\}\, t^{\sigma+\lambda+m-\mu} e^{yt} f(t)\, dt\, dy.$$

This is equivalent to (3.1).

3.1. COROLLARY. Putting $\mu = m + \lambda$, the theorem reduces to the following result:

If

$$W[f(t); k, m] = \varphi(s : k, m)$$

and

$$W[e^{yt} f(t); k, m] = \varphi(s : y : k, m),$$

then

$$(3.2)\quad \varphi(s : k, m) = \frac{s^{1+2m}}{\mathsf{B}(2\lambda, \frac{1}{2} - k + m)} \int_0^{\infty} \frac{y^{2\lambda-1}}{(y+s)^{2\lambda+2m+1}}\, \varphi(y+s : y : k-\lambda, m+\lambda)\, dy,$$

provided $R(\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$, $R(\alpha + 1 + 2\lambda + 2m) > 0$, $R(\alpha + 1) > 0$, *where* $f(t) = O(t^{\alpha})$ *for small* t, $t^{k+m-\frac{1}{2}} e^{-st} f(t)$ *tends to zero as* t *tends to infinity*

for $R(s) \geqq s_0 > 0$ and the integral in (3.2) converges absolutely, $\mathsf{B}(2\lambda, \frac{1}{2} - k + m)$ denoting the Beta-function.

4. THEOREM 3. *If $W[f(t); k, m] = \varphi(s : k, m)$, then*

$$(4.1)\quad \left\{ \varphi(s : k, m) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}} s^{1+m}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta} \times \right.$$
$$\left. \times\, {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2} m \\ \alpha+\beta \end{matrix};\ 1-u^2 \right\} g\left(\tfrac{1}{4} s^2 u^2\right) du, \right.$$

where

$$(4.2)\qquad g(x) = \int_0^\infty t^m f(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(x t^2 \Big| \begin{matrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \end{matrix} \right) dt,$$

provided $R(s) \geqq s_0 > 0$, $R(\alpha+\beta) > 0$ and the integrals in (4.1) and (4.2) are absolutely convergent.

PROOF. We have ([6], p. 602)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0}\left(\tfrac{1}{4} z^2 u^2 \Big| \begin{matrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \end{matrix} \right) \times$$
$$\times\, {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2} m \\ \alpha+\beta \end{matrix};\ 1-u^2 \right\} (u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta}\, du,$$
$$z \neq 0,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad R(\alpha+\beta) > 0.$$

Replacing z by st, substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s : k, m) = s \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} st} W_{k,m}(st)\, f(t)\, dt$$

and changing the order of integration, which can easily be seen to be justified as in Theorem 1, we obtain the result.

4.1. COROLLARY. Putting $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k$ and $\beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k$ and using

$$G_{0,2}^{2,0}\left(x t^2 \Big| \begin{matrix} \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m \end{matrix} \right) = 2 K_m(2t\sqrt{x}),$$

we obtain the following as a particular case of Theorem 3.

If $W[f(t); k, m] = \varphi(s : k, m)$, then

$$\varphi(s : k, m) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}} s^{1+m}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-k)} \int_1^\infty (u^2-1)^{-k} u^{k-\frac{1}{2}}\, {}_2F_1\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \pm \frac{1}{2} m \\ 1-k \end{matrix};\ 1-u^2 \right\} g\left(\tfrac{1}{4} s^2 u^2\right) du,$$

where

$$g(x) = 2\sqrt{x} \int_0^\infty t^{m+1} K_m\left(2t\sqrt{x}\right) f(t)\, dt,$$

provided $R(s) \geqq s_0 > 0$, $R(1-k) > 0$ and the integrals involved are absolutely convergent.

4.2. EXAMPLE. Let in Theorem 3, $f(t) = t^{1-\nu-m} J_\nu(pt)$, then ([7], p. 277)

$$g(x) = \int_0^\infty t^{1-\nu} J_\nu(pt)\, G_{2,4}^{4,0}\left(xt^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{2}k, \frac{1}{4}-\frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m \end{matrix}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p\right)^{\nu-1} G_{4,4}^{4,1}\left(\frac{4x}{p^2} \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \nu, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}k, \frac{1}{4}-\frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m \end{matrix}\right),$$

$$R(\alpha+1), > 0 \quad R(\beta+1) > 0 \quad \text{and} \quad R(1 \pm m) > 0.$$

Also ([8]),

$$\varphi(s : k, m) = \frac{(\frac{1}{2}p)^\nu \Gamma_*(2 \pm m)}{s^{1-m}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{5}{2}-k)}\, {}_4F_3\left\{\begin{matrix} 1 \pm \frac{1}{2}m, \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}m \\ \nu+1, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{4} \end{matrix}; -\frac{p^2}{s^2}\right\},$$

$$R(2 \pm m) > 0, \quad R(s) > 0 \quad \text{and} \quad |s| > |p|.$$

Hence from Theorem 3, we obtain

$$\int_1^\infty (u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta}\, {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2}m \\ \alpha+\beta \end{matrix}; 1-u^2\right\} G_{4,4}^{4,1}\left(\frac{s^2u^2}{p^2} \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \nu, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}k, \frac{1}{4}-\frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m \end{matrix}\right) du$$

$$= \frac{p\sqrt{\pi}\,\Gamma_*(2 \pm m)\,\Gamma(\alpha+\beta)}{2^{k+\frac{3}{2}} s^2 \Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{5}{2}-k)}\, {}_4F_3\left\{\begin{matrix} 1 \pm \frac{1}{2}m, \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}m \\ \nu+1, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{4} \end{matrix}; -\frac{p^2}{s^2}\right\},$$

$R(\alpha+1) > 0$, $R(\beta+1) > 0$, $R(\alpha+\beta) > 0$, $R(2 \pm m) > 0$, $R(s) > 0$ and $|s| > |p|$.

References

[1] VARMA, R. S.: On a generalization of Laplace transform. Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sec. A **20**, 209–216 (1951). – [2] MEIJER, C. S.: Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen und ihre Produkte. I. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam **44**, 435–441 (1941). – [3] BROMWICH, T. J. I'a.: An introduction to the theory of infinite series. London (1931). – [4] TEWARI, N. D.: A theorem in operational calculus. Proc. Benares Math. Soc. **5**, 33–36 (1943). – [5] RATHIE, C. B.: Some properties of generalized Laplace transform. Proc. Nat. Inst. Sci. India A **21**, 382–393 (1955). – [6] MEIJER, C. S.: Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen und ihre Produkte. II. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam **44**, 599–605 (1941). – [7] NARAIN, R.: Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function. Math. Z. **68**, 272–281 (1957). – [8] NARAIN, R.: Certain rules of generalized Laplace transform. Ganita **8**, No. 1 (1957).

Dept. of Math. and Astr., University of Lucknow, Lucknow (India)

(Eingegangen am 24. September 1957)

MACROBERT, T. M.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 234–236 (1958)

Integrals Involving *E*-Functions

By

T. M. MACROBERT

§ 1. Introductory. An integral involving an E-function[1]), in which the argument of the E-function contains a factor $\lambda^{-m}(1-\lambda)^{-n}$, where λ is the variable of integration and m and n are positive integers, is evaluated in § 2. In § 3 the value of the corresponding integral, when m and n are replaced by $-m$ and $-n$, is deduced, two different forms of the integral being obtained.

The following formula will be required.

If $p \geqq q+1$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z) &= \pi^{p-q-1}\sum_{r=1}^{p}\prod_{s=1}^{q}\sin(\varrho_s-\alpha_r)\,\pi\prod_{t=1}^{p}{}'\operatorname{cosec}(\alpha_t-\alpha_r)\,\pi\times \\ &\quad\times z^{\alpha_r}E\left\{\begin{matrix}\alpha_r,\ \alpha_r-\varrho_1+1,\ \ldots,\ \alpha_r-\varrho_q+1 : \dfrac{e^{\pm i\pi(p-q-1)}}{z}\\ \alpha_r-\alpha_1+1,\ \ldots\ *\ \ldots,\ \alpha_r-\alpha_p+1\end{matrix}\right\},\end{aligned}\right.$$

where the dash indicates that the factor $\operatorname{cosec}(\alpha_r-\alpha_r)\pi$ does not occur, and the asterisk that the parameter $\alpha_r-\alpha_r+1$ is omitted.

§ 2. First Integral. The formula to be proved is

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\beta-1}E\{p;\alpha_r:q;\varrho_s:z\,\lambda^{-m}(1-\lambda)^{-n}\}\,d\lambda \\ &\qquad = \sqrt{(2\pi)}\,m^{\alpha-\frac{1}{2}}n^{\beta-\frac{1}{2}}(m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta}\times \\ &\qquad\qquad \times E\{p+m+n;\alpha_r:q+m+n;\varrho_s:z\,m^{-m}n^{-n}(m+n)^{m+n}\},\end{aligned}\right.$$

where m and n are positive integers, $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$; $\alpha_{p+1+\nu}=(\alpha+\nu)/m$, $\nu=0,1,2,\ldots,m-1$; $\alpha_{p+m+1+\nu}=(\beta+\nu)/n$, $\nu=0,1,2,\ldots,n-1$; $\varrho_{q+1+\nu}=(\alpha+\beta+\nu)/(m+n)$, $\nu=0,1,2,\ldots,m+n-1$.

To prove this, start with the case $p=q=0$, noting that

$$(3)\qquad E\{::z\,\lambda^{-m}(1-\lambda)^{-n}\}=\exp\{-\lambda^m(1-\lambda)^n/z\},$$

expand the exponential function in powers of $1/z$, and integrate term by term. Then the integral is equal to

$$B(\alpha,\beta)\,F\{\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{p+m+n};\varrho_{q+1},\ldots,\varrho_{q+m+n};-m^m n^n(m+n)^{-m-n}/z\},$$

[1]) An account of the E-functions will be found in the author's *Functions of a complex Variable*, 4th edition.

and, on applying the formula

$$\Gamma(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m} m^{z-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{m}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right), \tag{4}$$

where m is a positive integer, it follows that the integral is equal to

$$\begin{cases} \sqrt{(2\pi)}\, m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\ \quad - \times E\{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m+n} : \varrho_{q+1}, \dots, \varrho_{q+m+n} : z\, m^{-m} n^{-n} (m+n)^{m+n}\}. \end{cases} \tag{5}$$

Formula (2) then follows by an inductive argument.

In order to increase p by unity replace z by z/t, and then apply the formula

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/t)\, dt = E(p+1; \alpha_r : q; \varrho_s : z), \tag{6}$$

where $R(\alpha_{p+1}) > 0$. This restriction may, in some cases, be removed by analytical continuation.

In order to increase q by unity replace z by ζz and apply the formula

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{\zeta} \zeta^{-\varrho_{q+1}} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : \zeta z)\, d\zeta = E(p; \alpha_r : q+1; \varrho_s : z), \tag{6'}$$

where the contour of integration starts at $-\infty$ on the ξ-axis, passes round the origin in the positive direction and returns to $-\infty$ on the ξ-axis, the initial and final values of amp ζ being $-\pi$ and π respectively.

These operations can be repeated an arbitrary number of times.

§ 3. Second Integral. From formula (2) the following result can be derived.

If $p \geq q+1$, and if $R(\alpha + m\alpha_r) > 0$, $R(\beta + n\alpha_r) > 0$, $r = 1, 2, \dots, p$, where m and n are positive integers,

$$\begin{cases} \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\beta-1} E\{p; \alpha_r : q; \varrho_s : z\, \lambda^m (1-\lambda)^n\}\, d\lambda \\ \quad = \pi^{p-q-1} \sqrt{(2\pi)}\, m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\ \times \sum_{r=1}^{p} \prod_{s=1}^{q} \sin(\varrho_s - \alpha_r)\pi \prod_{t=1}^{p}{}' \operatorname{cosec}(\alpha_t - \alpha_r)\pi\, m^{m\alpha_r} n^{n\alpha_r} (m+n)^{-(m+n)\alpha_r} \times \\ \times z^{\alpha_r} E\left\{ \begin{matrix} \alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \varrho_q + 1, {}_r\beta_1, \dots, {}_r\beta_{m+n} : \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n z} e^{\pm i\pi(p-q-1)} \\ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots * \dots, \alpha_r - \alpha_p + 1, {}_r\sigma_1, \dots, {}_r\sigma_{m+n} \end{matrix} \right\}, \end{cases} \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned} {}_r\beta_{1+\nu} &= \alpha_r + (\alpha+\nu)/m, & \nu &= 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ {}_r\beta_{m+1+\nu} &= \alpha_r + (\beta+\nu)/n, & \nu &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ {}_r\sigma_{1+\nu} &= \alpha_r + (\alpha+\beta+\nu)/(m+n), & \nu &= 0, 1, 2, \dots, m+n-1. \end{aligned}$$

To prove this, substitute on the left from formula (1) and then apply formula (2).

The following is an alternative form for the value of the integral.

Subject to the same restrictions as in (7),

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\beta-1} E\{p;\alpha_r:q;\varrho_s: z\lambda^m(1-\lambda)^n\}\, d\lambda \\
&= \sqrt{(2\pi)}\, m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\
&\times \Bigg[\frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{2\sin\alpha\pi\sin\beta\pi} E\left\{\begin{matrix} \alpha_1,\ldots,\alpha_p, 1-(\alpha+\beta)/(m+n),\ldots, \\ 1-(\alpha+\beta+m+n-1)/(m+n): \dfrac{m^m n^n z}{(m+n)^{m+n}} \\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q, 1-\alpha/m,\ldots, \\ 1-(\alpha+m-1)/m, 1-\beta/n,\ldots, 1-(\beta+n-1)/n \end{matrix}\right\} - \\
&\quad - \sum_{(m,\alpha),(n,\beta)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2m} \operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha+\mu}{m}\right)\pi \left\{\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n z}\right\}^{(\alpha+\mu)/m} \times \\
&\quad \times E\left\{\begin{matrix} \alpha_1+(\alpha+\mu)/m,\ldots,\alpha_p+(\alpha+\mu)/m, {}_\mu\beta_1,\ldots,{}_\mu\beta_{m+n}: \dfrac{m^m n^n z}{(m+n)^{m+n}} \\ 1+(\alpha+\mu)/m, \varrho_1+(\alpha+\mu)/m,\ldots,\varrho_q+(\alpha+\mu)/m, {}_\mu\sigma_1,\ldots,{}_\mu\sigma_{m+n-1} \end{matrix}\right\} \Bigg],
\end{aligned} \tag{8}
$$

where

$${}_\mu\beta_{1+\nu} = 1+(\alpha+\mu)/m-(\alpha+\beta+\nu)/(m+n),\quad \nu=0,1,2,\ldots,m+n-1;$$

$${}_\mu\sigma_1, {}_\mu\sigma_2,\ldots,{}_\mu\sigma_{m-1}$$

are

$$1+\mu/m,\ 1+(\mu-1)/m,\ldots,1+1/m,\ 1-1/m,\ldots,1-(m-\mu-1)/m$$

respectively, and

$${}_\mu\sigma_{m+\nu} = 1+(\alpha+\mu)/m-(\beta+\nu)/n,\qquad \nu=0,1,2,\ldots,n-1.$$

To prove this, take the case $p=1$, $q=0$ of (7), apply (1) and the formulae

$$\prod_{r=0}^{m-1} \sin(\varphi+r\pi/m) = 2^{1-m}\sin m\varphi, \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{t}{m}\pi\right)\sin\left(\frac{t-1}{m}\pi\right)\ldots\sin\left(\frac{1}{m}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{m}\pi\right)\sin\left(\frac{2}{m}\pi\right)\ldots \\
&\qquad\qquad \ldots\sin\left(\frac{m-t-1}{m}\pi\right) = 2^{1-m}m,
\end{aligned} \tag{10}
$$

where $t=1,2,\ldots,m-2$, to the expression on the right, and then generalise by the inductive argument described in § 2.

These methods are applicable to a wide class of integrals.

The University, Glasgow, Scotland

(Eingegangen am 9. Oktober 1957)

WITTICH, H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 237–238 (1958)

Über die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsumme

Von
HANS WITTICH

Diese Note enthält eine ergänzende Bemerkung zu einem kürzlich von S. M. SHAH und S. K. SINGH [1] veröffentlichten Satz. Er berührt sich mit Ergebnissen, die E. ULLRICH [2] aus der Hauptungleichung der Wertverteilungstheorie abgeleitet hat. Hier soll gezeigt werden, daß auch der Satz von SHAH und SINGH aus der Hauptungleichung gewonnen werden kann, und zwar sogar unter schwächeren Voraussetzungen; er gilt nämlich für alle in $|z|<R\leqq\infty$ meromorphen Funktionen $w(z)$, für welche das Restglied in der Hauptungleichung unwesentlich ist. Das ist der Fall, wenn

$$\lim_{r\to R}\frac{-\log(R-r)}{T(r,w)}=0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{\log r}{T(r,w)}=0$$

gilt. Von der unten formulierten Teilbehauptung (1') abgesehen, sind Annahmen über die Ordnung der betrachteten Funktionen entbehrlich.

Wir verwenden die Bezeichnungen von [3]. Aus der Hauptungleichung

$$\text{(H)}\qquad N(r,1/w')+\sum_{j=1}^{q}m(r,a_j)+S(r)\leqq T(r,w')\leqq N(r,w')+m(r,w)+S_1(r)$$

folgt mit $\Delta(w',0)=1-\varlimsup\limits_{r\to R}\frac{N(r,1/w')}{T(r,w')}\leqq 1$, wenn in dem linken Teil zum $\varliminf\limits_{r\to R}$ übergegangen wird:

$$\text{(1)}\qquad \varliminf_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}\geqq\Delta(w',0)\varliminf_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}\geqq\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a).$$

Treten in (H) keine Ausnahmeintervalle Δ_r auf, was z.B. für Funktionen von endlicher Ordnung der Fall ist, dann kann der $\varlimsup\limits_{r\to R}$ gebildet werden. Man erhält

$$\big(1-\delta(w',0)\big)\varliminf_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}+\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)\leqq\varlimsup_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (1) und wegen

$$\text{(2)}\qquad \varlimsup_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}\leqq 2-\Theta(w,\infty)\leqq 2-\delta(w,\infty)-\vartheta(w,\infty)\leqq 2$$

die Beziehung

$$\text{(1')}\quad \big(1+\Delta(w',0)-\delta(w',0)\big)\cdot\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)\leqq\Delta(w',0)\big(2-\delta(w,\infty)-\vartheta(w,\infty)\big).$$

Aus $\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(w,a)=2$ folgt nach (1) und (2)

$$\lim_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}=2,\qquad \delta(w,\infty)=\vartheta(w,\infty)=\Theta(w,\infty)=0.$$

$\Delta(w,\infty)=0$ ergibt sich aus der Defektrelation $\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)+\Delta(w,\infty)\leqq 2$. Die von E. ULLRICH aus (H) abgeleiteten Beziehungen

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)\leqq\big(2-\Theta(w,\infty)\big)\,\delta(w',0)\quad\text{und}\quad\big(2-\Theta(w,\infty)\big)\,\delta(w',\infty)\leqq\Delta(w,\infty)$$

liefern im Falle $\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)=2$

$$\delta(w',0)=1\quad\text{und}\quad\delta(w',\infty)=0.$$

Wird (H) für $w'(z)$ angeschrieben und $N(r,w'')+m(r,w')-N(r,1/w'')=T(r,w')+\overline{N}(r,w)-N(r,1/w'')$ beachtet, dann folgt

$$\sum_{b\neq\infty}\delta(w',b)\leqq 1+\overline{\lim_{r\to R}}\frac{\overline{N}(r,w)}{T(r,w)}\cdot\frac{T(r,w)}{T(r,w')}-\varliminf_{r\to R}\frac{N(r,1/w'')}{T(r,w')}$$

$$\leqq 1+\frac{1}{2}\big(1-\Theta(w,\infty)\big)-\Phi_e(w')=\frac{3}{2}-\Phi_e(w')\leqq\frac{3}{2}$$

oder wegen $\delta(w',0)=1$

$$\sum_{b\neq 0,\infty}\delta(w',b)\leqq\frac{1}{2}-\Phi_e(w')\leqq\frac{1}{2}.\tag{3}$$

$\Phi_e(w')=\varliminf_{r\to R}\frac{N(r,1/w'')}{T(r,w')}$ ist der Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit von $w'(z)$ im Endlichen. Danach gilt der

Satz. *Für jede in $|z|<R\leqq\infty$ eindeutige analytische Funktion, deren Charakteristik der Bedingung $\lim_{r\to R}\frac{-\log(R-r)}{T(r,w)}=0$ bzw. $\lim_{r\to\infty}\frac{\log r}{T(r,w)}=0$ genügt, gilt die Beziehung* (1). *Treten in* (H) *keine Ausnahmeintervalle auf, dann gilt auch noch* (1').

Aus der Annahme $\sum_{a\neq\infty}\delta(w,a)=2$ folgt,

$$\lim_{r\to R}\frac{T(r,w')}{T(r,w)}=2,\ \delta(w',0)=1,\ \delta(w',\infty)=0$$

und

$$\sum_{b\neq 0,\infty}\delta(w',b)\leqq\frac{1}{2}-\Phi_e(w')\leqq\frac{1}{2}.$$

In $|z|<\infty$ meromorphe Funktionen mit der Defektverteilung $\sum_{j=1}^{q}\delta(w,a_j)=2$ liefern die Flächen mit endlich vielen logarithmischen Enden, während für Flächen mit mindestens einem periodischen Ende $\sum_{j=1}^{q}\delta(w,a_j)<2$ gilt.

Literatur

[1] SHAH, S. M., u. S. K. SINGH: On the derivative of a meromorphic function with maximum defect. Math. Z. **65**, 171–174 (1956). — [2] ULLRICH, E.: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. **1929**. — [3] Wegen der Bezeichnungen vgl. man WITTICH, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Ergeb. d. Math., N. F. **1955**, H. 8, Springer-Verlag.

Karlsruhe, Technische Hochschule, II. Lehrstuhl für Mathematik

(Eingegangen am 23. Oktober 1957)

REINHOLD BAER
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 239–246 (1958)

Sylowturmgruppen

OTTO GRÜN zum 70. Geburtstag am 26. Juni 1958 gewidmet

Von

REINHOLD BAER

Unter einer Sylowturmgruppe wollen wir eine endliche Gruppe G mit der folgenden Eigenschaft verstehen:

(ST) *Jede von* 1 *verschiedene Faktorgruppe von* G *besitzt eine von* 1 *verschiedene Sylowuntergruppe, die Normalteiler ist.*

Es ist klar, daß jede Sylowturmgruppe einen Sylowturm besitzt; d.h. es gibt eine aufsteigende Folge von Normalteilern $S(i)$ der Gruppe G derart, daß $1 = S(0)$, $S(i)/S(i-1)$ ist die p_i-Sylowuntergruppe von $G/S(i-1)$, $S(k) = G$ gilt. [Einen solchen Sylowturm hat PH. HALL, p. 287 als Sylow series of complexion $p_1, \ldots, p_k$ bezeichnet.] Dann ist aber $S(i)$ genau die Menge der Elemente g aus G, deren Ordnung $o(g)$ nur durch Primzahlen aus der Folge $p_1, \ldots, p_i$ teilbar ist. Jedes $S(i)$ ist also eine charakteristische Untergruppe von G; und nun sieht man leicht ein, daß die obige Eigenschaft (ST) äquivalent mit der Existenz eines Sylowturms ist.

Daß Unter- und Faktorgruppen von Sylowturmgruppen wieder Sylowturmgruppen sind, sieht man sofort ein; dagegen werden direkte Produkte von Sylowturmgruppen im allgemeinen nicht wieder Sylowturmgruppen sein, wie man durch leicht zu konstruierende Beispiele belegt. Die sich hierin aufzeichnende Schwierigkeit hat natürlich ihren Grund darin, daß eine Sylowturmgruppe Sylowtürme von wesentlich verschiedenem Typ besitzen kann — man denke etwa an nilpotente Gruppen — und es wird unsere Hauptaufgabe sein, in irgendeiner Form die Gesamtheit dieser Sylowtürme zu erfassen.

BEZEICHNUNGEN:

$o(G)$ = Ordnung von G.

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g.

$\mathfrak{r}$-Gruppe = Gruppe, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus der Primzahlmenge $\mathfrak{r}$ teilbar ist.

$\mathfrak{r}$-Element = Element aus einer $\mathfrak{r}$-Gruppe = Element, dessen Ordnung nur durch Primzahlen aus der Primzahlmenge $\mathfrak{r}$ teilbar ist.

$G_\mathfrak{r}$ = Menge der $\mathfrak{r}$-Elemente aus der Gruppe G.

$\mathfrak{c}(G)$ = Charakteristik von G = Menge der Primteiler von $o(G)$.

Hallsche Untergruppe = Untergruppe, deren Ordnung zu ihrem Index teilerfremd ist.

Alle betrachteten Gruppen sind *endlich*.

DEFINITION 1. *Die Primzahl p ist in der Gruppe G stärker als die Primzahl $q \neq p$, wenn Elemente aus G in einer q-Untergruppe von G Automorphismen der Ordnung p induzieren.*

Dieser Sachverhalt liegt also dann und nur dann vor, wenn es eine q-Untergruppe Q von G und ein Element g aus dem Normalisator von Q in G gibt, das in Q einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Dann ist aber $g = g'g''$, wo g' und g'' Potenzen von g sind, $o(g'')$ zu p teilerfremd und g' ein p-Element ist. Da aber g und g' denselben Automorphismus in Q induzieren, so gibt es sogar p-Elemente, die in q-Untergruppen Automorphismen der Ordnung p induzieren. Weiter sei bemerkt, daß $\{Q, g'\} = Q\{g'\}$ eine auflösbare Untergruppe der Charakteristik p, q ist.

Diese Stärkerbeziehung wird eine fundamentale Rolle in unseren Betrachtungen spielen. Ist die Primzahl p in der Gruppe G stärker als q, so sind p und q zwei verschiedene Primteiler von $o(G)$. Es kann durchaus passieren, wie einfachste Beispiele zeigen, daß in der Gruppe gleichzeitig p stärker als q und q stärker als p ist; und wir können natürlich auch nicht mit Transitivität der Stärkerbeziehung rechnen.

LEMMA. *Sind p und q verschiedene Primteiler von $o(G)$, so ist die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G dann und nur dann zu q teilerfremd, wenn es eine Hallsche Untergruppe H der Charakteristik p, q in G gibt, in der p nicht stärker ist als q.*

BEWEIS. Es sei zunächst die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G zu q teilerfremd. Dann betrachten wir eine p-Sylowuntergruppe P von G und den Normalisator N von P in G. Unsere Voraussetzung ist dann nach den Sylowschen Sätzen mit der Teilerfremdheit von q und $[G:N]$ äquivalent; und diese ist äquivalent mit der Tatsache, daß jede q-Sylowuntergruppe Q von N auch eine q-Sylowuntergruppe von G ist. Da P ein Normalteiler von N ist, so ist $H = PQ$ eine Hallsche Untergruppe der Charakteristik p, q von N und von G; und die Untergruppen $1, P, H$ bilden einen Sylowturm von H. Wäre nun p in H stärker als q, so gäbe es ein p-Element w in H, das in einer q-Untergruppe W von H einen Automorphismus der Ordnung p induzierte. Dann liegt aber w in der charakteristischen Untergruppe P von H; und jeder Kommutator $x^{-1}w^{-1}xw$ mit x aus W liegt in $P \cap W = 1$. Also würde w mit jedem Element aus W vertauschbar sein, den Automorphismus 1 induzieren, der die Ordnung $1 \neq p$ hat. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß p in H nicht stärker als q ist, womit die Notwendigkeit unserer Bedingung bewiesen ist.

Wir nehmen umgekehrt die Existenz einer Hallschen Untergruppe H der Charakteristik p, q an, in der p nicht stärker als q ist. Wir bilden zunächst das Produkt P aller p-Normalteiler von H. Dann ist P selbst ein p-Normalteiler von H. Weiter bilden wir das Produkt Q/P aller q-Normalteiler von H/P. Dann ist Q/P ebenfalls ein q-Normalteiler von H/P; und P und Q sind charakteristische Untergruppen von H. Wäre nun $Q \neq H$, so existierte ein minimaler Normalteiler M/Q von H/Q. Da die Ordnung von H nur durch die zwei Primzahlen p und q teilbar ist, so ist auch die Ordnung von M/Q nur

durch diese Primzahlen teilbar. Anwendung eines berühmten Burnsideschen Satzes ergibt die Auflösbarkeit von M/Q. Auflösbare minimale Normalteiler sind aber elementare abelsche Gruppen von Primzahlpotenzordnung; siehe etwa BAER [1; p. 118, Lemma 1]. Aus der Definition von Q folgt sofort, daß M/Q keine q-Gruppe sein kann. Also ist M/Q eine p-Gruppe. Sei S eine p-Sylowuntergruppe von M. Da M/Q eine p-Gruppe ist, so ist $M = QS$; und da P eine charakteristische p-Untergruppe von H und M ist, so ist $P \leqq S$. Weiter sei U eine q-Sylowuntergruppe von Q. Da Q/P eine q-Gruppe ist, so ist $Q = PU$. Schließlich sei V der Zentralisator von U in S, d.h. die Gesamtheit der Elemente v aus S, die mit jedem Element aus U vertauschbar sind. Ist s irgendein Element aus S, so ist $s^{-1}Us$ eine q-Sylowuntergruppe von Q, da ja U eine q-Sylowuntergruppe des Normalteilers Q von M ist. Also gibt es U in $s^{-1}Us$ transformierende Elemente in $Q = PU$; und daraus folgt sogar die Existenz eines $t^{-1}Ut = s^{-1}Us$ erfüllenden Elements t in $P \leqq S$. Mit t und s gehört aber auch st^{-1} zu S. Das p-Element st^{-1} liegt also im Normalisator der q-Untergruppe U. Es induziert in U einen Automorphismus der Ordnung p^n. Wäre $0 < n$, so induzierte $(st^{-1})^{p^{n-1}}$ in der q-Untergruppe U von H einen Automorphismus der Ordnung p, so daß p in H stärker wäre als q. Dies widerspricht unseren Voraussetzungen über H. Also ist $n = 0$, so daß st^{-1} dem Zentralisator V von U in S angehört. Damit haben wir gezeigt, daß $S = PV$ ist. Da U natürlich dem Normalisator der charakteristischen Untergruppe P von H angehört und sogar im Zentralisator von V liegt, so ist U im Normalisator von S enthalten. Aus $M = QS = UPS = US$ ergibt sich dann, daß S ein Normalteiler von M ist. Eine p-Sylowuntergruppe, die Normalteiler ist, ist eine charakteristische Untergruppe. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers M von H ist S ein p-Normalteiler von H. Nach Definition von P ist also S in P enthalten, so daß sogar $S = P$ und $M = QS = QP = Q \neq M$ wird. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $Q = H$ folgern. Also ist P ein p-Normalteiler von H mit q-Faktorgruppe $Q/P = H/P$, so daß P sogar eine p-Sylowuntergruppe von H ist. Da H eine Hallsche Untergruppe von G ist, so ist P eine p-Sylowuntergruppe von G; und jede q-Sylowuntergruppe von H ist eine q-Sylowuntergruppe von G, die im Normalisator N von P liegt. Es folgt, daß $[G:N]$ zu q teilerfremd ist. Da alle p-Sylowuntergruppen von G zueinander konjugiert sind, so ist $[G:N]$ die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G; und diese ist also zu q teilerfremd, wie wir beweisen wollten.

BEMERKUNG 1. PH. HALL, p. 287 hat auf das Beispiel der einfachen Gruppe L der Ordnung $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ hingewiesen, die zwei wesentlich verschiedene Hallsche Untergruppen der Charakteristik 2, 3 enthält. Die eine dieser Hallschen Untergruppen besitzt einen 2-Normalteiler vom Index 3, so daß die Zahl der 2-Sylowuntergruppen zu 3 teilerfremd ist, während in der anderen dieser Hallschen Untergruppen 2 stärker ist als 3.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Frage nach der Existenz von Sylowtürmen in einen etwas allgemeineren Rahmen zu stellen. Es sei σ eine Halbordnung einer Menge $\mathfrak{r}$ von Primzahlen, so daß nie $p \sigma p$ gelte und aus $a \sigma b$,

$b\sigma c$ immer $a\sigma c$ folge. Unter einem *σ-Schweif* ist dann eine Menge von Primzahlen aus $\mathfrak{r}$ zu verstehen, die mit p auch alle $x\sigma p$ erfüllenden Primzahlen x aus $\mathfrak{r}$ enthält.

DEFINITION 2. *Ist σ eine Halbordnung der Primzahlmenge $\mathfrak{r}$, ist G eine $\mathfrak{r}$-Gruppe, und ist für jeden σ-Schweif $\mathfrak{s}$ die Menge $G_{\mathfrak{s}}$ aller $\mathfrak{s}$-Elemente aus G eine charakteristische $\mathfrak{s}$-Untergruppe von G, so werde G als σ-verstreute Gruppe bezeichnet.*

Für eine ausführliche Diskussion dieser Gruppenklasse vgl. BAER [*1*; p. 164/165], wo wir diese Gruppen σ-dispersed genannt haben. Wir erwähnen, daß Untergruppen, Faktorgruppen und direkte Produkte σ-verstreuter Gruppen wieder σ-verstreut sind. Ist G eine σ-verstreute Gruppe, so ist $\mathfrak{c}(G) \leqq \mathfrak{r}$; und wir hätten uns o.B.d.A. auf Halbordnungen der Charakteristik beschränken können. Dies hätte aber den Nachteil gehabt, daß wir beim Übergang zu Unter- oder Faktorgruppen den Definitionsbereich der Halbordnung hätten ändern müssen.

Dann und nur dann ist G eine Sylowturmgruppe, wenn G eine σ-verstreute Gruppe für eine geeignete Halbordnung σ von $\mathfrak{c}(G)$ ist.

BEWEIS. Ist nämlich $S(i)$ ein Sylowturm von G mit $\mathfrak{c}[S(i)/S(i-1)] = p_i$, so bewirkt diese Indizierung der Primteiler von $o(G)$ eine [lineare] Ordnung σ von $\mathfrak{c}(G)$, für die G offenbar eine σ-verstreute Gruppe ist. — Ist umgekehrt σ eine Halbordnung von $\mathfrak{c}(G)$, für die G eine σ-verstreute Gruppe ist, so kann man wegen der Endlichkeit der Menge $\mathfrak{c}(G)$ der Primteiler von $o(G)$ diese [auf mancherlei Art] so anordnen: $\mathfrak{c}(G) = [p_1, \ldots, p_k]$, daß $i<j$ aus $p_i \sigma p_j$ [aber nicht notwendig umgekehrt] folgt. Setzen wir dann $\mathfrak{s}(i) = [p_1, \ldots, p_i]$, so ist jedes $\mathfrak{s}(i)$ ein σ-Schweif von $\mathfrak{c}(G)$. Aus der σ-Verstreutheit von G ergibt sich also, daß jedes $G_{\mathfrak{s}(i)}$ eine charakteristische $\mathfrak{s}(i)$-Untergruppe von G ist, und daß diese charakteristischen Untergruppen einen Sylowturm

$$1 = G_{\mathfrak{s}(0)} < \cdots < G_{\mathfrak{s}(i)} < \cdots < G_{\mathfrak{s}(k)} = G$$

bilden.

Eine Sylowturmgruppe besitzt im allgemeinen Sylowtürme sehr verschiedenen Typs, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen zu entnehmen ist. Wir werden aber zeigen, daß es für solche Gruppen eine ausgezeichnete Halbordnung von $\mathfrak{c}(G)$ gibt.

DEFINITION 3. *Sind p, q [gleiche oder verschiedene] Primteiler von $o(G)$, so gilt dann und nur dann pGq, wenn es*

$$p = p_0,\ p_{i+1} \text{ ist } G\text{-stärker als } p_i,\ p_l = q$$

erfüllende Primteiler p_i von $o(G)$ gibt.

Diese von der Gruppe G in ihrer Charakteristik $\mathfrak{c}(G)$ definierte Beziehung wollen wir auch als *Bewertung von* $\mathfrak{c}(G)$ bezeichnen. Sie ist stets transitiv [per definitionem]; und sie ist also dann und nur dann eine Halbordnung, wenn pGp für kein p aus $\mathfrak{c}(G)$ gilt.

SATZ 1. *Dann und nur dann ist G eine Sylowturmgruppe, wenn die Bewertung von $\mathfrak{c}(G)$ eine Halbordnung ist.*

BEWEIS *der Notwendigkeit der Bedingung.* Es sei $S(i)$ ein Sylowturm der Gruppe G mit $1=S(0)$, $p_i=\mathfrak{c}\,[S(i)/S(i-1)]$, $S(k)=G$. Wäre p_i zwar G-stärker als p_j, aber $i<j$, so würde $S(i)$ kein p_j-Element, aber alle p_i-Elemente enthalten; und es würde eine p_j-Untergruppe J geben, in der ein p_i-Element g einen Automorphismus der Ordnung p_i induzierte. Da g im Normalisator von J und in der charakteristischen Untergruppe $S(i)$ liegt, so gehört für jedes x aus J der Kommutator $g^{-1}x^{-1}gx$ zu $J\cap S(i)=1$. Also ist g mit jedem Element aus J vertauschbar und induziert folglich in J den Automorphismus 1 der Ordnung $1\neq p_i$. Dies ist ein Widerspruch; und wir haben gezeigt:

$$\text{ist } i<j, \text{ so ist } p_i \text{ nicht } G\text{-stärker als } p_j.$$

Aus p_iGp_j folgt also $i<j$, so daß insbesondere nie pGp gelten kann: die Bewertung von $\mathfrak{c}(G)$ ist eine Halbordnung.

Da wir Verstreutheit und die Existenz von Sylowtürmen als äquivalente Eigenschaften nachgewiesen haben, so ergibt sich das Hinreichen unserer Bedingung aus dem folgenden schärferen

ERGÄNZUNGSSATZ. *Ist die Bewertung von $\mathfrak{c}(G)$ eine Halbordnung, so ist G eine G-verstreute Gruppe.*

BEWEIS. Da wir die Verstreutheit der Untergruppen nachweisen wollen, so ist es zweckmäßig, $\mathfrak{c}(G)=\mathfrak{r}$ zu setzen und unter σ die von der Bewertung von $\mathfrak{c}(G)$ in $\mathfrak{r}$ definierte Halbordnung zu verstehen. Wäre G nicht σ-verstreut, so gäbe es unter den Untergruppen von G eine kleinste, nicht σ-verstreute Untergruppe K. Dann ist jede echte Untergruppe von K eine σ-verstreute Gruppe; und daraus folgt die Auflösbarkeit von K; s. BAER [*1*; p. 172, Corollary 1].

Es sei p ein σ-minimaler Primteiler von $o(K)$ [so daß $q\,\sigma\,p$ für keinen Primteiler q von $o(K)$ gilt]. Solche σ-minimalen Primteiler von $o(K)$ gibt es, da $\mathfrak{c}(K)$ endlich und wegen $K\neq 1$ nicht leer ist. Es sei q ein von p verschiedener Primteiler von $o(K)$. Aus der Auflösbarkeit von K und den Hallschen Sätzen folgt die Existenz einer Hallschen Untergruppe H der Charakteristik p, q von K; s. etwa ZASSENHAUS, p. 127, Aufgaben. Aus der Ungültigkeit von $q\,\sigma\,p$ folgt auch die von qGp, so daß insbesondere p nicht G-stärker als q ist. A fortiori ist p nicht H-stärker als q. Anwendung des Lemmas zeigt, daß die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von K zu q teilerfremd ist. Ist also P eine p-Sylowuntergruppe von K und P^* der Normalisator von P in K, so ist $[K:P^*]$ zu jedem Primteiler von $o(K)$ teilerfremd. Folglich ist $P^*=K$ und P ein Normalteiler von K.

Sei nun $\mathfrak{s}$ ein σ-Schweif von $\mathfrak{r}$. Ist $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{c}(K)$ leer, so ist $K_{\mathfrak{s}}=1$ die Gesamtheit der $\mathfrak{s}$-Elemente aus K. Ist aber $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{c}(K)$ nicht leer, so gibt es in $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{c}(K)$ eine σ-minimale Primzahl p. Da $\mathfrak{s}$ ein σ-Schweif ist, so ist p ein σ-minimaler Primteiler von $o(K)$. Nach dem im vorigen Absatz bewiesenen Resultat ist

eine p-Sylowuntergruppe P von K ein Normalteiler von K. Aus dem Schurschen Satz ergibt sich die Existenz einer $K=PC$, $1=P\cap C$ erfüllenden Untergruppe C von K; vgl. ZASSENHAUS, p. 125, Satz 25. Da p ein Teiler von $o(K)$ ist, so ist $P\neq 1$ und $C<K$. Aus der Minimalität von K folgt also die σ-Verstreutheit von C. Folglich ist auch die isomorphe Gruppe $K/P\cong C$ eine σ-verstreute Gruppe. Daraus schließen wir, daß die Gesamtheit $(K/P)_{\mathfrak{s}}$ der $\mathfrak{s}$-Elemente aus K/P eine charakteristische $\mathfrak{s}$-Untergruppe von K/P ist. Da p eine σ-minimale Primzahl aus $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{c}(K)$ ist, so sieht man sofort ein, daß $(K/P)_{\mathfrak{s}}=K_{\mathfrak{s}}/P$ ist, daß also die Menge $K_{\mathfrak{s}}$ aller $\mathfrak{s}$-Elemente aus K eine charakteristische $\mathfrak{s}$-Untergruppe von K ist. Damit haben wir aber die σ-Verstreutheit von K dargetan im Widerspruch zu unserer Wahl von K; und aus diesem Widerspruch folgt die G-Verstreutheit von G, q.e.d.

BEMERKUNG 2. Ein Vergleich des Beweises des Ergänzungssatzes mit dem des Lemmas zeigt, daß der beim Beweis des Lemmas benötigte Burnsidesche Satz beim Beweis des Ergänzungssatzes umgangen werden könnte.

Im folgenden wollen wir Gruppen untersuchen, in denen die Bedingungen des Satzes 1 nur für Primzahlen aus einer gewissen vorgegebenen Menge gelten. Zur präzisen Definition dieser Gruppenklasse müssen wir zunächst jeder Primzahlmenge $\mathfrak{r}$ und jeder Gruppe G eine Primzahlrelation $\sigma_{\mathfrak{r},G}$ folgendermaßen zuordnen:

Dann und nur dann gilt $p\sigma_{\mathfrak{r},G}\,q$, wenn es Primzahlen $p_0,\ldots,p_t$ in $\mathfrak{r}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$p=p_0,\ p_{i+1}\ \textit{ist } G\textit{-stärker als } p_i,\ p_t=q.$$

Es ist klar, daß aus der Gültigkeit von $p\sigma_{\mathfrak{r},G}\,q$ die Zugehörigkeit von p und q zu dem Durchschnitt $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{c}(G)$ folgt. Ist weiter $\mathfrak{a}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{r}$ und U eine Untergruppe von G, so folgt aus der Gültigkeit von $p\sigma_{\mathfrak{a},U}\,q$ auch die von $p\sigma_{\mathfrak{r},G}\,q$, aber natürlich nicht umgekehrt. — Die Beziehung $\sigma_{\mathfrak{r},G}$ ist stets transitiv. Sie definiert also dann und nur dann eine Halbordnung in $\mathfrak{r}$, wenn $p\sigma_{\mathfrak{r},G}\,p$ nie gilt. — Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die früher betrachtete Bewertung von $\mathfrak{c}(G)$ jetzt von uns als $\sigma_{\mathfrak{c}(G),G}$ bezeichnet werden würde.

Ist $\mathfrak{r}$ eine Menge von Primzahlen, so werde die Gruppe G als $\mathfrak{r}$-*reguläre Gruppe* bezeichnet, wenn

(a) $\sigma_{\mathfrak{r},G}$ *eine Halbordnung in* $\mathfrak{r}$ *definiert und*

(b) *jede Untergruppe* U *von* G *zu jedem Primzahlpaar* p, q *aus* $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{c}(U)$ *eine Hallsche Untergruppe der Charakteristik* p, q *besitzt.*

Man beachte, daß in Satz 1 nur die Bedingung (a) auftritt, während (b) durch das Lemma nahegelegt wird, und daß Bedingung (a) dann und nur dann erfüllt ist, wenn $p\,\sigma_{\mathfrak{r},G}\,p$ für kein p aus $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{c}(G)$ gilt. — Aus den oben erwähnten Beziehungen zwischen verschiedenen σ-Relationen ergibt sich sofort, daß Untergruppen $\mathfrak{r}$-regulärer Gruppen ebenfalls $\mathfrak{r}$-regulär sind. Daß $\mathfrak{r}$-Regularität auch bei Faktorgruppenbildung erhalten bleibt, scheint nicht so leicht direkt verifizierbar zu sein, wird sich aber mit Hilfe von Satz 2 beweisen lassen.

SATZ 2. *Die Gruppe G ist dann und nur dann $\mathfrak{r}$-regulär, wenn*

(S) *jede Untergruppe U von G eine Hallsche Sylowturmuntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ besitzt und*

(K) *jede Untergruppe V von G zu einer Untergruppe einer jeden Hallschen $\mathfrak{r}$-Untergruppe H von G mit $o(V) \mid o(H)$ in G konjugiert ist.*

Wir machen darauf aufmerksam, daß in (S) eine Hallsche Untergruppe von U, in (K) aber nur Hallsche Untergruppen von G vorkommen.

BEWEIS. Wir setzen zunächst die $\mathfrak{r}$-Regularität von G voraus und wollen daraus die Gültigkeit von (S), (K) und mehr herleiten.

(A) Jede Untergruppe U von G besitzt eine auflösbare Hallsche Untergruppe der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$.

Diese Aussage ist sicher richtig, wenn $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ leer ist; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß (A) für all die Untergruppen V von G mit $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(V) < \mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ gilt. Da $\sigma_{\mathfrak{r},G}$ wegen (a) eine Halbordnung in $\mathfrak{r}$ definiert, und da $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ eine endliche, nicht leere Menge ist, so gibt es in $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ eine $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-minimale Primzahl p. Es sei P eine p-Sylowuntergruppe von U und V der Normalisator von P in U. Ist q eine von p verschiedene Primzahl aus $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$, so folgt aus der Minimalität von p, daß p nicht G-stärker als q ist, und daß also insbesondere kein Element aus U in einer q-Untergruppe von U einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Aus der Bedingung (b) folgt die Existenz einer Hallschen Untergruppe der Charakteristik p, q in U. Wir können also das Lemma anwenden. Folglich enthält V eine q-Sylowuntergruppe von U für jedes q aus $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$.

Es ist P ein Normalteiler von V und $P \leqq V \leqq U$. Da P eine p-Sylowuntergruppe von U ist, so ist $[V:P]$ zu p teilerfremd. Anwendung des Schurschen Satzes ergibt die Existenz einer $V = PW$, $1 = P \cap W$ erfüllenden Untergruppe W von V; vgl. ZASSENHAUS, p. 125, Satz 25. Da dann $W \cong V/P$ ist, so enthält auch W eine q-Sylowuntergruppe von U für jedes $q \neq p$ aus $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$. Da p kein Teiler von $o(W)$ ist, so enthält $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(W)$ weniger Primzahlen als $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$, so daß also nach unserer Induktionsannahme (A) auf W anwendbar ist. Folglich besitzt W eine auflösbare Hallsche Untergruppe H der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(W)$. Da aber W für jedes q aus $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(W)$ eine q-Sylowuntergruppe von U enthält, so ist H sogar eine Hallsche Untergruppe von U. Da W im Normalisator V der p-Sylowuntergruppe P von U liegt, so ist PH eine auflösbare Hallsche Untergruppe der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$ von U; und damit ist der induktive Beweis von (A) vollständig durchgeführt.

(B) Jede auflösbare $\mathfrak{r}$-Untergruppe von G ist $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-verstreut.

Es sei A eine auflösbare $\mathfrak{r}$-Untergruppe von G. Da dann $\mathfrak{c}(A) \leqq \mathfrak{r}$ ist, so folgt aus (a), daß die Bewertung in $\mathfrak{c}(A)$ eine Halbordnung definiert. Satz 1 und sein Ergänzungssatz sind also auf A anwendbar. Da die Bewertung von $\mathfrak{c}(A)$ weiter nichts als $\sigma_{\mathfrak{c}(A),A}$ ist, so haben wir damit die $\sigma_{\mathfrak{c}(A),A}$-Verstreutheit von A bewiesen. Daraus folgt aber die $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-Verstreutheit von A, da ja für Primteiler p, q von $o(A)$ aus $p \sigma_{\mathfrak{c}(A),A} q$ stets $p \sigma_{\mathfrak{r},G} q$ folgt, also die Durchschnitte von $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-Schweifen von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{c}(A)$ stets $\sigma_{\mathfrak{c}(A),A}$-Schweife von $\mathfrak{c}(A)$ sind.

Aus (A) und (B) folgt schon unsere Bedingung (S). Die Eigenschaften (A) und (B) besagen zusammengefaßt:

(R) *Jede Untergruppe U von G besitzt eine $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-verstreute Hallsche Untergruppe der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(U)$.*

Gruppen mit der Eigenschaft (R) haben wir an anderer Stelle als $\sigma_{\mathfrak{r},G}$-reguläre Gruppen bezeichnet und wir haben für diese Gruppen die Gültigkeit der Eigenschaft (K) bewiesen; s. BAER [2; Satz 3]. Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingungen (S) und (K) bewiesen.

Wir nehmen jetzt umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (S) und (K) an. Dann besitzt G eine Hallsche Sylowturmuntergruppe H der Charakteristik $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(G)$. Es folgt aus Satz 1, daß die Bewertung von $\mathfrak{c}(H)$ eine Halbordnung in $\mathfrak{c}(H)$ definiert. Wir erinnern daran, daß diese Bewertung gerade $\sigma_{\mathfrak{r},H}$ ist, und daß $\mathfrak{c}(H) = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(G)$ gilt. Sind nun p, q verschiedene Primzahlen aus $\mathfrak{r}$, und ist p weiter G-stärker als q, so gibt es eine q-Untergruppe Q von G, in der ein p-Element g aus G einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Dann ist $U = \{Q, g\} = Q\{g\}$ eine Gruppe der Charakteristik p, q. Aus $Q \neq 1$, $g \neq 1$ folgt die Zugehörigkeit von p, q zu $\mathfrak{c}(G)$. Also liegen p und q in $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(G) = \mathfrak{c}(H)$. Da aber H eine Hallsche Untergruppe der Charakteristik $\mathfrak{c}(H)$ von G ist, so ist $o(U)$ ein Teiler von $o(H)$. Aus (K) folgt also, daß U zu einer Untergruppe von H konjugiert ist; und folglich ist p auch H-stärker als q. Ist p umgekehrt H-stärker als q, so ist p auch G-stärker als q. Daraus folgt die Identität der Beziehungen $\sigma_{\mathfrak{r},G}$ und $\sigma_{\mathfrak{r},H}$ in $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}(G) = \mathfrak{c}(H)$. Da wir aber schon gezeigt hatten, daß $\sigma_{\mathfrak{r},H}$ eine Halbordnung in $\mathfrak{c}(H)$ definiert, so haben wir die Gültigkeit von (a) dargetan. — Die Gültigkeit von (b) ergibt sich mühelos aus (S), der Auflösbarkeit der Sylowturmgruppen und den Hallschen Sätzen.

BEMERKUNG 3. Gelten die Bedingungen (S) und (K) in G, so überzeugt man sich leicht davon, daß sie auch in allen Faktorgruppen von G gelten. Wegen Satz 2 folgt also aus der $\mathfrak{r}$-Regularität einer Gruppe G die aller ihrer Faktorgruppen.

Literatur

BAER, R.: [1] Classes of finite groups and their properties. Illinois J. of Math. **1**, 115–187 (1957). — [2] Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen. Archiv der Math. (1958). — HALL, P.: Theorems like Sylow's. Proc. London Math. Soc. **6**, 286–304 (1956). — ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. I. Leipzig u. Berlin 1937.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 8. November 1957)

JACOBS, K.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 247–270 (1958)

Konjunkturschwankungen Markoffscher n-Personen-Prozesse mit monomialer Regelung

Herrn HELLMUTH KNESER zum 60. Geburtstag am 16. April 1958 gewidmet

Von

KONRAD JACOBS

Unter dem Begriff „Konjunktur" verstehen wir hier das zeitliche Verhalten der Wirtschaft, insofern es determiniert ist. Die theoretische Erfassung der realen Konjunkturvorgänge beruht auf der Konstruktion mathematisch durchschaubarer Modelle. Hierzu muß folgendes geleistet werden.

1. Die Gesamtheit aller möglichen Zustände der realen Wirtschaft wird auf eine abstrakte Punktmenge Ω abgebildet. Dies geschieht in der Regel mittels einer Meßvorschrift für endlichviele Zustandsparameter (Beschäftigung, Investition usw.), so daß Ω eine Punktmenge im R^n wird. Im allgemeinen werden noch weitere Parameter zur Festlegung des Zustandes nötig sein (z. B. geographische und gesetzliche Verhältnisse); man nimmt an, daß diese „äußeren" Parameter während der zu behandelnden Vorgänge konstant bleiben (vgl. jedoch Nr. 4).

2. Es wird eine eindeutige Abbildung T von Ω in sich angegeben. Man interpretiert das so: Liegt zur Zeit t der Zustand $\omega \in \Omega$ vor, so liegt zur Zeit $t+1$ der Zustand $T\omega$ vor. Man trägt auf diese Weise dem zwangsläufigen, von der Entscheidungsfreiheit einzelner Individuen nicht zu beeinflussenden Charakter des Wirtschaftsvorganges Rechnung. Die hier miteingeschlossene Vereinbarung, den Vorgang nur in diskreten äquidistanten Zeitpunkten zu beobachten, bedeutet empirisch keine wesentliche Einschränkung.

3. Man untersucht für ein festes ω die Zustandsfolge $T^t\omega$ $(t=1, 2, \ldots)$, oder überhaupt die Folge T^t $(t=1, 2, \ldots)$. Hierbei kann man zwei verschiedene Ziele ins Auge fassen.

a) Man untersucht das asymptotische Verhalten der Folge T^t ganz allgemein und versucht, Periodizitätserscheinungen oder wie immer geartete Fluktuationen nachzuweisen, um auf diese Weise in das Wesen der Konjunkturschwankungen Einblick zu gewinnen.

b) Man versucht, die Folge $T^t\omega$ für kleine t möglichst genau zu berechnen, um kurzfristige Wirtschaftsprognosen anstellen zu können.

4. Man sucht die Abhängigkeit von T von realen Gegebenheiten zu ergründen, um zu verstehen, warum in T steckende, etwa nach 3 a) nachgewiesene Periodizitätserscheinungen der Folge T^t in Wirklichkeit nie rein auftreten bzw. nach kurzem deutlichem Hervortreten wieder untergehen — eben weil T nur über kurze Zeiträume hinweg als konstant betrachtet werden kann. Hierzu wird

man im allgemeinen weitere „äußere" Parameter einführen. Wir haben also im ganzen zwischen „inneren" (den durch das Verhalten des Wirtschaftspublikums — einschließlich der Unternehmer — erzeugten, massenpsychologisch oder mechanisch determinierten [man nimmt in genauer Analogie zur Quantenmechanik an, daß sich die individuelle Handlungsfreiheit der Einzelnen einem determinierten statistischen Schema einfügt] Konjunkturschwankungen unterworfenen) und „äußeren" (durch Natur-, Regierungs- und andere Gewalten bestimmten) Parametern zu unterscheiden. In der Festsetzung der Werte gewisser äußerer Parameter (z.B. des Diskontsatzes der Zentralbank) liegt eine Möglichkeit, in den Konjunkturvorgang willkürlich einzugreifen („konforme Eingriffe" im Sinne von RÖPKE [*20*], S. 259). Eine andere Möglichkeit liegt darin, bislang innere Parameter zu äußeren zu machen und ebenfalls der willkürlichen Steuerung zu unterwerfen (Einführung der Zwangswirtschaft). Umgekehrt kann man im Einzelfall die Frage aufwerfen, ob vermeintlich äußere Parameter nicht besser als innere anzusehen sind — z.B. dann, wenn die Wirtschaftspolitik der Regierung unter dem Zwang einer massenpsychologischen Mechanik die Konjunkturschwankungen mitmacht, anstatt sich frei und überlegt gegen sie zu verhalten. Eine umfassende Konjunkturtheorie, deren Grundbegriffe wir hier entwickeln wollen, hat also ein Modell nicht allein für das wirtschaftliche, sondern für das Verhalten der Menschenmassen überhaupt, soweit es determiniert erscheint, zu geben. Endlich ist es klar, daß äußere Parameter in größerem Zusammenhang (z.B. beim Übergang von nationalwirtschaftlicher zu weltwirtschaftlicher Betrachtungsweise) zu inneren werden können.

Die vorliegende Arbeit enthält methodische Vorbereitungen zur Behandlung der Fragestellung 3a). Hierzu sind zunächst die Punkte 1 und 2 zu betrachten (Festlegung des Modells). Einen Überblick über die bisher von nationalökonomischer Seite aufgestellten Konjunkturmodelle gibt FÖHL [*5*] unter Benützung von Begriffsbildungen der Regelungstheorie (Konjunkturprobleme sind Regelungsprobleme; vgl. OPPELT [*18*]); vgl. ferner JÖHR [*11*]. Eine Durchführung der Aufgabe 3a) für einzelne Modelle (z.B. Cobweb und SAMELSON-HICKS) findet sich bei ALLEN [*2*]. Für die Aufgabe 3b) vgl. z.B. LANGELÜTKE-MARQUARDT [*14*], FELS [*4*] („Konjunkturtest").

Die bisherigen Konjunkturmodelle haben einen Nachteil: die verwendeten Parameter sind nicht dimensionslos und man muß, um sie zu messen, an sich unvergleichbare Größen gewaltsam addieren (z.B. vernachlässigt man bei der Berechnung von Arbeitsmengen Qualitätsunterschiede; vgl. jedoch z.B. KEYNES [*12*], Kap. 4). Es erscheint deshalb als für grundsätzliche Untersuchungen vorteilhaft, als Parameter ausschließlich dimensionslose Größen, und zwar Wahrscheinlichkeiten zu verwenden (das geschieht auch beim Konjunkturtestverfahren [*14*], [*4*]). Dies ist eine für die Spieltheorie fundamentale Idee ([*17*]). Man wird dann hoffen, Methoden der Wahrscheinlichkeits- bzw. Spieltheorie für unser Problem fruchtbar zu machen. Deshalb soll hier der Versuch gemacht werden, ein durch spiel- und wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffsbildungen gekennzeichnetes Konjunkturmodell aufzustellen:

Wir betrachten die Gesamtheit E aller an der Wirtschaft beteiligten Personen und bilden eine Überdeckung $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Die Mengen E_k müssen nicht disjunkt sein, z.B. $E_1 = \{\text{Arbeiter}\}$, $E_2 = \{\text{Unternehmer}\}$, $E_3 = \{\text{Aktionäre}\}$, $E_4 = \{\text{Konsumenten}\}$ usw. — Jedes Individuum aus E_k habe die Wahl zwischen d_k Arten des Verhaltens („reinen Strategien"). Es sei h_k^ϱ der Bruchteil der Individuen von E_k, die die Strategie ϱ wählen. Dann gilt $\sum_{\varrho=1}^{d_k} h_k^\varrho = 1$, $h_k^\varrho \geqq 0$, d.h. wir haben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung h_k. Diese Verteilung wird sich im Laufe der Zeit ändern. Nehmen wir an, daß zwischen den Zeiten t und $t+1$ der Bruchteil $p_{ij}^{(k)}(t+1, t)$ derjenigen Leute aus E_k, die die Strategie j haben, zur Strategie i übergeht, so regelt sich die zeitliche Entwicklung von h_k als Markoffscher Prozeß (Doob [21], Jacobs [7]). Die Übergangsmatrizen $P_k(t+1, t) = p_{ij}^{(k)}(t+1, t)$ werden im allgemeinen nicht konstant sein; sie hängen von den Ansichten der Individuen aus E_k über die gesamte Wirtschaftssituation $(h_1, \ldots, h_n)$, und damit von $(h_1, \ldots, h_n)$ ab:

$$(0.1) \qquad \begin{cases} P_k(t+1, t) = F_k(h_1, \ldots, h_n) \\ T(h_1, \ldots, h_n) = \big(F_1(h_1, \ldots, h_n)\, h_1, \ldots, F_n(h_1, \ldots, h_n)\, h_n\big). \end{cases}$$

Damit ist das Modell grundsätzlich beschrieben. Man sieht, daß seine Gültigkeit nicht auf das ökonomische Verhalten beschränkt ist.

Eine bekannte Arbeit von Nash [16] ist hier wesentlich. Nash [16] hat die Frage nach der Existenz von Gleichgewichtssituationen aufgestellt und sie in die Frage nach der Existenz von Fixpunkten von T umgeformt; nach dem Fixpunktsatz von Brouwer [1] gibt es, falls T stetig ist, stets Gleichgewichtssituationen, d.h. Situationen, in denen die Strategiewechsel der Individuen sich genau kompensieren. Das von Nash benützte Modell läßt sich leicht auf die oben beschriebene Gestalt bringen.

Nach (0.1) kann man die Zustände zu allen Zeiten $t = 1, 2, \ldots$ berechnen, wenn man den Zustand zur Zeit 0 kennt, zugleich berechnet man die $P(t+1, t)$. Man kann das Problem ohne Verlust an Allgemeinheit vereinfachen, indem man nur mit den P_k arbeitet, also n Markoffsche Prozesse behandelt, die sich gegenseitig beeinflussen. Auf diese Weise gelangt man von selbst zum Begriff des Markoffschen n-Personen-Prozesses und der Regelung; es handelt sich darum, spezielle Regelungen, insbesondere die für das Modell von Nash passenden, zu untersuchen und das Problem 3a) für die Zugehörigen T bzw. die resultierenden Prozesse zu lösen.

Leider bin ich nicht imstande, dieses Problem für die in Rede stehenden Regelungen zu lösen. Es soll deshalb versucht werden, einfachere Regelungen zu behandeln, in der Hoffnung, daß die dabei ausgebildeten Methoden sich derart fortentwickeln lassen, daß der eigentlich interessante Fall erledigt werden kann.

Wir betrachten deshalb *monomiale* Regelungen und Markoffsche n-Personen-Prozesse, die diesen gehorchen. Unser Hauptergebnis lautet: Diese

Prozesse verhalten sich exponentiell-asymptotisch periodisch (Theorem II, §6). Bei monomialen Regelungen lassen sich die Abhängigkeitsverhältnisse auf rein kombinatorischem Wege durchschauen (§§ 1–3). Interessanterweise treten fast alle unter Nr. 4 angedeuteten realen Phänomene in der Theorie auf. So muß man von kleineren zu größeren Wirtschaftseinheiten fortschreiten und hierbei äußere Parameter zu inneren ernennen (bzw. das entsprechende in umgekehrter Richtung). Die verwendeten Methoden sind aus einem für gewisse Markoffsche Prozesse entwickelten Verfahren hervorgegangen (JACOBS [8], [9], [10]). Man weist z.B., um die Periodizität zu gewinnen, nach, daß für hinreichend späte Zeiten jede annähernde Wiederkehr sich periodisch fortpflanzen muß. Die Existenz solcher Wiederkünfte wird bewiesen, indem man das ganze Problem mittels eines geometrischen Lemmas (§ 4) diskret macht und dann das Dirichletsche Schubfachprinzip anwendet.

§ 1. Monomiale Regelungsschemata, Vergröberung. Stämme

1. Allgemeine Begriffe. — Jeder der Zahlen $\nu = 1, \ldots, n$ sei ein Zeichen Π_ν zugeordnet. $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ seien nichtleere Zeichenmengen. Kein Π_ν sei in einem $\mathfrak{Z}_{\mu\varrho}$ enthalten. Mit $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ bezeichnen wir die Menge aller Zeichenfolgen

$$\mathsf{Z}_{\mu k}\mathsf{Z}_{k j}\ldots\mathsf{Z}_{l\nu} \qquad (\mathsf{Z}_{\varrho\sigma}\in\mathfrak{Z}_{\varrho\sigma})$$

(mit kohärenten Indizes!). Ist $\mathsf{A}_{\mu\nu}\in\mathfrak{W}_{\mu\nu}$, $\mathsf{B}_{\nu k}\in\mathfrak{W}_{\nu k}$, so ist $\mathsf{A}_{\mu\nu}\mathsf{B}_{\nu k}\in\mathfrak{W}_{\mu k}$. Eine nichtleere Zeichenfolge

$$\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_n) = \mathsf{A}_0\Pi_{i_1}\mathsf{A}_1\ldots\mathsf{A}_{m-1}\Pi_{i_m}\mathsf{A}_m \tag{1.1}$$

mit $\mathsf{A}_{\mu-1}\in\mathfrak{W}_{i_{\mu-1}, i_\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ (die Π_ν müssen nicht alle vorkommen, sie können auch ganz fehlen) nennen wir ein *Wort* vom Grade m; gilt überdies $\mathsf{A}_0\in\mathfrak{W}_{\nu, i_1}, \ldots, \mathsf{A}_m\in\mathfrak{W}_{i_m,\nu}$, so heißt φ ein Wort *für den Spieler* ν. Ist φ_ν ein Wort für den Spieler ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, so bezeichnen wir das System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_1) = (\varphi)$ als ein *monomiales Regelungsschema* für die *Spielermenge* $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$. Die $\mathsf{A}\in\bigcup_{\mu,\nu}\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ heißen die *Steuerungsgrößen* des Schemas.

Aus einem vorgelegten Schema $(\varphi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ konstruiert man sogleich eine ganze Folge $(\varphi^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ neuer Schemata gemäß den Rekursionsformeln

$$\begin{cases} (\varphi^{(1)}) = (\varphi) \\ \varphi_\nu^{(k+1)} = \varphi_\nu\left(\varphi_1^{(k)}(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\,\Pi_1, \ldots, \varphi_n^{(k)}(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\,\Pi_n\right)\varphi_\nu^{(k)}(\Pi_1, \ldots, \Pi_n) \\ \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{1.2}$$

$(\varphi^{(k)})$ heißt die *k-te Vergröberung* von (φ), oder: man kommt von (φ) auf $(\varphi^{(k)})$ durch Vergröberung um k.

2. Relativierung. — Es sei Σ_0 eine echte (eventuell leere) Teilmenge der Spielermenge Σ und $\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0$. Sei etwa $\Sigma_1 = \{1, \ldots, r\}$, $\Sigma_0 = \{r+1, \ldots, n\}$. Dann können wir aus einem beliebigen Schema $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein neues Schema $(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_r)$ erhalten, indem wir die Π_ν mit $\nu\in\Sigma_0$ „konstantsetzen" oder „zu

Steuerungsgrößen ernennen". Dies bedeutet: $\overline{\mathfrak{W}}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \in \Sigma_1)$ sei die Menge aller Worte (1.1) mit $\mathsf{A}_0 \in \mathfrak{W}_{\mu i_1}$, $\mathsf{A}_m \in \mathfrak{W}_{i_m, \nu}$, in denen kein Π_ϱ mit $\varrho \in \Sigma_1$ vorkommt. Jedes Wort $\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ hat dann die Gestalt

$$\overline{\varphi}(\Pi_1, \ldots, \Pi_r) = \overline{\mathsf{A}}_0 \Pi_{i_1} \overline{\mathsf{A}}_1 \ldots \overline{\mathsf{A}}_{L-1} \Pi_{i_L} \overline{\mathsf{A}}_L,$$

wobei $\overline{\mathsf{A}}_{\lambda-1} \in \mathfrak{W}_{i_{\lambda-1}, i_\lambda}$ $(\lambda = 2, \ldots, l)$ und $i_\lambda \leqq r$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ gilt. Jedes Wort $\overline{\varphi}(\Pi_1, \ldots, \Pi_r)$ mit diesen Eigenschaften kann man in dieser Weise aus einem Wort $\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ gewinnen. Ist $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein monomiales Regelungsschema mit den Steuerungsgrößen $\mathsf{A} \in \bigcup_{\mu, \nu \leqq n} \mathfrak{W}_{\mu\nu}$, so ist $(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_r)$ ebenfalls ein monomiales Regelungsschema mit den Steuerungsgrößen $\overline{\mathsf{A}} \in \bigcup_{\varrho, \sigma \leqq r} \overline{\mathfrak{W}}_{\varrho\sigma}$. Man sagt, es sei aus $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ durch Relativierung bezüglich Σ_0 entstanden. Vergröberung und Relativierung sind nicht miteinander vertauschbar.

3. Initialabbildungen und Stämme. — Es sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein monomiales Regelungsschema. Wir betrachten für jedes ν das Wort $\varphi_\nu(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\Pi_\nu$. Ist hier Π_{i_ν} von links her gerechnet das erste der Zeichen Π_ϱ, so schreiben wir $i_\nu = I\nu$ und nennen I die *Initialabbildung* des Schemas. $I\nu$ heißt die *Initiale* des Spielers ν (kommt kein Π_ϱ in φ_ν vor, so ist $I\nu = \nu$). Man verifiziert leicht: Hat (φ) die Initialabbildung I, so hat die k-te Vergröberung $(\varphi^{(k)})$ die Initialabbildung I^k.

Da I eine Abbildung von Σ in sich ist, gilt $\Sigma \supseteqq I\Sigma \supseteqq I^2\Sigma \supseteqq \cdots$. Da Σ endlich ist, wird diese absteigende Kette nach endlichvielen Schritten konstant $\neq 0$ und man kann k so wählen, daß I^k idempotent wird: $(I^k)^2 = I^k$. Die Menge $I^k\Sigma$ heißt der *Stamm* des Schemas; er besteht aus denjenigen Spielern, die sozusagen das letzte Wort haben. In $(\varphi^{(k)})$ sind also alle Initialen Zeichen von Stamm-Spielern. Der Stamm enthält stets alle Spieler ν, in deren φ_ν überhaupt kein Π_ϱ vorkommt.

4. Ausschöpfung von Σ durch Stämme. — Es sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein monomiales Regelungsschema und Σ_0 sein Stamm. Ist $\Sigma - \Sigma_0$ nichtleer, so erhalten wir durch Relativierung bezüglich Σ_0 ein neues Regelungsschema mit einem Stamm $\Sigma_1 \subseteqq \Sigma - \Sigma_0$. Ist $\Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ nichtleer, so erhalten wir durch Relativierung bezüglich $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ ein neues Regelungsschema mit einem Stamm $\Sigma_2 \subseteqq \Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$. Da die Stämme nichtleer sind, wird Σ nach diesem Verfahren in endlichvielen Schritten ausgeschöpft.

§ 2. Autarke Mengen. Satellitengürtel

1. Hintermänner. — Es sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein monomiales Regelungsschema. μ heiße ein *Vordermann* von ν, wenn Π_ν im Wort φ_μ vorkommt. ν heiße ein *Hintermann* von μ, wenn es eine Kette

$$\mu = k_1, k_2, \ldots, k_r = \nu$$

gibt, in der k_ϱ Vordermann von $k_{\varrho+1}$ ist $(\varrho = 1, \ldots, r-1)$. Man verifiziert leicht: Es gibt eine Vergröberung $(\varphi^{(k)})$ von (φ) mit folgender Eigenschaft: ν ist dann und nur dann Hintermann von μ, wenn ν in φ_μ vorkommt. Es gilt

nämlich wegen (1.2): Kommt Π_σ in $\varphi_\nu^{(l)}$ vor, so auch in $\varphi_\nu^{(l+1)}$. Ferner ergibt sich aus der induktiv leicht zu beweisenden Formel

$$\varphi_\nu^{(l+1)} = \varphi_\nu^{(l)}\left(\varphi_1(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\,\Pi_1, \ldots, \varphi_n(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\,\Pi_n\right)\varphi_\nu(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$$

die Aussage: Kommt Π_σ in φ_ϱ, Π_ϱ in $\varphi_\nu^{(l)}$ vor, so kommt Π_σ in $\varphi_\nu^{(l+1)}$ vor. M.a.W. nach geeigneter Vergröberung kann man stets annehmen, daß die Hintermann-Vordermann-Relation symmetrisch ist. Es ist klar, daß durch Vergröberung nichts an den Hintermann-Verhältnissen geändert wird. Die nachstehende Bildung ist also invariant gegen Vergröberung: Ist $M \subseteqq \Sigma$, so bezeichnen wir mit $H(M)$ die Menge aller Hintermänner von Spielern aus M (sie kann leer sein). Es gilt $H(M) \subseteqq H(N)$ $(N \subseteqq M)$. Offenbar ist

$$H(H(M)) \subseteqq H(M), \tag{2.1}$$

wobei nicht immer $=$ gelten muß: es kann vorkommen, daß ein Spieler Hintermann ist, ohne selbst Hintermänner zu haben.

2. Relative Autarkie. — Es sei Σ_0 eine echte (eventuell leere) Teilmenge von Σ. Eine Menge $M \subseteqq \Sigma - \Sigma_0$ heiße *Σ_0-autark*, wenn

$$H(M) - H(M) \cap \Sigma_0 \subseteqq M$$

gilt (alle nicht zu M gehörigen Hintermänner sitzen im „Ausland" Σ_0). Wegen (2.1) ist jede Menge der Gestalt $H(M) - H(M) \cap \Sigma_0$ Σ_0-autark. Wir nennen eine nichtleere Σ_0-autarke Menge M *minimal Σ_0-autark*, wenn sie keine echte nichtleere Σ_0-autarke Teilmenge besitzt. Offenbar ist dies genau dann der Fall, wenn $H(\{\nu\}) - H(\{\nu\}) \cap \Sigma_0 = M$ für jedes $\nu \in M$ gilt. Nach geeigneter Vergröberung bedeutet dies: Ist $\nu \in M$, so kommen sämtliche Π_μ $(\mu \in M)$ in φ_ν vor, und sonst höchstens einige Π_ϱ $(\varrho \in \Sigma_0)$. Ist Σ_0 leer, so lassen wir das Σ_0 in allen genannten Begriffen weg und sprechen von Autarkie schlechthin. Ist $0 \neq \Sigma_1 \subseteqq \Sigma - \Sigma_0$ Σ_0-autark, so besitzt Σ_1 eine nichtleere minimal-Σ_0-autarke Teilmenge. Zwei solche Mengen sind stets entweder fremd oder identisch. Relativiert man bezüglich Σ_0, so werden alle Σ_0-autarken Mengen schlechthin autark. Hat man die in Nr. 1 genannte Vergröberung dabei vorher vorgenommen, so werden Mengen, die vorher nicht Σ_0-autark waren, nachher nicht autark sein; ist jene Vergröberung nicht vorweg geleistet, so versagt diese Überlegung. Enthält φ_ν kein Π_ϱ $(\varrho \in \Sigma)$, so ist $\{\nu\}$ schlechthin autark.

3. Ausschöpfung durch Satellitengürtel. — Es sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein monomiales Regelungsschema. $\Sigma_{01}, \ldots, \Sigma_{0r_0}$ seien sämtliche minimal-autarken Mengen in Σ. Ihre Vereinigung $\Sigma_0 = \bigcup_{\varrho=1}^{r_0} \Sigma_{0\varrho}$ ist nichtleer; ist sie eine echte Teilmenge von Σ, so ist $\Sigma - \Sigma_0$ jedenfalls Σ_0-autark; wir bilden sämtliche minimal-Σ_0-autarken Teilmengen von $\Sigma - \Sigma_0$. Es seien dies $\Sigma_{11}, \ldots, \Sigma_{1r_1}$. Ihre Vereinigung $\Sigma_1 = \bigcup_{\varrho=1}^{r_1} \Sigma_{1\varrho}$ ist nichtleer. Ist $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ eine echte Teilmenge von Σ, so ist $\Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ jedenfalls $(\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$-autark usw. Dies Ausschöpfungsverfahren bricht nach endlichvielen Schritten ab. Wir bezeichnen das System $\Sigma_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r_k} \Sigma_{k\varrho}$ als den k-ten Satellitengürtel unseres Regelungs-

schemas. Σ zerfällt also in diese Satellitengürtel. Man kann das Verfahren noch etwas anders beschreiben: Führt man nach passender Vergröberung die Relativierung bezüglich $\Sigma_0 \cup \cdots \cup \Sigma_k$ durch, so entsteht ein monomiales Regelungsschema für die Personen $\nu \in \Sigma - \bigcup_{j=0}^{k} \Sigma_j$, bezüglich dessen die Mengen $\Sigma_{k+1,1}, \ldots, \Sigma_{k+1,r_{k+1}}$ schlechthin minimal-autark sind.

§ 3. Regelungen und Steuerungen

1. Allgemeine stochastische Regelungen. Vergröberung. — Es seien $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ reelle lineare Räume von endlicher Dimension $d_1, \ldots, d_n$. Wir fixieren in jedem $\mathfrak{H}_\nu$ eine Basis $e_1^\nu, \ldots, e_{d_\nu}^\nu$ und bezeichnen mit $\mathfrak{B}_\nu$ die Menge aller Vektoren $h = \sum_{\varrho=1}^{d_\nu} h^\varrho e_\varrho^\nu \in \mathfrak{H}_\nu$ mit $h^\varrho \geqq 0$, $\sum_{\sigma=1}^{d_\nu} h^\sigma = 1$ $(\varrho = 1, \ldots, d_\nu)$. $\mathfrak{B}_\nu$ ist also das von den Spitzen der Basisvektoren aufgespannte Simplex: Die $h \in \mathfrak{B}_\nu$ können als Wahrscheinlichkeits- oder Massenverteilungen interpretiert werden, die sämtlichen $h \in \mathfrak{H}_\nu$ als Ladungsverteilungen (über d_ν Zellen).

In $\mathfrak{H}_\nu$ ist eine Halbordnung gegeben, wenn man $g \geqq h$ als Abkürzung für $g^\varrho \geqq h^\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, d_\nu)$ schreibt. $\mathfrak{H}_\nu$ ist ein Vektorverband bezüglich dieser Halbordnung. Setzt man

$$||h|| = \sum_{\varrho=1}^{d_\nu} |h^\varrho| \qquad \langle h \rangle = \sum_{\varrho=1}^{d_\varrho} h^\varrho,$$

so ist $||h||$ eine Norm, $\langle h \rangle$ eine Linearform in $\mathfrak{H}_\nu$. Für $h \geqq 0$ gilt $||h|| = \langle h \rangle$. Diese Beziehungen sind es, die der allgemeinen Theorie der stationären Markoffschen Prozesse zugrunde liegen (Jacobs [7], [8]). Von Ergebnissen dieser Theorie wird hier laufend Gebrauch gemacht, doch treten obige Anordnungsrelationen nicht explizit in den Vordergrund.

Es sei $\mathfrak{S}_{\mu\nu}$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{H}_\nu$ in $\mathfrak{H}_\mu$, die $P\mathfrak{B}_\nu \subseteq \mathfrak{B}_\mu$ erfüllen. Sie sind durch Rechteckmatrizen p_{ik} (mit d_μ Zeilen und d_ν Spalten) gegeben, welche $p_{ik} \geqq 0$, $\Sigma_j p_{jk} = 1$ erfüllen. Aus $P \in \mathfrak{S}_{\mu\nu}$, $Q \in \mathfrak{S}_{\nu\varrho}$ folgt $PQ \in \mathfrak{S}_{\mu\varrho}$: $\mathfrak{S}_{\mu\nu}\mathfrak{S}_{\nu\varrho} \subseteq \mathfrak{S}_{\mu\varrho}$. Für $\mathfrak{S}_{\nu\nu}$ schreiben wir auch kurz $\mathfrak{S}_\nu$. $\mathfrak{S}_\nu$ ist eine Halbgruppe. Setzt man

$$||P|| = \sup_{||h|| \leq 1} ||Ph|| \tag{3.1}$$

so folgt $||P|| = 1$ für $P \in \mathfrak{S}_{\mu\nu}$. Aus $||Ph - Qh|| < \varepsilon$ $(h \in \mathfrak{B}_\nu)$ folgt $||P - Q|| < \varepsilon$.

Sind für ganzes $t \geqq 0$ und $\nu = 1, \ldots, n$ Funktionen $f_\nu^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)$ von $P_\mu \in \mathfrak{S}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ mit Werten in $\mathfrak{S}_\nu$ gegeben, so sagt man, es sei eine *zeitlich gesteuerte stochastische Regelung* gegeben. Fehlt die t-Abhängigkeit, so spricht man von einer Regelung schlechthin oder von einer stationären Regelung.

Ein diskreter Markoffscher Prozeß für die Person ν ist eine für ganze $t \geqq s \geqq 0$ erklärte Schar $P_\nu(t, s) \in \mathfrak{S}_\nu$ welche

$$P_\nu(t, s) = P_\nu(t, u)\, P_\nu(u, s) \qquad (t \geqq u \geqq s \geqq 0) \tag{3.2}$$

erfüllt. Ist zu jedem $\nu = 1, \ldots, n$ ein Markoffscher Prozeß $P_\nu(t, s)$ gegeben, so nennt man das System $P_1(t, s), \ldots, P_n(t, s)$ einen *Markoffschen n-Personen-Prozeß*. Man sagt, daß dieser Prozeß *der zeitlich gesteuerten Regelung* $f_1^{(t)}(P_1, \ldots, P_n), \ldots, f_n^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)$ *gehorcht*, wenn

$$(3.3) \qquad P_\nu(t+1, t) = f_\nu^{(t)}\big(P_1(t, 0), \ldots, P_n(t, 0)\big) \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots)$$

gilt. Mittels (3.2) und (3.3) kann man den Prozeß rekurrent vollständig berechnen, wenn man die Regelung und die Anfangsdaten $P_\nu(0, 0)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ kennt. Man kann diesen Sachverhalt kurz so beschreiben: Sei

$$T^{(t)}(P_1, \ldots, P_n) = \big(f_1^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)\, P_1, \ldots, f_n^{(t)}(P_1, \ldots, P_n) P_n\big) \quad (P_\nu \in \mathfrak{S}_\nu;\ t = 1, 2, \ldots).$$

Dies ist eine Abbildung des kartesischen Produkts $\mathfrak{S}_1 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n$ in sich. Es gilt

$$\begin{aligned}\big(P_1(t+1, 0) \ldots, P_n(t+1, 0)\big) &= T^{(t)}\big(P_1(t, 0), \ldots, P_n(t, 0)\big) \\ &= T^{(t)}\, T^{(t-1)} \ldots T^{(0)}\big(P_1(0, 0), \ldots, P_n(0, 0)\big).\end{aligned}$$

Ist die Regelung stationär, so ist $T^{(t)}$ t-unabhängig, etwa $T^{(t)} = T$.

Unser Interesse gilt dem asymptotischen Verhalten des Prozesses, d.h. der Schar $\big(P_1(t, 0), \ldots, P_n(t, 0)\big)$ $(t \geqq 0)$. Dies läuft, wenn man so will, auf die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Produkte $T^{(t)}\, T^{(t-1)} \ldots T^{(0)}$ bzw., im stationär-geregelten Falle, der Potenzen T^t hinaus. Dies ist ein *Ergodenproblem*, das im stationären Falle prinzipiell mit den Mitteln der Kryloff-Bogoliouboffschen Theorie ([*13*], OXTOBY [*19*]) anzugehen wäre. Indessen erweist es sich als zweckmäßig, die ursprüngliche Auffassung eines „Systems gekoppelter nichtstationärer Ergodenprobleme" beizubehalten. Man kommt dann zu schärferen Resultaten, als jene Theorie zu liefern imstande ist.

Der n-Personen-Prozeß $\big(P(t, s)\big)$ heißt *asymptotisch-periodisch*, wenn es zu jedem s reinperiodische Folgen $Q_\nu(t, s)$ $(t = s+1, s+2, \ldots)$ mit

$$(3.4) \qquad \lim_{t \to \infty} \|P_\nu(t, s) - Q_\nu(t, s)\| = 0$$

gibt, deren Perioden von s unabhängig gewählt werden können. Durch diese Forderungen sind die Folgen $Q_\nu(t, s)$, falls sie überhaupt existieren, eindeutig bestimmt. Sind sie konstant, so heißt der Prozeß *konvergent*. Notwendig und hinreichend für asymptotische Periodizität mit der Periode d ist folgende Bedingung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $A > 0$ mit

$$\|P_\nu(t + k d, s) - P_\nu(t + l d, s)\| < \varepsilon \qquad (t > s + A;\ k, l > 0).$$

Der aus dem n-Personen-Prozeß $P_1(t, s), \ldots, P_n(t, s)$ mittels einer festen ganzen Zahl $k > 0$ hervorgehende Prozeß

$$Q_1(t, s), \ldots, Q_n(t, s) \quad \text{mit} \quad Q_\nu(t, s) = P_\nu(t k, s k) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

wird die *Vergröberung* jenes Prozesses um k genannt. Gehorchte der Prozeß $P_1(t, s), \ldots, P_n(t, s)$ der Regelung $f_1^{(t)}, \ldots, f_n^{(t)}$, so gehorcht auch der vergröberte

Prozeß einer Regelung $g_{1k}^{(t)}, \ldots, g_{nk}^{(t)}$. Sie berechnet sich folgendermaßen: Aus (3.3) folgt:

$$P_\nu(t+k,t) = f_\nu^{(t+k-1)}\left(P_1(t+k-1,0), \ldots, P_n(t+k-1,0)\right) P_\nu(t+k-1,t).$$

Wir setzen diesen Ausdruck (nach k-maliger Rekursion)

$$= g_{\nu k}^{(t)}\left(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0)\right).$$

Dann gelten die Rekursionsformeln:

$$g_{\nu 1}^{(t)}\left(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0)\right) = f^{(t)}\left(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0)\right)$$

$$g_{\nu k}^{(t)}\left(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0)\right) = f_\nu^{(t+k-1)}\left[g_{1,k-1}^{(t)}(P_1(t,0), \ldots, \right.$$

$$\ldots, P_n(t,0))\, P_1(t,0), \ldots, g_{n,k-1}^{(t)}(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0))$$

$$\left. P_n(t,0)\right] g_{\nu,k-1}^{(t)}\left(P_1(t,0), \ldots, P_n(t,0)\right).$$

Wir verallgemeinern dies zu

$$(3.5)\quad \begin{cases} g_{\nu k}^{(t)}(P_1, \ldots, P_n) = f_\nu^{(t+k-1)}\left(g_{1,k-1}^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)\, P_1, \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots, g_{n,k-1}^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)\, P_n\right) g_{\nu,k-1}^{(t)}(P_1, \ldots, P_n). \end{cases}$$

Der um k vergröberte Prozeß besitzt dann die Regelung $f_{1k}^{(t)}, \ldots, f_{nk}^{(t)}$ mit

$$(3.6)\qquad f_{\nu k}^{(t)} = g_{\nu k}^{(tk)}.$$

Man nennt sie die k-te Vergröberung der Regelung $f_1^{(t)}, \ldots, f_n^{(t)}$. War die ursprüngliche Regelung stationär, so sind es auch alle Vergröberungen.

2. *Monomiale Regelungen und Steuerungen.* — Es sei $\left(\varphi_1(\Pi_1, \ldots, \Pi_n), \ldots, \varphi_n(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\right)$ ein monomiales Regelungsschema für die Personen $\nu = 1, \ldots, n$, die zugehörigen Mengen von Steuerungsgrößen seien $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ die zugrunde liegenden Zeichenmengen $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$. Sei jedem $\mathsf{A} \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}$ genau ein $A \in \mathfrak{S}_{\mu\nu}$ zugeordnet. Damit ergibt sich zu jedem Wort $\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_n) = \mathsf{A}_0 \Pi_{i_1} \mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_{m-1} \Pi_{i_m} \mathsf{A}_m$ eine Funktion

$$f(P_1, \ldots, P_n) = A_0 P_{i_1} A_1 P_{i_2} \ldots A_{m-1} P_{i_m} A_m \qquad (P_\varrho \in \mathfrak{S}_\varrho)$$

mit Worten aus einem $\mathfrak{S}_{\mu\nu}$. Funktionen dieser Bauart nennen wir *Monome*. Der Zusammensetzung der Wörter entspricht die Multiplikation der Monome (dabei sind stets Kohärenzbedingungen zu beachten). Ist jedem $\mathsf{A} \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}$ eine t-Funktion $A(t)$ mit Werten in $\mathfrak{S}_{\mu\nu}$ zugeordnet, so entsteht nach dem obigen Verfahren aus dem monomialen Regelungsschema eine monomiale Regelung $\left(f_1^{(t)}(P_1, \ldots, P_n), \ldots, f_n^{(t)}(P_1, \ldots, P_n)\right)$. Die Zeitabhängigkeit der $f^{(t)}$ ist hier in den $A(t)$ klar lokalisiert: War

$$(3.7)\qquad \varphi_\nu(\Pi_1, \ldots, \Pi_n) = \mathsf{A}_{\nu 0} \Pi_{i_{\nu 1}} \mathsf{A}_{\nu 1} \ldots \mathsf{A}_{\nu, m_\nu - 1} \Pi_{i_{\nu, m_\nu}} \mathsf{A}_{\nu m_\nu},$$

so nennen wir das System der Funktionen $A_{\nu k}(t)$ die *Steuerung* der monomialen Regelung $(f^{(t)})$. Es ist klar, wann von stationärer bzw. konvergenter

bzw. asymptotisch-periodischer Steuerung zu sprechen ist. Vergleicht man die Rekursionsformeln (3.5) und (1.2), so ergibt sich: das um k vergröberte monomiale Regelungsschema liefert die um k vergröberte monomiale Regelung. Die Steuerung der k-ten Vergröberung einer monomialen Regelung heißt die k-te Vergröberung der ursprünglichen Steuerung.

Anmerkung. Verschiedene monomiale Regelungsschemata können sehr wohl dieselbe Regelung liefern. Wir denken uns im folgenden immer ein Regelungsschema fixiert und übertragen Begriffe wie „Stamm", „Hintermann", „Satellitengürtel" auch auf die zugehörige Regelung bzw. den Markoffschen Prozeß.

§ 4. Ein geometrisches Lemma

Wir fixieren ein ν und lassen den Index ν in diesem Paragraphen stets weg. Wir betrachten abgeschlossene konvexe Mengen $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{V}$. Ein Punkt $h \in \mathfrak{K}$ heißt ein Extremalpunkt von $\mathfrak{K}$, wenn keine Darstellung

$$h = \alpha f + \beta g, \quad f, g \in \mathfrak{K},\ f \neq g,\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$$

möglich ist. $\mathfrak{K}$ ist stets die konvexe abgeschlossene Hülle der Menge aller Extremalpunkte von $\mathfrak{K}$ (MINKOWSKI [15], BOURBAKI [3] (Satz von KREIN-MILMAN)). Hat $\mathfrak{K}$ nur endlichviele Extremalpunkte, so heißt $\mathfrak{K}$ ein Polyeder, die Extremalpunkte von $\mathfrak{K}$ heißen dann auch Ecken. Im folgenden werden nur mehr konvexe Polyeder $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{V}$ betrachtet. Sind $h_1, \ldots, h_r$ die verschiedenen Ecken von $\mathfrak{K}$ und gilt

$$\|h_\varrho - h_\sigma\| \geqq \alpha \geqq 0 \qquad (\sigma \neq \varrho),$$

so sagt man, $\mathfrak{K}$ habe die Weite α. Wegen $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{V}$ gibt es keine Polyeder mit mehr als 1 Ecke, die eine Weite > 2 besitzen. Einpunktigen Polyedern schreiben wir jede Weite $\leqq 2$ zu. Ist $h = \sum_{\varrho=1}^{d} h^\varrho e_\varrho$, so bezeichnen wir die Menge aller ϱ mit $h^\varrho \neq 0$ als den *Träger* von h. Wegen der allgemeinen Relation $\|g \cap h\| = \frac{1}{2}(2 - \|g - h\|)$ ($g, h \in \mathfrak{V}$; $g \cap h$ bezeichnet das Minimum von g und h im Sinne der in § 3 definierten Halbordnung (koeffizientenweise zu verstehen)) folgt aus $\|g - h\| = 2$ ($g, h \in \mathfrak{V}$) stets $g \cap h = 0$, was mit der Trägerfremdheit von g und h gleichbedeutend ist. Ist also ein Polyeder $\mathfrak{K}$ von der Weite 2, so sind seine Ecken paarweise trägerfremd, also gewiß linear unabhängig.

Um fernerhin Polyeder bequem miteinander vergleichen zu können, benützen wir den asymmetrischen Mengenabstand

$$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| = \sup_{g \in \mathfrak{B}} \inf_{h \in \mathfrak{A}} \|g - h\|$$

(für nichtleere $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{H}$). Aus $\mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0 \subseteqq \mathfrak{B}$ folgt $|\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}| \geqq |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| \geqq |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0|$. Es ist $|\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0| = 0$. Umgekehrt folgt aus $|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| = 0$ für abgeschlossenes $\mathfrak{A}$ stets $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{A}$. Mit dem symmetrischen Mengenabstand

$$\|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\| = \tfrac{1}{2}(|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| + |\mathfrak{B}, \mathfrak{A}|)$$

teilt der asymmetrische Abstand folgende Eigenschaften:

1. $$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| \leqq |\mathfrak{A}, \mathfrak{C}| + |\mathfrak{C}, \mathfrak{B}|, \qquad \|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\| \leqq \|\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\| + \|\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\|.$$

2. $$|P\mathfrak{A}, P\mathfrak{B}| \leqq \|P\| \cdot |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}|, \qquad \|P\mathfrak{A}, P\mathfrak{B}\| \leqq \|P\| \cdot \|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\|$$

für lineare Transformationen P.

3. $$|P\mathfrak{A}, Q\mathfrak{A}| \leqq \|P - Q\| \cdot |\{0\}, \mathfrak{A}|, \qquad \|P\mathfrak{A}, Q\mathfrak{A}\| \leqq \|P - Q\| \cdot \|\{0\}, \mathfrak{A}\|$$

für lineare Transformationen P, Q.

Es gilt nun das

Lemma. *Es gibt eine (vom Maximum der Dimensionen d_ν abhängige) Konstante $\Gamma > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ und ist $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{V}_\nu$ ein konvexes Polyeder mit r Ecken und der Weite $2 - \frac{\varepsilon}{\Gamma}$, so ist es ein Simplex, d.h. seine Ecken sind linear unabhängig. Ist $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{V}_\nu$ ein konvexes Polyeder und gilt*

$$|\mathfrak{B}, \mathfrak{A}| < \frac{\Gamma}{\varepsilon}$$

so hat $\mathfrak{B}$ mindestens r Ecken. Hat $\mathfrak{B}$ genau r Ecken, so gilt

$$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| < \varepsilon$$

und es gibt zu jeder Durchzählung $a_1, \ldots, a_r$ bzw. $b_1, \ldots, b_r$ der Ecken von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ genau eine Permutation π der Zahlen $1, \ldots, r$ mit

$$\|a_\varrho - b_{\pi(\varrho)}\| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Beweis. Ein vollständiger Beweis der wesentlichsten Aussagen des Lemmas ist in [8] gegeben worden. Nach der dort gegebenen Abschätzung darf man

$$\Gamma = 2(4d^2 - 2d - 1)(2d - 1)(d - 1) \qquad (d = \max_\nu d_\nu)$$

setzen. Vgl. ferner [10].

§ 5. Das asymptotische Verhalten minimal-autarker Prozesse

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß jeder Markoffsche n-Personen-Prozeß mit monomialer Regelung sich exponentiell-asymptotisch-periodisch verhält (Theorem II). Zunächst fixieren wir den Begriff „exponentiell".

Definition. *Man sagt, die reelle Zahlenfolge a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ konvergiere exponentiell gegen 0, in Zeichen*

$$a_k \to 0 \quad \text{oder} \quad \lim a_k = 0 \qquad \text{(exponentiell)},$$

wenn es reelle Zahlen ϑ, K mit $0 < \vartheta < 1$, $K > 0$ gibt, derart, daß

$$|a_k| \leqq \vartheta^k \qquad (k \geqq K)$$

gilt. Man sagt, eine Folge h_k von Vektoren im R^n konvergiere exponentiell gegen $h \in R^n$, wenn $\|h_k - h\| \to 0$ (exponentiell) gilt. Man sagt, die Folge h_k sei zur

Folge g_k exponentiell-äquivalent, wenn $\|h_k - g_k\| \to 0$ (exponentiell) gilt. Entsprechend seien die Begriffe „exponentiell-konvergent" und „exponentiell-äquivalent" für Folgen linearer Transformationen im R^n erklärt.

Satz 5.1. *Sei a_k $(k=1, 2, \ldots)$ eine reelle Zahlenfolge. Es gilt*

$$a_k \to 0 \qquad \text{(exponentiell)}$$

dann und nur dann, wenn es Zahlen η, A, B mit $0<\eta<1$, $A>0$, $B>0$, sowie eine natürliche Zahl $d>0$ gibt, derart, daß

$$|a_k| \leqq A\,\eta^m$$

für $k - B \geqq m\,d$ gilt.

Beweis. Wir setzen $\vartheta = \sqrt[2d]{\eta}$. Ist $[k] = \max\limits_{n\,d+B\leqq k} n$ $(k \geqq B)$, so gelten die Rechenregeln

$$k \geqq B + [k]\,d, \quad [k + r\,d] = [k] + r \qquad (k \geqq B)$$

und man hat

$$|a_k| \leqq A\,\eta^{[k]} \qquad (k \geqq B).$$

Bestimmt man m derart, daß

$$A\,\eta^m \leqq 1$$

gilt, so kommt

$$|a_{k+(m+B)d}| \leqq A\,\eta^{[k+(m+B)d]} = A\,\eta^{[k]+(m+B)} \cdot$$
$$\leqq \eta^{[k]+B} \leqq \vartheta^{2([k]d+B)} \leqq \vartheta^{2k}$$

oder — für $k \geqq (m+B)\,d+1$ —

$$|a_k| \leqq \vartheta^{(k-(m+B)d)} = \vartheta^k\,\vartheta^{k-2(m+B)d}$$

Wählt man $K \geqq (m+B)\,d+1$ so, daß $\vartheta^{k-2(m+B)d} \leqq 1$ $(k \geqq K)$ gilt, so folgt offenbar die Behauptung.

Satz 5.2. *Es seien $A_k, B_k, \ldots, C_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ Folgen linearer Abbildungen gewisser linearer Räume in gewisse andere lineare Räume. Sind X_k, $Y_k, \ldots, Z_k$ zu jenen Folgen bzw. exponentiell-äquivalente Folgen so sind auch die Folgen*

$$\alpha A_k + \beta B_k + \cdots + \gamma C_k, \quad A_k B_k \ldots C_k$$

und

$$\alpha X_k + \beta Y_k + \cdots + \gamma Z_k, \quad X_k Y_k \ldots Z_k$$

(mit beliebigen, festen reellen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$) bzw. zueinander exponentiell-äquivalent, falls die angegebenen Bildungen (Linearkombinationen bzw. Produkte) sinnvoll sind.

Beweis. Offenbar kann man ein einziges ϑ mit $0<\vartheta<1$ und ein $K>0$ mit

$$\|A_k - X_k\| \leqq \vartheta^k, \ldots, \|C_k - Z_k\| \leqq \vartheta^k \qquad (k \geqq K)$$

finden. Es gilt

$$\|(\alpha A_k + \cdots + \gamma C_k) - (\alpha X_k + \cdots + \gamma Z_k)\| \leqq (|\alpha| + \cdots + |\gamma|)\,\vartheta^k \qquad (k \geqq K),$$

woraus sich nach Satz 5.1 die exponentielle Äquivalenz der linearkombinierten Folgen ergibt. Ist Γ eine Schranke für sämtliche betrachteten Folgen, so schätzt man ab:

$$\begin{aligned}&\|A_k B_k \dots C_k - X_k Y_k \dots Z_k\| \\ &\quad \leqq \|(A_k - X_k) B_k \dots C_k\| + \|X_k (B_k - Y_k) \dots C_k\| + \dots + \|X_k Y_k \dots (C_k - Z_k)\| \\ &\quad \leqq n \Gamma^{n-1} \vartheta^k \qquad (k \geqq K)\end{aligned}$$

falls es sich um jeweils n Folgen handelt. Nach Satz 5.1 ist nunmehr alles bewiesen.

Es sei nun $\varphi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_n), \dots, \varphi_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ ein minimal-autarkes Regelungsschema für n Personen. Sodann gehen wir zu einem Markoffschen n-Personen-Prozeß $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ [in Räumen $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ mit zugehörigen Simplizes $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ und Transformationsmengen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \dots, n)$] über, dessen Steuerung exponentiell-äquivalent zu einer reinperiodischen Steuerung sei. Wir bemerken zunächst: Nach geeigneter Vergröberung ist die Steuerung des Prozesses exponentiell-konvergent. Dies ist aus (3.6) zu entnehmen. Man kann jeden exponentiell-asymptotisch periodischen Prozeß durch Vergröberung um die Periodenlänge exponentiell-konvergent machen.

Theorem I. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte minimal-autarke Markoffsche n-Personen-Prozeß ist selbst wieder exponentiell-asymptotisch periodisch, d.h. für jedes feste s sind die Folgen $P_\nu(t, s)$ $(t = s+1, s+2, \dots)$ zu reinperiodischen Folgen (mit s-unabhängig wählbarer Periodenlänge) exponentiell-äquivalent.*

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Wir beweisen zunächst einen Satz, der einen Spezialfall erledigt.

Satz 5.3. *Ist $P(s, t)$ ein Markoffscher Prozeß und gilt*

$$\lim_{t \to \infty} P(t+1, t) = P \qquad \text{(exponentiell)},$$

so kann man eine natürliche Zahl $d > 0$ derart bestimmen, daß die Folge P^{kd} $(k = 1, 2, \dots)$ exponentiell konvergiert. Dann ist die Vergröberung des Prozesses um d exponentiell konvergent.

Beweis. Offenbar genügt es, die Konvergenz der Folge $P(td, 0)$ $(t = 1, 2, \dots)$ zu beweisen. Wir wählen d so, daß

$$\lim_{t \to \infty} P^{td} = R \qquad \text{(exponentiell)}$$

gilt; nach der Theorie der stationären Prozesse (vgl. etwa Jacobs [7]) ist dies stets möglich. Nach Satz 5.2 gibt es ein ϑ und ein T mit $0 < \vartheta < 1$, $T > 0$ und

$$\left.\begin{aligned} \|P((t+1)d, td) - P^d\| &\leqq \vartheta^t \quad (5.1) \\ \|P^{dt} - R\| &\leqq \vartheta^t \quad (5.2) \end{aligned}\right\} \qquad (t \geqq T)$$

Für $t > T$ und beliebige ganze $k, l > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} &\| P((2t+k)d, 0) - P((2t+l)d, 0) \| \\ &\quad \leqq \| P((2t+k)d, td) - P((2t+l)d, td) \| \\ &\quad \leqq \| P^{(2t+k-t)d} - P^{(2t+l-t)d} \| + \frac{2\vartheta^t}{1-\vartheta} \qquad \text{[wegen (5.1)]} \\ &\quad \leqq 2\vartheta^t + \frac{2\vartheta^t}{1-\vartheta} \qquad \text{[wegen (5.2)]}, \end{aligned}$$

womit nach Satz 5.1 alles bewiesen ist.

Nimmt man den nachstehenden Satz 5.4 zu Hilfe, so ist mit Satz 5.3 das Theorem I für den Fall, daß Σ aus einem einzigen Spieler besteht, in dessen Regelungswort sein Zeichen Π nicht vorkommt (mehrere solche Spieler mit „purer Steuerung" kann es wegen der Minimal-Autarkie nicht geben) bewiesen. Wir können im folgenden also immer annehmen, daß sämtliche Regelungsworte positiven Grad besitzen.

Der Beweis von Satz 5.3 lehrt, daß es gewöhnlich bequemer ist, die exponentiell-asymptotische Konvergenz einer Vergröberung eines Prozesses zu beweisen, als die exponentielle asymptotische Periodizität des Prozesses selbst. Es gilt der

Satz 5.4. *Es sei ein exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerter Markoffscher n-Personen-Prozeß mit monomialer Regelung gegeben. Gibt es eine exponentiell-konvergente Vergröberung des Prozesses, so ist der Prozeß selbst exponentiell-asymptotisch periodisch.*

Beweis. Es seien $P_1(t, s), \ldots, P_n(t, s)$ die beteiligten Einzelprozesse und es gelte

$$\lim_{t\to\infty} P_\nu(td, sd) = P_\nu(sd) \qquad \text{(exponentiell,} \qquad \nu = 1, \ldots, n).$$

Wir können annehmen (Vergröberung!), daß d zugleich eine asymptotische Periode der Steuerung ist. Sei $f_1^{(t)}, \ldots, f_n^{(t)}$ die Regelung des (nicht vergröberten) Prozesses. Dann ist

$$(5.3) \quad \begin{cases} P_\nu(td+k, td+k-1) \\ \quad = f_\nu^{(td+k-1)}\left(P_1(td+k-1, 0), \ldots, P_n(td+k-1, 0)\right) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mittels Satz 5.2 gewinnt man daher sukzessive die exponentielle Konvergenz der linken Seiten von (5.3) für $t \to \infty$ bei festem k. Der Limes sei $Q(k)$. Offenbar gilt

$$\lim_{t\to\infty} P_\nu(td+k, sd) = Q_\nu(k)\, Q_\nu(k-1) \ldots Q_\nu(1)\, P_\nu(sd) \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Die rechte Seite hängt offenbar reinperiodisch mit der Periode d von k ab:

$$Q_\nu(d)\, Q_\nu(d-1) \ldots Q_\nu(1)\, P_\nu(sd) = P_\nu(sd).$$

Mittels Satz 5.2 folgert man nun leicht, daß $P_\nu(t, sd)$ zu dieser Folge exponentiell-äquivalent ist. Es ist klar, daß man die exponentiell-asymptotische

Periodizität der Folgen $P_\nu(t, s)$ $(t = s+1, s+2, \ldots)$ für alle s hat, wenn man sie für alle sd hat; q. e. d.

Zum Beweis von Theorem I genügt es also, die exponentielle Konvergenz einer Vergröberung des Prozesses zu beweisen.

Wir beweisen nun in loser Folge weitere Aussagen. Einige der dabei verwendeten Beweisideen kommen im Spezialfalle $n = 1$ wesentlich durchsichtiger heraus; sie sind in [*10*] publiziert.

1. Wir denken uns den Prozeß von vornherein so vergröbert, daß die Initialabbildung des zugehörigen Regelungsschemas idempotent und die Steuerung des Prozesses exponentiell konvergent wird. Ferner können wir annehmen (Vergröberung!), daß in jedem der Regelungsworte $\varphi_\nu(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ sämtliche Zeichen $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ wirklich vorkommen (wegen der Minimal-Autarkie). Es sei Σ die Menge aller Spieler und Σ_0 der Stamm. Wir befassen uns vorerst mit den Spielern $\nu \in \Sigma_0$. Hier gilt eine Zerlegung

$$P_\nu(t+1, t) = A_{\nu 0}(t)\, P_\nu(t, 0)\, M_\nu(t)$$

mit passenden $M_\nu(t)$ und exponentiell-konvergentem $A_{\nu 0}(t)$:

$$\lim_{t \to \infty} A_{\nu 0}(t) = A_{\nu 0} \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Durch Induktion gewinnen wir eine Darstellung

$$(5.4) \qquad P_\nu(t, s) = A_{\nu 0}(t-1)\, A_{\nu 0}(t-2) \ldots A_{\nu 0}(s)\, P_\nu(s, 0)\, M_\nu(t, s) \qquad (t > s > 0)$$

mit passenden $M_\nu(t, s)$. Insbesondere ist für ganzes $d > 0$

$$P_\nu\big((t+1)\,d, t\,d\big) = B_{\nu 0}(t)\, P_\nu(t\,d, 0)\, N_\nu(t)$$

mit passenden $N_\nu(t)$ und $B_{\nu 0}(t) = A_{\nu 0}\big((t+1)\,d-1\big)\, A_{\nu 0}\big((t+1)\,d-2\big) \ldots A_{\nu 0}(t\,d)$, d. h.

$$\lim_{t \to \infty} B_{\nu 0}(t) = A_{\nu 0}^d \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Man kann d so wählen, daß $A_{\nu 0}^{dk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ exponentiell konvergiert. Wir sehen also: Wir können uns die eingangs erwähnte Vergröberung gleich soweit getrieben denken, daß für $\nu \in \Sigma_0$ die Folgen $A_{\nu 0}^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ exponentiell konvergieren. Dies setzen wir von jetzt ab stets voraus. Damit wird auch der durch

$$Q_\nu(t, s) = A_{\nu 0}(t-1) \ldots A_{\nu 0}(s) \qquad (t \geqq s > 0)$$

definierte Prozeß exponentiell konvergent (Satz 5.3).

2. *Es gibt ϑ, K mit $0 < \vartheta < 1$ und $K > 0$, derart, daß für $\nu \in \Sigma_0$*

$$\| P_\nu(t, s) - P_\nu(s, 0) M_\nu(t, s) \| \leqq \vartheta^s \qquad (t \geqq s > K)$$

gilt.

Beweis. Für $t \geqq s > L > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P_\nu(s, 0) &= P_\nu(s, L)\, P_\nu(L, 0) \\ &= Q_\nu(s, L)\, P_\nu(L, 0)\, M_\nu(L, 0)\, P_\nu(L, 0). \end{aligned}$$

Wir haben deshalb

$$\begin{aligned}||P_\nu(t,s) - P_\nu(s,0)\,M_\nu(t,s)|| &= ||\,Q_\nu(t,s)\,P_\nu(s,0)\,M_\nu(t,s) - P_\nu(s,0)\,M_\nu(t,s)|| \\ &\leqq ||\,Q_\nu(t,s)\,P_\nu(s,0) - P_\nu(s,0)|| \\ &\leqq ||\,Q_\nu(t,s)\,Q_\nu(s,L) - Q_\nu(s,L)|| \\ &= ||\,Q_\nu(t,L) - Q_\nu(s,L)||\,.\end{aligned}$$

Nach Nr. 1 folgt die Behauptung.

3. Ist $t_k\to\infty$, $s_k\to\infty$, $P_\nu(t_k,0)\to P_\nu'$, $P_\nu(s_k,0)\to P_\nu''$, $\nu\in\Sigma_0$, so gilt $P_\nu'\,\mathfrak{B}_\nu = P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu$, m.a.W. die Menge $P_\nu'\,\mathfrak{B}$ ist von der Wahl der Folge t_k unabhängig. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}_{\nu 0}$. $\mathfrak{B}_{\nu 0}$ ist ein in $\mathfrak{B}$ enthaltenes Simplex der Weite 2 (d.h. mit paarweise trägerfremden Ecken).

Beweis. Man kann durch Übergang zu Teilfolgen $t_k > s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ erreichen. Dann ist

$$\begin{aligned}&|P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu(t_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu| \\ &\quad = |P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu(t_k,s_k)\,P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu| \\ &\quad \leqq |P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu(s_k,0)\,M_\nu(t_k,s_k)\,P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu| + \vartheta^k \\ &\quad \leqq |P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu(s_k,0)\,\mathfrak{B}_\nu| + \vartheta^k = \vartheta^k\end{aligned}$$

nach Nr. 2 sobald $s_k > K$ erreicht ist. Im Limes folgt hieraus $|P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu'\,\mathfrak{B}_\nu| = 0$. Aus Symmetriegründen gilt auch $|P_\nu'\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu| = 0$, woraus wegen der Abgeschlossenheit der beteiligten Mengen $P_\nu'\,\mathfrak{B}_\nu = P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu$ folgt.

Nach Nr. 2 gilt für $t \geqq s > K$

$$||P_\nu(t,0) - P_\nu(s,0)\,M_\nu(t,s)\,P_\nu(s,0)|| \leqq \vartheta^s. \tag{5.5}$$

Sorgen wir (Teilfolge!) auch noch für $M_\nu(t_k, s_k)\to M_\nu$, so kommt $P_\nu' = P_\nu''\,M_\nu\,P_\nu''$, und damit

$$\mathfrak{B}_{\nu 0} = P_\nu'\,\mathfrak{B}_\nu = P_\nu''\,M_\nu\,P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu = P_\nu''\,M_\nu\,\mathfrak{B}_{\nu 0} \subseteqq P_\nu''\,M_\nu\,\mathfrak{B}_\nu \subseteqq P_\nu''\,\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}_{\nu 0}.$$

Hier gilt also überall Gleichheit:

$$\mathfrak{B}_{\nu 0} = P_\nu''\,M_\nu\,\mathfrak{B}_{\nu 0} = P_\nu''\,M_\nu\,\mathfrak{B}_\nu.$$

Aus der Theorie der stationären Prozesse [7] folgt nun die Behauptung.

4. Für $\nu\in\Sigma_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} |P_\nu(t,s)\,\mathfrak{B}_\nu,\, \mathfrak{B}_{\nu 0}| = 0 \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Beweis. Es ist $P_\nu(t,s)\,\mathfrak{B}_\nu \geqq P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu \geqq P_\nu(t,0)\,M_\nu(u, P_\nu t)\,(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu$, und dies liefert

$$|P_\nu(t,s)\,\mathfrak{B}_\nu,\, \mathfrak{B}_{\nu 0}| \leqq |P_\nu(t,0)\,M_\nu(u,t)\,P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, \mathfrak{B}_{\nu 0}| \qquad (u > t > K).$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ kann man $u > t$ so bestimmen, daß weiter gilt:

$$\begin{aligned}&< |P_\nu(t,0)\,M_\nu(u,t)\,P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu,\, P_\nu(u,0)\,\mathfrak{B}_\nu| + \varepsilon \\ &\leqq \vartheta^t + \varepsilon \qquad \text{[nach (5.5)]}.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$|P_\nu(t,s)\,\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}_{\nu 0}| \leqq \vartheta^t \qquad \text{q. e. d.}$$

5. Für $\nu \in \Sigma_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} ||P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}_{\nu 0}|| = 0.$$

Beweis. Aus Nr. 4 folgt

$$\lim_{t\to\infty} |P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}_{\nu 0}| = 0 \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Daß auch

$$\lim_{t\to\infty} |\mathfrak{B}_{\nu 0}, P_\nu(t,0)\,\mathfrak{B}_\nu| = 0$$

gilt, ist mittels Nr. 3 leicht indirekt zu sehen.

6. Wir wenden uns nun auch den Spielern $\nu \in \Sigma - \Sigma_0$ zu. Für sie besteht eine Zerlegung

$$P_\mu(t+1,0) = A_{\mu 0}(t)\,P_\nu(t,0)\,M_\mu(t,0) \tag{5.6}$$

mit passenden $\nu \in \Sigma_0$ und $M_\mu(t,0)$. Es gilt etwa

$$\lim_{t\to\infty} A_{\mu 0}(t) = A_{\mu 0} \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Wir setzen $\mathfrak{B}_{\mu 0} = A_{\mu 0}\mathfrak{B}_{\nu 0}$. Damit ist $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ für alle $\mu \in \Sigma$ definiert. Es gilt:

Sämtliche $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ ($\mu \in \Sigma$) sind Simplizes der Weite 2 (d.h. mit paarweise trägerfremden Ecken). Sie haben sämtlich gleichviele Ecken — sagen wir: r Stück. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} ||P_\mu(t,0)\,\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| = 0 \qquad (\mu \in \Sigma).$$

Beweis. Ist $\mu \in \Sigma - \Sigma_0$, so können wir $\nu \in \Sigma_0$ wie oben bestimmen. Nach den in Nr. 1 erreichten Voraussetzungen gibt es neben (5.6) auch eine Zerlegung

$$P_\nu(t+2,0) = B_\nu(t+1)\,P_\mu(t+1,0)\,C_\nu(t+1). \tag{5.7}$$

Wir sorgen nun für

$$\begin{cases} P_\nu(t_k,0) \to P_\nu, & P_\nu(t_k+2,0) \to P'_\nu, & M_\mu(t_k,0) \to M_\mu \\ B_\nu(t_k+1) \to B_\nu, & C_\nu(t_k+1) \to C_\nu \end{cases} \tag{5.8}$$

und haben wegen (5.6) $P_\mu(t_k+1,0) \to A_{\mu 0}P_\nu M_\mu = P'_\mu$. Aus (5.7), (5.8) und Nr. 5 ergibt sich:

$$P'_\mu\,\mathfrak{B}_\mu = A_{\mu 0}P_\nu M_\mu\,\mathfrak{B}_\mu \leqq A_{\mu 0}P_\nu\,\mathfrak{B}_\nu = A_{\mu 0}\mathfrak{B}_{\nu 0} = \mathfrak{B}_{\mu 0} \tag{5.9}$$

$$\mathfrak{B}_{\nu 0} = P'_\nu\,\mathfrak{B}_\nu = B_\nu P'_\mu C_\nu\,\mathfrak{B}_\nu \leqq B_\nu P'_\mu\,\mathfrak{B}_\mu \leqq B_\nu\,\mathfrak{B}_{\mu 0} = B_\nu A_{\mu 0}\mathfrak{B}_{\nu 0}. \tag{5.10}$$

Hat $\mathfrak{B}_{\nu 0}$ r Ecken, so hat $B_\mu A_{\mu 0}\mathfrak{B}_{\nu 0}$ höchstens r Ecken und höchstens die Weite 2, enthält aber ein Simplex mit r Ecken und der Weite 2. Nach dem Lemma (§ 4) gilt also in (5.10) überall Gleichheit. Per definitionem hat $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ höchstens r Ecken und höchstens die Weite 2, und dasselbe gilt für $B_\nu\mathfrak{B}_{\mu 0}$.

Wegen $\mathfrak{B}_{\nu 0} = B_\nu \mathfrak{B}_{\mu 0}$ hat $B_\nu \mathfrak{B}_{\mu 0}$ genau r Ecken und die Weite 2 und dasselbe gilt für $\mathfrak{B}_{\mu 0}$. Analog folgt die Gleichheit in (5.9). Da man vor der Erzwingung der Konvergenzen (5.8) stets für die Konvergenz von $P_\mu(t_k+1, 0)$ sorgen kann, folgert man leicht:

$$\lim_{t\to\infty} ||P_\mu(t, 0)\,\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| = 0.$$

Durch völlig analoge Betrachtungen wie oben zeigt man, daß alle $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ r Ecken besitzen; q. e. d.

7. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $T(\varepsilon)>0$ mit

$$||P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu,\ \mathfrak{B}_{u 0}|| < \varepsilon \tag{5.11}$$

$$||P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| < \varepsilon \qquad (t > s \geqq T(\varepsilon), \mu \in \Sigma) \tag{5.12}$$

Beweis. Sei $\mu \in \Sigma$. Zunächst ist (5.11) fast trivial. Wir wählen $A(\varepsilon)>0$ derart, daß

$$||P_\nu(s, 0)\,\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (s \geqq A(\varepsilon)) \tag{5.13}$$

gilt. Für $t>s\geqq A(\varepsilon)$ hat man dann

$$||P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| \leqq ||P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}, P_\mu(t, s)\,P_\mu(s, 0)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}|| + ||P_\mu(t, 0)\,\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| < \varepsilon.$$

Wir schließen sogleich:

$$|P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}_{\mu 0}| \leqq |P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}| < \varepsilon.$$

Für beliebiges $\mu \in \Sigma$ haben wir eine Zerlegung

$$P_\mu(t, s) = A_\mu(t, s)\,P_\nu(s, 0)\,B_\mu(t, s)$$

mit passenden $A_\mu(t, s)$, $B_\mu(t, s)$, ν. Aus (5.13) folgt

$$\begin{aligned}
&|A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}, P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu| \\
&\quad \leqq |A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}, A_\mu(t, s)\,P_\nu(s, 0)\,\mathfrak{B}_\nu| + |A_\mu(t, s)\,P_\nu(s, 0)\,\mathfrak{B}_\nu, P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{2} + |A_\mu(t, s)\,P_\nu(s, 0)\,B_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu, P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu| \\
&\quad = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (t > s \geqq A(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
|A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}| &\leqq |A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}, P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}| + |P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\mu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}| \\
&\leqq |A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}, P_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_\mu| + \varepsilon \\
&< \tfrac{3}{2}\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir: $A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}$ ist ein Simplex mit höchstens r Ecken und einer Weite $\leqq 2$. Nach dem Lemma (§ 4) hat $A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}$ genau r Ecken und es gilt

$$|\mathfrak{B}_{\mu 0}, A_\mu(t, s)\,\mathfrak{B}_{\nu 0}| < \frac{3r}{2}\,\varepsilon.$$

$A_\mu(t,s)\,\mathfrak{V}_{\nu 0}$ hat die Weite $2-3\varepsilon$. Daraus ergibt sich mit (5.13)

$$|\mathfrak{V}_{\mu 0}, P_\mu(t,s)\,\mathfrak{V}_\mu| < \tfrac{1}{2}(3\Gamma+1)\,\varepsilon.$$

Für $T(\varepsilon) = A\left(\frac{2\varepsilon}{3\Gamma+1}\right)$ folgt daher die Behauptung.

Satz 5.5. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte minimalautarke Markoffsche n-Personen-Prozeß mit monomialer Regelung ist asymptotisch-periodisch.*

Beweis. Wir wählen ein später noch näher zu fixierendes $\varepsilon>0$ mit $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Dann gilt für $t>s\geqq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)$

$$||P_\mu(t,s)\,\mathfrak{V}_{\mu 0}, \mathfrak{V}_{\mu 0}|| < \frac{\varepsilon}{\Gamma}$$

Nach dem Lemma gibt es nach fixierter Numerierung $e_1^\mu, \ldots, e_r^\mu$ der Ecken von $\mathfrak{V}_{\mu 0}$ Permutationsscharen $\pi_\mu(t,s)\left(t>s\geqq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)\right)$, derart, daß

$$||P_\mu(t,s)\,e_\varrho^\mu - e^\mu_{\pi_\mu(t,s)\,\varrho}|| < \varepsilon \qquad \left(\varrho=1,\ldots,r;\, t>s\geqq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)\right)$$

gilt. Man verifiziert leicht:

$$\pi_\mu(t,s) = \pi_\mu(t,u)\,\pi_\mu(u,s) \qquad \left(t>u>s\geqq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)\right).$$

Nun betrachten wir die Folge

$$\Lambda(t) = [\pi_1(t,s), \ldots, \pi_n(t,s)] \qquad (t=s+1, s+2, \ldots)$$

für festes $s>T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)$. Sie ist nur endlichvieler Werte fähig [höchstens $a=(r!)^n$], also gibt es zwei Werte t, u mit $t+a>u>t>s$ und $\pi_\mu(u,s)=\pi_\mu(t,s)$ $(\mu=1,\ldots,n)$, d.h.

$$\pi_\mu(u,t) = 1 \qquad (\mu=1,\ldots,n). \tag{5.14}$$

Hieraus folgt $||P_\mu(u,t)\,e_\varrho^\mu - e_\varrho^\mu|| < \varepsilon$ und somit $||P_\mu(u,t)\,g-g|| < \varepsilon$ $(g\in\mathfrak{V}_{\mu 0})$. Benützen wir (5.13), so ergibt sich für $h\in\mathfrak{V}_\mu$, mit passendem $g\in\mathfrak{V}_{\mu 0}$

$$\begin{aligned} ||P_\mu(u,s)\,h - P_\mu(t,s)\,h|| &= ||P_\mu(u,t)\,P_\mu(t,s)\,h - P_\mu(t,s)\,h|| \\ &< \frac{2\varepsilon}{\Gamma} + ||P_\mu(u,t)\,g-g|| < \left(\frac{2}{\Gamma}+1\right)\varepsilon \end{aligned}$$

d.h.

$$||P_\mu(u,s) - P_\mu(t,s)|| < \left(\frac{2}{\Gamma}+1\right)\varepsilon.$$

Nun wählen wir $\delta>0$ mit $\delta<\frac{1}{2}$ beliebig und bestimmen nachträglich unser ε mit $0<\varepsilon<\dfrac{\delta}{2\left(\frac{2}{\Gamma}+1\right)}$, sowie ein $S(\delta)$ mit $S(\delta)>T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)>0$ derart, daß

aus $||P_\mu - Q_\mu|| < \left(\frac{2}{\Gamma}+1\right)\varepsilon$ $(\mu=1,\ldots,n)$ und $0<k<a$ stets

$$||f_{\mu k}^{(t)}(P_1,\ldots,P_n) - f_{\mu k}^{(s)}(Q_1,\ldots,Q_n)|| < \delta \qquad (t,s\geqq S(\delta), \mu=1,\ldots,n)$$

folgt. Wegen der in Nr. 1 bereits erreichten Konvergenz der Steuerung, und wegen der monomialen Gestalt der $f_{\mu k}^{(t)}$ ist dies stets erreichbar. War bei unserer obigen Überlegung von vornherein für $s \geqq S(\delta)$ gesorgt, so ergibt sich aus (5.14)

$$||P_\mu(u+k,u) - P_\mu(t+k,t)|| < \delta \qquad (0 \leqq k \leqq a).$$

Setzen wir insbesondere $k = u - t$, so folgt

$$\begin{aligned}||P_\mu(u+k,u)\, e_\varrho^\mu - e_\varrho^\mu|| &\leqq ||P_\mu(u+k,u)\, e_\varrho^\mu - P_\mu(t+k,t)\, e_\varrho^\mu|| \\ &\quad + ||P_\mu(t+k,t)\, e_\varrho^\mu - e_\varrho^\mu|| < \delta + \varepsilon < 1,\end{aligned}$$

was nur mit $\pi_\mu(u+k,u) = \pi_\mu(t+2k, t+k) = 1$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ vereinbar ist. Durch Iteration dieses Schlusses ergibt sich

$$\pi_\mu(t+pk, t+qk) = 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, n;\ p > q > 0).$$

Hieraus folgt analog wie oben, daß für beliebiges $s > 0$

$$||P_\mu(t+pk, s) - P_\mu(t+qk, s)|| < \delta \qquad (t \geqq S(\delta);\ p, q > 0)$$

gilt. Da $\delta > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Nun ist die Geschwindigkeit der asymptotischen Annäherung abzuschätzen. Der nachstehende Satz gilt für beliebige Markoffsche Prozesse. Wir können uns etwa einen Spieler ν fest herausgegriffen denken und lassen den Index ν in der Diskussion dieses Satzes einfach weg.

Satz 5.6. *Der Markoffsche Prozeß $P(t,s)$ besitze nachstehende Eigenschaften: Für jedes s existiert*

$$P(\infty, s) = \lim_{t\to\infty} P(t,s). \tag{5.15}$$

Ferner existiert

$$P = \lim_{t\to\infty} P(t+1, t)$$

und es gilt

$$P(\infty, s)\,\mathfrak{V} = P\,\mathfrak{V}.$$

Dann ist die Menge $P\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ ein Simplex der Weite 2. Gilt

$$\lim_{t\to\infty} |P(t,s)\,\mathfrak{V}, \mathfrak{V}_0| = 0 \qquad \textit{(exponentiell)}, \tag{5.16}$$

so finden auch die Grenzübergänge (5.15) mit exponentieller Geschwindigkeit statt.

Beweis. 1. Aus $P(t+1, s) = P(t+1, t)\,P(t, s)$ folgt durch Grenzübergang

$$P(\infty, s) = P\,P(\infty, s) \tag{5.17}$$

und somit

$$\mathfrak{V}_0 = P(\infty, s)\,\mathfrak{V} = P\,P(\infty, s)\,\mathfrak{V} = P\,\mathfrak{V}_0 = P\,\mathfrak{V}.$$

Aus der Theorie der stationären Markoffschen Prozesse folgt dann: $\mathfrak{V}_0$ ist ein in $\mathfrak{V}$ enthaltenes Simplex mit paarweise trägerfremden Ecken $e_1, \ldots, e_r$.

2. Sei $\mathfrak{V}_\varrho(s) = \{h \mid h \in \mathfrak{V},\ P(\infty, s)\,h = e_\varrho\}$. Das ist eine konvexe kompakte Menge in $\mathfrak{V}$. Wählen wir $g_\varrho(0) \in \mathfrak{V}_\varrho(0)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ beliebig, aber nunmehr fest, so ist das von den $g_\varrho(0)$ erzeugte Simplex $\mathfrak{V}(0)$ von der Weite 2. Setzen

wir $P(s,0)\,\mathfrak{V}(0)=\mathfrak{V}(s)$, so ist

$$P(\infty,s)\,\mathfrak{V}(s)=\mathfrak{V}_0$$

und $\mathfrak{V}(s)$ ist ein Simplex der Weite 2, mit den Ecken $g_\varrho(s)=P(s,0)\,g_\varrho(0)$, die $P(\infty,s)\,g_\varrho(s)=e_\varrho$ erfüllen. Zu jedem $h\in\mathfrak{V}$ gibt es ein $g\in\mathfrak{V}(s)$ mit $P(\infty,s)\,(h-g)=0$, d.h.

(5.18) $$\lim_{t\to\infty} P(\infty,\varrho)\,(h-g)=0.$$

Wir zeigen nun, daß diese Konvergenz exponentiell ist.

3. Sei $\mathfrak{F}(s)=\{h\,|\,P(\infty,s)\,h=0\}$, $\mathfrak{E}=\{h\,|\,\|h\|\leqq 1\}$, $\mathfrak{E}(s)=\mathfrak{F}(s)\cap\mathfrak{E}$, $P\,\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0$ (von $\mathfrak{V}_0$ erzeugt). Dann gilt

$$P(t,s)\,\mathfrak{E}(s)\subseteqq\mathfrak{E}(t)\qquad(t>s).$$

4. Es gilt

$$\lim_{s\to\infty}\|P(\infty,s)\,h-h\|=0\qquad(h\in\mathfrak{H}_0).$$

Es genügt, dies für $h\in\mathfrak{V}_0$ zu beweisen. Wir bestimmen $g\in\mathfrak{V}$ derart, daß $P(\infty,0)\,g=h$ gilt, ferner $S(\varepsilon)>0$ derart, daß

$$\|P(s,0)-P(\infty,0)\|<\varepsilon\qquad(s\geqq S(\varepsilon))$$

gilt. Für $s\geqq S(\varepsilon)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|P(\infty,s)\,h-h\|&\leqq\|P(\infty,s)\,h-P(\infty,s)\,P(s,0)\,g\|\\&\quad+\|P(\infty,0)\,g-h\|\leqq\|h-P(s,0)\,g\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Allgemein ist

$$\|P(\infty,s)\,h-h\|\leqq\varepsilon\|h\|\qquad(s\geqq S(\varepsilon),\,h\in\mathfrak{H}_0).$$

5. Ist $h\in\mathfrak{F}(s)$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $s\geqq S\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ und $|\mathfrak{H}_0,\{h\}|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$, so gilt

$$\|h\|<\varepsilon.$$

Für passendes $g\in\mathfrak{H}_0$ ist nämlich $\|h-g\|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$. Es gilt

$$\|P(\infty,s)\,g-g\|\leqq\frac{\varepsilon}{3}\|g\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|h\|\leqq\|g\|+\frac{\varepsilon}{3}&\leqq\|P(\infty,s)\,g\|+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\|g\|\\&\leqq\|P(\infty,s)\,g-P(\infty,s)\,h\|+\frac{\varepsilon}{3}(1+\|g\|)\\&\leqq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\left(1+\|h\|+\frac{\varepsilon}{3}\right)\\\frac{5}{6}\|h\|\leqq\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)\|h\|&\leqq\frac{\varepsilon}{3}\left(2+\frac{\varepsilon}{3}\right)<\frac{\varepsilon\,13}{3\cdot 6}\\\|h\|<\varepsilon\cdot\frac{13}{15}&<\varepsilon.\end{aligned}$$

6. Aus $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $s>S\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, $|\mathfrak{V}_0,P(s+1,s)\,\mathfrak{V}|<\frac{\varepsilon}{3}$ folgt

$$P(s+1,s)\,\mathfrak{E}(s)\subseteqq\varepsilon\,\mathfrak{E}(s+1),$$

denn für $\mathfrak{K} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{H}_0$ folgt

$$|\mathfrak{K}, P(s+1, s)\,\mathfrak{E}(s)| \leqq |\mathfrak{K}, P(s+1, s)\,\mathfrak{E}| \leqq |\mathfrak{V}_0, P(s+1, s)\,\mathfrak{V}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Somit gilt

$$|\mathfrak{H}_0, \{P(s+1, s)\,h\}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (h \in \mathfrak{E}(s))$$

also

$$\|P(s+1, s)\,h\| < \varepsilon \qquad (h \in \mathfrak{E}(s))$$

nach Nr. 5.

7. Für $s > S(\frac{1}{6})$ gilt

$$P(s+k, s)\,\mathfrak{E}(s) \subseteqq \frac{1}{2^k}\,\mathfrak{E}(s+k) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Hierzu ist Nr. 6 iteriert anzuwenden.

8. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathfrak{V}(t), \mathfrak{V}_0\| = 0 \qquad \text{(exponentiell)}. \tag{5.19}$$

Denn für $s > S(\frac{1}{6})$ gilt wegen Nr. 7 gewiß

$$|\mathfrak{V}(s+k), P(s+k, s)\,\mathfrak{V}| < \frac{2}{2^{k+1}}$$

d.h.

$$\lim_{t\to\infty} |\mathfrak{V}(t), P(t, s)\,\mathfrak{V}| = 0 \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Kombinieren wir dies mit der Voraussetzung (5.16), so folgt zunächst

$$\lim_{t\to\infty} |\mathfrak{V}(t), \mathfrak{V}_0| = 0 \qquad \text{(exponentiell)}.$$

Aus dem Lemma folgt dann die Behauptung.

9. Nach dem Lemma folgt aus $\|\mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}(s)\| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma}$ $(s \geqq T)$, $P(s, t)\,\mathfrak{V}(t) = \mathfrak{V}(s)$ und $P(\infty, t)\,\mathfrak{V}(t) = \mathfrak{V}_0$ $(s \geqq t \geqq T)$

$$\left.\begin{aligned} &\|P(s, t)\,h - h\| < \varepsilon \\ &\|P(s, t)\,h - P(\infty, t)\,h\| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (h \in \mathfrak{V}(s)).$$

Aus Nr. 8 ergibt sich somit die exponentielle Konvergenz von $P(t, s)\,h$ für $h \in \mathfrak{V}(s)$. Berücksichtigt man (5.16) und Nr. 7, so folgt es für $h \in \mathfrak{V}$; damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Theorem I. Aus Satz 5.5 und den ihm vorangehenden Nr. 4 und Nr. 7 folgt, daß für die Spieler des Stammes Σ_0 in unserem Prozeß nach eventueller Vergröberung alle Voraussetzungen von Satz 5.6 erfüllt sind: Für $\nu \in \Sigma_0$ ist $P_\nu(t, s)$ ein exponentiell-asymptotisch periodischer Prozeß. Wir wenden nun das in § 1 Nr. 4 angegebene Verfahren der Ausschöpfung durch Stämme an: die für $\nu \in \Sigma_0$ erhaltenen Prozesse werden zur Steuerung geschlagen und sodann unter den restlichen Spielern — sofern noch solche vorhanden sind — der neue Stamm Σ_1 (relativ zu $\Sigma - \Sigma_0$) gebildet. Für Σ_1 können wir alle bisherigen Betrachtungen wiederholen und so die exponentielle

Konvergenz weiterer Prozesse beweisen. Nach endlichvielen Wiederholungen bricht dies Verfahren ab und das Theorem I ist bewiesen.

§ 6. Allgemeine Prozesse

Mittels der Zerlegung der Spielermenge Σ in Satellitengürtel (§ 2) sind wir nun imstande, die Behandlung allgemeiner n-Personen-Prozesse auf den Fall der minimal-autarken Prozesse zurückzuführen.

Theorem II. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte Markoffsche n-Personen-Prozeß mit monomialer Regelung ist exponentiell-asymptotisch periodisch.*

Beweis. Sei $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{s} \bigcup_{\nu=1}^{r_k} \Sigma_{k\nu}$ die Ausschöpfung von Σ durch Satellitengürtel (§ 2). Wir vergröbern zunächst soweit, daß die Hintermann-Vordermann-Relation symmetrisch wird, d.h. daß die gegenseitigen Beeinflussungen der Prozesse explizit in den Regelungswörtern erscheinen (§ 2). Aus Theorem I folgt die exponentiell-asymptotische Periodizität der zu Spielern ν aus dem 0-ten Satellitengürtel $\Sigma_0 = \bigcup_{\nu=1}^{r_0} \Sigma_{0\nu}$ gehörigen Prozesse; denn die $\Sigma_{0\nu}$ sind minimal-autark. Durch Relativierung bezüglich Σ_0 entsteht ein exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerter Prozeß mit den Satellitengürteln $\Sigma_k = \bigcup_{\nu=1}^{r_k} \Sigma_{k\nu}$ ($k = 1, \ldots, s$). Jetzt sind die $\Sigma_{1\nu}$ minimal-autark und die zugehörigen Prozesse exponentiell-asymptotisch periodisch. Fährt man in dieser Weise fort, so hat man nach s-maliger Relativierung das Theorem II bewiesen.

Wir gehen noch etwas auf die Frage der Konvergenz (Stabilität) ein. Wir greifen zunächst wieder einen einzelnen Prozeß $P(t, s)$ heraus. Hinreichende Bedingungen dafür, daß der Durchmesser der Menge $P(t, 0)\,\mathfrak{V}$ gegen 0 geht, haben Sirazdinow [23] und Sarymsakow [22] angegeben, ohne weitere Voraussetzungen über den Prozeß zu machen. Ist der Prozeß Bestandteil eines n-Personen-Prozesses mit monomialer Regelung, so genügt es, daß $P(t, 0)\,\mathfrak{V}$ für irgendein t einen Durchmesser < 2 hat, um sicherzustellen, daß $\mathfrak{V}_0$ nur einen einzigen Punkt enthält, d.h. daß der Durchmesser von $P(t, s)\,\mathfrak{V}$ gegen 0 geht. Ist $n = 1$, so folgt hieraus die Konvergenz des Prozesses (vgl. auch [7]). Man könnte hieraus die Hoffnung schöpfen wollen, daß bei stationären Steuerungen durch Einfluß auf die Steuerung [„konforme Eingriffe" (Röpke [20]), durch die etwa die strikte Positivität der Steuerungsmatrizen erzwungen würde] die Konvergenz des Gesamtprozesses (das asymptotische Aufhören der Konjunkturschwankungen) erreicht werden könnte. Daß dies bei monomial geregelten n-Personen-Prozessen nicht der Fall ist, zeigt das

Beispiel. Sei $n = 2$ und $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von derselben Dimension > 1, so daß man jede Transformation in $\mathfrak{H}_1$ auch in $\mathfrak{H}_2$ anwenden darf (die Basen sind ja fixiert). Wir setzen kurzerhand $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}$. Seien h_1, h_2 zwei verschiedene Punkte in $\mathfrak{V}$, die keine Ecken von $\mathfrak{V}$ sind. Seien Q_1, Q_2 eindimensionale stochastische Projektionen mit $Q_1\mathfrak{V} = h_1$, $Q_2\mathfrak{V} = h_2$. Es gilt also $Q_i Q_k = Q_i$ $(i, k = 1, 2)$. Sei $f_1(P_1, P_2) = P_2$, $f_2(P_1, P_2) = P_1$. Wir betrachten

den 2-Personenprozeß mit dieser Steuerung und den Anfangswerten $P_1(1,0) = Q_1$, $P_2(1,0) = Q_2$. Dann ist $P_1(2,0) = Q_2$, $P_2(2,0) = Q_1$; $P_1(3,0) = Q_1$, $P_2(3,0) = Q_2$; ... Allgemein:

$$\begin{aligned} P_1(2t,0) &= Q_2, \quad P_1(2t+1,0) = Q_1 \\ P_2(2t,0) &= Q_1, \quad P_2(2t+1,0) = Q_2 \end{aligned} \qquad (t = 1, 2, \ldots)$$

wie man durch Induktion beweist.

Literatur

[1] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [2] ALLEN, R. G. D.: Mathematical Economics. London 1957. — [3] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. I, II. Paris 1953. — [4] FELS, E.: Maß und Richtung: Zur Aggregation dreiwertiger Signalkonstellationen im Ifo-Konjunkturtestverfahren. Statist. Vjschr. **7**, 57—89 (1954). — [5] FÖHL, C.: Volkswirtschaftliche Regelkreise höherer Ordnung in Modelldarstellung, s. GEYER-OPPELT, S. 49—75 (1957). — [6] GEYER, H., u. W. OPPELT: Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge. München 1957. — [7] JACOBS, K.: Zur Theorie der Markoffschen Prozesse. Math. Ann. **133**, 375—389 (1957). — [8] JACOBS, K.: Fastperiodische diskrete Markoffsche Prozesse von endlicher Dimension. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 194—246 (1957). — [9] JACOBS, K.: Fastperiodische Markoffsche Prozesse. Math. Ann. **134**, 408—427 (1958). — [10] JACOBS, K.: Markoffsche Prozesse mit monomialer Selbststeuerung. Arch. d. Math. **8**, 298—308 (1957). — [11] JÖHR: Die Konjunkturschwankungen. Zürich-Tübingen 1952. — [12] KEYNES, J. M.: Allgemeine Theorie der Beschäftigung, des Zinses und des Geldes. Berlin 1955. — [13] KRYLOFF, N., et N. BOGOLIOUBOFF: La théorie générale de la mesure dans son application a l'étude des systemes dynamiques de la mécanique non-linéaire. Ann. of Math. **38**, 65—113 (1937). — [14] LANGELÜTKE, H., u. W. MARQUARDT: Das Konjunkturtestverfahren. Allg. Statist. Arch. **35**, 189—208 (1951). — [15] MINKOWSKI, H.: Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. Bd. 2, 131—229. — [16] NASH, J.: Non-cooperative games. Ann. of Math. **54**, 286—295 (1951). — [17] NEUMANN, J. v., and O. MORGENSTERN: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton 1947. — [18] OPPELT, W.: Regelvorgänge in der Technik und ihre Darstellung, s. GEYER-OPPELT, S. 9—21 (1957). — [19] OXTOBY, J. C.: Ergodic Sets. Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 116—136 (1952). — [20] RÖPKE, W.: Die Gesellschaftskrisis der Gegenwart. Zürich 1948. — [21] DOOB, J. L.: Stochastic Processes. New York 1953. — [22] SARYMSAKOW, T.: On the ergodic principle for nonstationary Markov chains. Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **90**, 25—28 (1953) (Russ.). — [23] SIRAZDINOW, S.: The ergodic principle for nonstationary Markov chains. Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **71**, 829—830 (1950) (Russ.).

München, Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 4. November 1957)

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 271–279 (1958)

Über Transformationen von Mannigfaltigkeiten der Dimensionsdifferenz 2

Von
JOSEF WEIER

Seien $n \geqq 2$ eine ganze Zahl, P eine $(n+2)$-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit. Ferner bezeichne f eine stetige Abbildung von P in Q. Dann kann man zeigen:

1. Es gibt zu f homotope Abbildungen g und g' von P in Q derart, daß die Menge A aller Punkte p aus P mit $g(p) = g'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder ist.

Wir wollen A auch den *Schnitt* von g und g' nennen. Seien K eine simpliziale Zerlegung von A, ferner $A_1, A_2, \ldots$ die 2-Simplexe von K, x_i eine Orientierung von A_i und α_i der unten definierte *Grad* von x_i bezüglich (g, g'). Hierauf gilt:

2. *Die ganzzahlige 2-Kette $\sum \alpha_i x_i$ ist ein Zyklus in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.*

Wie weit ist der Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ durch f bestimmt? Zur Beantwortung dieser Frage seien h, h' zu f homotope Abbildungen, die Menge B aller Punkte p aus P mit $h(p) = h'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder, L eine simpliziale Zerlegung von B und mit Hilfe von L ein dem Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ entsprechender Zyklus $\sum \beta_i y_i$ definiert. Wir wollen $\sum \alpha_i x_i$ und $\sum \beta_i y_i$ als *charakteristische Zyklen* von f bezeichnen. Dann gilt:

3. Alle charakteristischen Zyklen von f sind untereinander homolog, es ist also

$$\sum \alpha_i x_i \sim \beta_i y_i$$

in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.

Der letzte Satz verliert seine Gültigkeit, wenn man darin „homolog" durch „homotop" ersetzt. Von den vorstehenden Aussagen 1 bis 3 wird *im folgenden nur die zweite bewiesen.* Zur Entscheidung gewisser Fragen genügt es, statt des Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ lediglich den geometrischen Schnitt A zu untersuchen. Das wird unten in einer Bemerkung zur Theorie der Abbildung von Sphären gezeigt.

1. Bemerkung zu einem Satz von Freudenthal

Sind i, k natürliche Zahlen, so bedeute wie üblich S^i eine i-dimensionale Sphäre und $\pi_k(S^i)$ die k-te Hurewiczsche Homotopiegruppe von S^i. Die Ordnungen der Gruppen $\pi_{i+2}(S^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, sind sämtlich bekannt. Es ist

$\pi_3(S^1)=0$ und $\pi_4(S^2)=Z_2$. In [1] zeigte FREUDENTHAL, daß für alle ganzen Zahlen $i\geqq 2$ die Gruppe $\pi_{i+2}(S_i)$ entweder Null oder zyklisch von der Ordnung 2 ist. Die Frage, welcher Fall vorliegt, beantwortete PONTRJAGIN in [3] dahin, daß $\pi_{i+2}(S_i)=0$ für alle $i\geqq 3$. Diesem Ergebnis lag jedoch ein Irrtum zugrunde. Es ist nämlich $\pi_{i+2}(S^i)=Z_2$ für alle $i\geqq 2$, wie WHITEHEAD in [5] und PONTRJAGIN in [4] zeigten.

In seiner Arbeit [1] hat FREUDENTHAL den Satz bewiesen: Sind α, m, n natürliche Zahlen mit

$$\alpha+2<m \quad \text{und} \quad \alpha+2<n,$$

so gilt $\pi_{m+\alpha}(S^m)=\pi_{n+\alpha}(S^n)$. Mit anderen Worten hängt die Ordnung der Gruppe $\pi_i(S^k)$ bei hinreichend großer Dimension der Bildsphäre S^k nur von der Dimensionsdifferenz $i-k$ ab. Hieraus folgt offenbar:

THEOREM 1. *Sind α und m natürliche Zahlen, die die Ungleichung $\alpha+2<m$ erfüllen, und gilt $\pi_{m+\alpha}(S^m)=0$, so ist $\pi_{i+\alpha}(S^i)=0$ für alle natürlichen Zahlen $i>m$.*

Dieser Teil des Freudenthalschen Satzes ist verhältnismäßig leicht zugänglich, wie wir im vorliegenden Abschnitt zeigen wollen. Man kann Theorem 1 noch verschärfen:

THEOREM 2. *Ersetzt man in Theorem 1 die Beziehung $\alpha+2<m$ durch die Beziehung $\alpha+2\leqq m$, so bleibt das in Rede stehende Theorem richtig.*

Wenn E ein Euklidischer Raum, A eine Teilmenge von E und a, b Punkte aus E, so bezeichne $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A bezüglich E, $d(A)$ den Durchmesser von A und $d(a,b)$ den Abstand der Punkte a, b. Die weiterhin auftretenden Simplexe sind gradlinig und bezüglich ihrer Trägerebene offen. Wenn B ein solches Simplex und x eine eineindeutige simpliziale Abbildung von B in E, so heiße $x(B)$ Zelle und $x(\overline{B}-B)$ Sphäre.

Wir wollen zunächst zeigen, daß *Theorem 2 aus dem nachstehenden Theorem 3 folgt.* Hierzu seien α, m natürliche Zahlen mit

$$\alpha+2\leqq m \quad \text{und} \quad \pi_{m+\alpha}(S^m)=0.$$

Weiter bedeute n eine natürliche Zahl $\geqq m$, und es sei bereits bewiesen, daß $\pi_{i+\alpha}(S^i)=0$ für $i=m,\ldots,n$. Dann ergibt sich $\pi_{n+1+\alpha}(S^{n+1})=0$ wie folgt.

Seien $S=S^{n+1+\alpha}$, $T=S^{n+1}$, t ein Punkt aus T und f eine stetige Abbildung von S in T. Nach Theorem 3 existiert eine zu f homotope Abbildung g von S in T, so daß die Menge $(g)^{-1}(t)$ aus einem einzigen Punkt a besteht. Hierauf seien U ein $(n+1+\alpha)$-Simplex in S, V ein $(n+1)$-Simplex in T und

$$a\in U, \quad g(\overline{U})\subset V.$$

Für jeden Punkt p aus $\overline{U}-U$ bedeute $h(p)$ die Projektion von $g(p)$ auf $\overline{V}-V$ aus t. Wegen $\pi_{n+\alpha}(S^n)=0$ ist die Abbildung h unwesentlich. Daher existiert eine stetige Abbildung h' von $\overline{U}$ in $\overline{V}-t$, die auf $\overline{U}-U$ mit g übereinstimmt. Die durch $f'|S-U=g|S-U$ und $f'|\overline{U}=h'$ bestimmte Abbildun gf' ist zu f homotop und unwesentlich.

Verbleibt zu zeigen:

THEOREM 3. *Seien α und m natürliche Zahlen mit $\alpha+2\leqq m$, ferner q ein Punkt aus S^m und f eine stetige Abbildung von $S^{m+\alpha}$ in S^m. Dann existiert eine zu f homotope Abbildung f' von $S^{m+\alpha}$ in S^m derart, daß die Menge $(f')^{-1}(q)$ aus einem einzigen Punkt besteht.*

Um vom Thema dieser Arbeit nicht zu weit abzuschweifen, sei der Beweis des letzten Theorems nur skizziert. Man kann annehmen, daß $(f)^{-1}(q)\neq S^{m+\alpha}$. Daher genügt es, statt Theorem 3 zu beweisen:

Seien S ein $(m+\alpha)$-Simplex, $T=S^m$ und f eine stetige Abbildung von $\overline{S}$ in T mit $f(\overline{S}-S)\subset T-q$. Dann kann man f unter Festhaltung auf $\overline{S}-S$ in eine Abbildung f' von $\overline{S}$ in T deformieren, so daß die Menge $(f')^{-1}(q)$ aus einem einzigen Punkt besteht.

Das ergibt sich wie folgt. Zunächst kann man f unter Festhaltung auf $\overline{S}-S$ in eine Abbildung f^* von $\overline{S}$ in T deformieren derart, daß $(f^*)^{-1}(q)$ eine (nicht notwendig zusammenhängende) α-dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit A ist. Seien K eine simpliziale Zerlegung von A, β die Anzahl der α-Simplexe von K und j eine ganze Zahl mit $0\leqq j<\beta$.

Dann machen wir die für $j=0$ richtige Annahme, es existierte eine zu f homotope Abbildung f^j von $\overline{S}$ in T derart, daß über die Menge $(f^j)^{-1}(q)=A^j$ gilt: Es ist A^j ein homogenes α-dimensionales endliches Euklidisches Polyeder; es besitzt A^j eine simpliziale Zerlegung K^j, die höchstens $\beta-j$ Simplexe der Dimension α hat; jedes $(\alpha-1)$-Simplex aus K^j ist Seite von wenigstens zwei α-Simplexen aus K^j.

Seien hierauf B ein $(\alpha-1)$-Simplex aus K^j und $C_1\neq C_2$ Simplexe der Dimension α aus K^j mit B als Seite. Bedeute E die von C_1+C_2 aufgespannte Hyperebene. Durch eine kleine Verschiebung der zu $\overline{C}_1+\overline{C}_2$ fremden Eckpunkte von K^j läßt sich erreichen, daß jeder zu $\overline{C}_1+\overline{C}_2$ fremde Eckpunkt des verschobenen Komplexes in $S-E$ liegt: Man kann weiterhin annehmen, jeder zu $\overline{C}_1+\overline{C}_2$ fremde Eckpunkt aus K^j liege in $S-E$. Von der Voraussetzung, daß $\alpha+2\leqq m$, wird an dieser Stelle nur der Teil $2\leqq m$ benötigt.

Nun seien $b_1, b_2, \ldots$ die in E liegenden Eckpunkte von K^j, b ein Punkt aus B und $b_i^\tau=(1-\tau)b_i+\tau b$ für alle Zahlen τ. Bedeutet e einen Eckpunkt aus K^j mit $e\notin E$, so sei $\varphi^\tau(e)=e$. Wenn e ein Eckpunkt aus K^j mit $e=b_i$, so sei $\varphi^\tau(e)=b_i^\tau$. Für alle $0\leqq\tau<1$ bedeute dann L^τ den simplizialen Komplex $\varphi^\tau(K^j)$, und es sei B^τ das zu L^τ gehörige Euklidische Polyeder. Offenbar sind K^j und L^τ für $0\leqq\tau<1$ zueinander isomorph.

Man überlegt sich nun leicht, daß von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ, $0\leqq\tau<1$, von $\overline{S}$ in T existieren, die die Eigenschaften haben:

$$f^j=g^0,\quad (g^\tau)^{-1}(q)=B^\tau\quad\text{für}\quad 0\leqq\tau<1,$$

in allen (p,τ) mit $p\in\overline{S}-S$ und $0\leqq\tau<1$ ist $f^j(p)=g^\tau(p)$.

Es ist $\dim E\cdot\overline{S}\leqq\alpha+1$ und nach Voraussetzung $\alpha+2\leqq m$. Man kann daher annehmen, es existiere ein in T gelegenes m-Simplex V mit

$$f^j(E\cdot\overline{S})\subset V.$$

Hieraus ergibt sich leicht die Möglichkeit, die Deformation $\{g^\tau\}$ so auszuführen, daß $g^\tau(E \cdot \overline{S}) \subset V$ für $0 \leqq \tau < 1$.

Da $E \cdot \overline{S}$ kompakt und V offen, existiert eine in $\overline{S}$ offene Menge U mit $E \cdot \overline{S} \subset U$ derart, daß statt $g^\tau(E \cdot \overline{S}) \subset V$ sogar

$$g^\tau(\overline{U}) \subset V \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau < 1.$$

Hierauf braucht man nur für jeden Punkt p aus U den Punkt $g^\tau(p)$ auf der Strecke zwischen $g^\tau(p)$ und q passend zu verschieben, um von τ stetig abhängende stetige Abbildungen γ^τ, $0 \leqq \tau < 1$, von $\overline{S}$ in T zu erhalten, die die gleichen Eigenschaften wie die Abbildungen g^τ haben [für die also $f^j = \gamma^0$, $(\gamma^\tau)^{-1}(q) = B^\tau$ in allen τ und $f^j(p) = \gamma^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{S} - S$ und $0 \leqq \tau < 1$ ist] und für die überdies gilt: die durch $\gamma(p, \tau) = \gamma^\tau(p)$ bestimmte Abbildung γ ist auf der Menge aller (p, τ) mit $p \in \overline{S}$ und $0 \leqq \tau < 1$ gleichmäßig stetig.

Wenn e ein Eckpunkt aus K^j, so sei $\varphi^1(e) = e$ für $e \notin E$ und $\varphi^1(e) = b$ für $e \in E$. Es bezeichne K^{j+1} den simplizialen Komplex $\varphi^1(K^j)$ und A^{j+1} das zu K^{j+1} gehörende Polyeder. Hierauf überlegt man sich leicht, daß man annehmen kann, es sei

$$\lim\left(\gamma^\tau(p), \tau \text{ gegen } 1\right) \neq q$$

in allen Punkten p aus $\overline{S} - A^{j+1}$. Um den $(j+1)$-ten Schritt zu Ende zu führen, braucht man alsdann nur noch $f^{j+1}(p) = \lim\left(\gamma^\tau(p), \tau \text{ gegen } 1\right)$ in allen Punkten p aus $\overline{S}$ zu setzen.

Somit kann man f unter Festhaltung auf $\overline{S} - S$ in eine Abbildung f^{**} von $\overline{S}$ in T deformieren derart, daß die Menge $(f^{**})^{-1}(q)$ endlich. Wegen $\dim T > 1$ lassen sich die endlich vielen Punkte dieser letzteren Menge leicht auf einen Punkt zusammenziehen.

2. Der verallgemeinerte Brouwersche Grad

Seien $n \geqq 2$ eine ganze Zahl und P, Q orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, $\dim P = n+2$, $\dim Q = n$, P^* eine Orientierung von P, Q^* eine Orientierung von Q, A ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder und f, g stetige Abbildungen von P in Q. Die Menge aller Punkte p aus P mit $f(p) = g(p)$ sei gleich A. *Die so erklärte Bedeutung von n, P, Q, P^*, Q^*, A, f, g gelte bis zum Schluß der vorliegenden Arbeit.*

Nun bezeichne B ein in A gelegenes 2-Simplex und B^* eine Orientierung von B. Es seien b ein Punkt aus B, q der Punkt $f(b) = g(b)$, weiter C ein n-Simplex in P, D ein n-Simplex in Q und

$$b \in C, \quad A \cdot \overline{C} = b, \quad f(\overline{C}) + g(\overline{C}) \subset D.$$

Dann gibt es $n+2$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+2}$ in P mit b als Anfangspunkt und

$$v_i \in B \quad \text{für} \quad i \leqq 2, \qquad v_i \in C \quad \text{für} \quad i > 2$$

derart, daß (v_1, v_2) die Orientierung B^* von B und $(v_1, \ldots, v_{n+2})$ die Orientierung P^* von P bestimmen. Seien C^* die durch $(v_3, \ldots, v_{n+2})$ bestimmte Orientierung von C und D^* die von Q^* in D induzierte Orientierung, ferner S die von C^* in $\overline{C} - C$ und T die von D^* in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung. Für jeden Punkt p aus $\overline{C} - C$ bezeichne $h(p)$ die Projektion des Punktes

$$q + (f(p) - g(p))$$

auf $\overline{D} - D$ mit q als Projektionszentrum. Alsdann heiße der Brouwersche Grad (vgl. [2], [6] bis [8]) der Transformation

$$h : S \to T$$

der Grad von B^* in bezug auf (f, g).

3. Der zyklische Charakter zweidimensionaler Schnitte

Bezeichnet im folgenden x ein orientiertes Simplex, so sind $\dot{x}$ die Randkette von x und $|x|$ das zu x gehörige nichtorientierte Simplex. Die Bedeutung von n, P, Q, P^*, Q^*, A, f und g ist schon im zweiten Abschnitt erklärt. Dabei sind die Abbildungen f und g nicht notwendig homotop. Der nachfolgende Satz 4 stellt also eine Verschärfung der Aussage 2 der Einleitung dar.

THEOREM 4. *Seien K eine simpliziale Zerlegung von A und A_i die 2-Simplexe von K, ferner x_i eine Orientierung von A_i und α_i der Grad von x_i bezüglich (f, g). Dann ist $\sum \alpha_i x_i$ ein Zyklus in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.*

Beweis. Seien $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$ die 1-Seiten von A_i und y_{ik} die von x_i in B_{ik} induzierte Orientierung. Dann ist $\dot{x}_i = y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}$, mithin

$$(\sum \alpha_i x_i)^{\cdot} = \sum_i \sum_k \alpha_i y_{ik}.$$

Weiter seien $B_1, B_2, \ldots$ die 1-Simplexe von K und $z_{i1}, z_{i2}, \ldots$ die durch

$$|y_{jl}| = B_i$$

bestimmten y_{jl}. Entsprechen dabei z_{ik} und y_{jl} einander, so sei

$$\xi(i, k) = j.$$

Dann stellt die Gleichung

$$(\sum \alpha_i x_i)^{\cdot} = \sum_i \sum_k \alpha_{\xi(i,k)} z_{ik}$$

lediglich eine Umordnung der Gleichung $(\sum \alpha_i x_i)^{\cdot} = \sum \sum \alpha_i y_{ik}$ dar.

Die Gleichung $(\sum \alpha_i x_i)^{\cdot} = 0$ ist offenbar richtig, wenn für alle Zahlen i die Gleichung

$$\sum_k \alpha_{\xi(i,k)} z_{ik} = 0$$

gilt. Seien y_i eine Orientierung von B_i und ε_{ik} gleich 1 oder -1, je nachdem y_i und z_{ik} gleich orientiert sind oder nicht. Dann genügt es, statt der letzten

Gleichung nachzuweisen, daß

$$\sum_k \alpha_{\xi(i,k)} \varepsilon_{ik} = 0$$

für alle i. Diese Gleichung ist aber nach den folgenden Theoremen 5 und 6 richtig, da die Zahl $\alpha_{\xi(i,k)}\varepsilon_{ik}$ gerade der Koeffizient ist, mit dem y_i in der Randkette von $\alpha_i x_j$ auftritt.

THEOREM 5. *Seien A_1 ein in A gelegenes 2-Simplex, B eine 1-Seite von A_1, die Menge $A_1 + B$ in A offen, ferner x eine Orientierung von A_1 und der Grad von x bei (f, g). Dann ist $\alpha = 0$.*

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, existieren von τ stetig abhängende n-Simplexe C^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, in P, so daß $A \cdot \overline{C}^\tau = 0$ für $\tau < 1$, ferner A zu $\overline{C}^1 - C^1$ fremd und der Durchschnitt $A \cdot C^1$ ein Punkt q aus B ist. Sei $r = f(q) = g(q)$. Offenbar kann man annehmen, es existiere ein in Q gelegenes n-Simplex $D \ni r$. Die C^τ lassen sich als so klein gewählt annehmen, daß die Menge $f(\overline{C}^\tau) + g(\overline{C}^\tau)$ für alle τ in D liegt.

Für jeden Punkt p aus $\overline{C}^1 - C^1$ bedeute $h(p)$ die Projektion des Punktes $r + (f(p) - g(p))$ auf $\overline{D} - D$ mit r als Projektionszentrum. Bezeichnen dann S eine Orientierung von $\overline{C}^1 - C^1$, T eine Orientierung von $\overline{D} - D$ und β den Brouwerschen Grad der Abbildung $h: S \to T$, so ist

$$|\alpha| = |\beta| .$$

Da $\overline{C}^\tau$ zu A fremd für $\tau < 1$, ist $f(p) \neq g(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{C}^\tau$ und $\tau < 1$. Somit ist h eine unwesentliche Abbildung und daher $\alpha = 0$.

THEOREM 6. *Seien K eine simpliziale Zerlegung von A, B ein 1-Simplex aus K und $A_1, \ldots, A_m$, $m > 1$, die 2-Simplexe aus K mit B als Seite, ferner x_i eine Orientierung von A_i, α_i der Grad von x_i bei (f, g), weiter y_i die von x_i in B induzierte Orientierung und y eine Orientierung von B. Dann gilt*

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_m = 0 ,$$

wobei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem y und y_i gleich orientiert sind oder nicht.

Beweis. Nach einer Bemerkung des vierten Abschnittes existieren in P von τ stetig abhängende n-Zellen C^τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ und von τ stetig abhängende Punkte q^τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$, q_i^τ $(1 \leqq \tau \leqq 2)$, $i = 2, \ldots, m$, mit den im nächsten Absatz aufgezählten Eigenschaften.

Für $0 \leqq \tau < 1$ ist $q^\tau \in A_1$. Der Punkt $q^1 = q_2^1 = \cdots = q_m^1$ liegt in B. Für $1 < \tau \leqq 2$ und $i = 2, \ldots, m$ ist $q_i^\tau \in A_i$. Es ist

$$A \cdot (\overline{C}^\tau - C^\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau, \qquad A \cdot C^\tau = a^\tau \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1 .$$

Für $1 < \tau \leqq 2$ besteht die Menge $A \cdot C^\tau$ aus den Punkten $q_2^\tau, \ldots, q_m^\tau$.

Man kann annehmen, daß ein in Q gelegenes n-Simplex D existiert mit $f(q^1) = g(q^1) \in D$. Wenn β eine positive Zahl, so steht nichts im Wege, die

C^τ so klein zu wählen, daß $d(C^\tau + q^1) < \beta$ für alle τ. Somit kann man annehmen, es sei

$$f(\overline{C}^\tau) + g(\overline{C}^\tau) \subset D$$

für alle Zahlen τ mit $0 \leqq \tau \leqq 2$.

Offenbar existieren von τ stetig abhängende topologische Abbildungen t^τ, $0 \leqq \tau \leqq 2$, von $\overline{D}$ auf $\overline{C}^\tau$. Wir setzen $d^\tau = t^{-\tau}(q^\tau)$, $d_i^\tau = t^{-\tau}(q_i^\tau)$, für alle (p, τ) mit $p \in \overline{D}$ und $0 \leqq \tau \leqq 2$, weiter

$$\varphi^\tau(p) = f t^\tau(p) \quad \text{und} \quad \gamma^\tau(p) = g t^\tau(p).$$

Dann sind $\{\varphi^\tau\}$ und $\{\gamma^\tau\}$ zwei Homotopien von $\overline{D}$ in sich mit den Eigenschaften: Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist d^τ der einzige Übereinstimmungspunkt von $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$, für $1 < \tau \leqq 2$ sind die Punkte $d_2^\tau, \ldots, d_m^\tau$ die Übereinstimmungspunkte von $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$.

Es bedeute δ^τ die topologische Ordnung von d^τ bei $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$ und δ_i^τ die topologische Ordnung von d_i^τ bei $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$. Wegen der Deformationsinvarianz der topologischen Ordnung ist dann

$$\delta^\tau = \delta^0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1 \quad \text{und} \quad \sum \delta_i^\tau = \delta^0 \quad \text{für} \quad 1 < \tau \leqq 2.$$

Aus den letzten Gleichungen ergibt sich Theorem 6 wie folgt.

Wir setzen $x_1^* = x_1$. Für $i > 1$ sei x_i^* eine Orientierung von A_i, so daß x_1^* und x_i^* in B entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Für alle i bezeichne α_i^* den Grad von x_i^* bezüglich (f, g). Wenn x_i und x_i^* entgegengesetzte Orientierungen von A_i sind, so ist $\alpha_i = -\alpha_i^*$. Mithin folgt die im obigen Theorem angegebene Gleichung aus

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* + \cdots + \alpha_m^*.$$

Die vorstehende Gleichung wiederum ist richtig, wenn eine ganze Zahl $\varepsilon \neq 0$ existiert mit

$$\alpha_1^* = \varepsilon \delta^0 \quad \text{und} \quad \alpha_i^* = \varepsilon \delta_i^2 \quad \text{für} \quad i > 1.$$

Diese letzteren Beziehungen folgen leicht aus der Definition des Grades, wie wir zeigen wollen.

Zunächst kann man wegen der topologischen Invarianz der Ordnung weiterhin annehmen, die Zellen C^τ seien zueinander parallele n-Simplexe. Dann bedeute D^* die von Q^* in D induzierte Orientierung. Diejenige Orientierung von C^0, die nach der obigen Definition des Grades der Bestimmung von α_1^* zugrunde zu legen ist, heiße C^{0*}. Es bezeichne C^{2*} jene Orientierung von C^2, in die C^{0*} vermöge der Homotopie $\{C^\tau\}$ überführt wird. Da x_1^* und x_i^*, $i > 1$, in B entgegengesetzte Orientierungen induzieren, ist C^{2*} diejenige Orientierung von C^2, die nach der Definition des Grades für die Bestimmung von α_i^* zu benutzen ist.

Schließlich seien C_i^2, $i = 2, \ldots, m$, paarweise zueinander fremde in C^2 gelegene n-Simplexe derart, daß

$$A \cdot (\overline{C}_i^2 - C_i^2) = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot C_i^2 = q_i^2 \quad \text{für} \quad i \geqq 2.$$

Es bezeichne C_i^{2*} die von C^{2*} in C_i^2 induzierte Orientierung. Dann kann man (C^{0*}, D^*) der Bestimmung von α^* und (C_i^{2*}, D^*) für $i \geqq 2$ der Bestimmung von α_i^* zugrunde legen. Hieraus aber folgt bereits die Existenz der Zahl ε. Offenbar ist ε gleich 1 oder -1.

Damit ist Theorem 6 und also auch Theorem 4 bewiesen.

Wenigstens kurz wollen wir uns noch mit der Frage befassen, wie die obigen Definitionen im Falle *nichtorientierbarer* Mannigfaltigkeiten abzuwandeln sind. Hierzu seien R, S beliebige geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim R = n+2$ und $\dim S = n$, ferner h eine stetige Abbildung von R in S. Dann existiert eine zu h homotope Abbildung h' von R in S derart, daß die Menge B aller Punkte p aus R mit $h(p) = h'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder ist. Es bezeichne B_0 ein in B gelegenes 2-Simplex. Diesem 2-Simplex kommt wie folgt ein *Grad mod* 2 zu. Seien C ein 2-Simplex in R, D ein n-Simplex in S,

$$B \cdot (\overline{C} - C) = 0, \quad B \cdot C = B_0 \cdot C \neq 0, \quad h(\overline{C}) + h'(\overline{C}) \subset D$$

und $h^*(p)$ für jeden Punkt p aus $\overline{C} - C$ die Projektion von $h(p)$ auf $\overline{D} - D$ mit $h'(p)$ als Projektionszentrum. Es bedeute U eine Orientierung von $\overline{C} - C$ und V eine solche von $\overline{D} - D$. Ist dann β der Brouwersche Grad der Abbildung $h: U \to V$, so heiße β mod 2 der Grad mod 2 von B_0 in bezug auf (h, h').

Hierauf seien L eine simpliziale Zerlegung von B und $B_1, B_2, \ldots$ die 2-Simplexe von L, weiter β_i der Grad mod 2 von B_i. Dann stellt die Kette $\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots$ einen *Zyklus mod* 2 dar. Wenn h'' eine zu h homotope Abbildung, die Menge aller Punkte p aus S mit $h(p) = h''(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder E und mit Hilfe von E ein dem Zyklus $\sum \beta_i B_i$ entsprechender Zyklus $\sum \varepsilon_i E_i$ gebildet ist, so sind die Zyklen $\sum \beta_i B_i$ und $\sum \varepsilon_i E_i$ bezüglich P *homolog mod* 2.

Versucht man, weiter zu verallgemeinern und etwa R, S durch kompakte topologische Mannigfaltigkeiten R', S' mit $\dim R' = (\dim S') + 2$ zu ersetzen, so stößt bereits der Nachweis, daß stets zweidimensionale Schnitte von der Art des oben definierten Polyeders A existieren, auf Schwierigkeiten.

4. Eine elementare Anmerkung

Wie oben bezeichne A ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder und $n \geqq 2$ eine ganze Zahl. Es seien E ein $(n+2)$-dimensionaler Euklidischer Raum $\supset A$, ferner K eine simpliziale Zerlegung von A, B ein 1-Simplex aus K und $A_1, \ldots, A_m$, $m > 1$, die 2-Simplexe aus K mit B als Seite.

Dann existieren in E von τ stetig abhängende n-Zellen C^τ, $0 \leqq \tau \leqq 2$, sowie von τ stetig abhängende Punkte a_i^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und a_i^τ, $1 \leqq \tau \leqq 2$, $i = 2, \ldots, m$, mit den Eigenschaften:

$$a^\tau \in A_1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau < 1, \quad a^1 = a_2^1 = \cdots = a_m^1 \in B,$$

$$a_i^\tau \in A_i \quad \text{für} \quad 1 < \tau \leqq 2 \quad \text{und} \quad i = 2, \ldots, m,$$

$$A \cdot (\overline{C}^\tau - C^\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau,$$

für $0 \leqq \tau \leqq 1$ *ist* $A \cdot C^\tau = a^\tau$, *für* $1 < \tau \leqq 2$ *besteht die Menge* $A \cdot C^\tau$ *aus den Punkten* $a_2^\tau, \ldots, a_m^\tau$.

Nach der im ersten Abschnitt gegebenen Erklärung einer Zelle sind die C^τ nicht notwendig konvex. Bezeichnet daher F die von $\sum A_i$ aufgespannte Hyperebene, so kann man annehmen, daß F dreidimensional und in F zwei zueinander fremde offene Halbräume F_1, F_2 existieren mit

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = F, \quad A_1 < F_1, \quad B < \overline{F}_1 \cdot \overline{F}_2, \quad A_i < F_2 \quad \text{für} \quad i \geqq 2.$$

Sei $a^1 = a_2^1 = \cdots = a_m^1$ ein Punkt in B.

Sind dann δ eine hinreichend kleine positive Zahl uud U die bezüglich E gebildete offene δ-Umgebung von a^1, so ist

$$A \cdot \overline{U} = (\sum A_i + B) \cdot \overline{U}.$$

Alsdann existieren in $F \cdot U$ von τ stetig abhängende 1-Simplexe C_1^τ, $0 \leqq \tau \leqq 2$, mit den Eigenschaften:

$$A \cdot (\overline{C}_1^\tau - C_1^\tau) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \tau,$$

für $0 \leqq \tau < 1$ ist $A \cdot C_1^\tau$ ein Punkt a^τ aus A_1; weiter $A \cdot C_1^1 = a^1$; für $1 < \tau \leqq 2$ besteht $A \cdot C_1^\tau$ aus $m-1$ Punkten $a_2^\tau, \ldots, a_m^\tau$, die beziehungsweise in $A_2, \ldots, A_m$ liegen; die C_1^τ sind untereinander parallel und haben sämtlich die gleiche Länge.

Wenn p_0, p_1 die Eckpunkte von C_1^0, so gibt es in $U - F$ Punkte $p_2, \ldots, p_n$ derart, daß die Punkte $p_0, \ldots, p_n$ linear unabhängig sind. Dann sei C^0 das n-Simplex mit den p_i als Eckpunkten. Und C^τ gehe aus C^0 durch starre Verschiebung hervor.

Literatur

[1] Freudenthal, H.: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I: Große Dimensionen. Compos. Math. **5**, 299–314 (1937). — [2] Hilton, P. J.: An introduction to homotopy theory. Cambridge Tracts Math. Phys. **43** (1953). — [3] Pontrjagin, L.: A classification of continuous transformations of a complex into a sphere II. C. R. Acad. Sci. URSS. **19**, 361–363 (1938). — [4] Pontrjagin, L.: Homotopieklassifizierung der Abbildungen der $(n+2)$-dimensionalen in die n-dimensionale Sphäre. C. R. Acad. Sci. URSS. **70**, 957–959 (1950). — [5] Whitehead, G.: The $(n+2)$-nd homotopy group of the n-sphere. Ann. of Math. **52**, 245–247 (1950). — [6] Whitney, H.: On the maps of an n-sphere into another n-sphere. Duke Math. J. **3**, 46–50 (1937). — [7] Whitney, H.: The maps of a 4-complex into a 2-sphere. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 338–339 (1936). — [8] Whitney, H.: Maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J. **3**, 51–55 (1937).

Fulda, Marienstr. 9

(Eingegangen am 29. Dezember 1957)

LANG, W.-D.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 280–294 (1958)

Über die Äquivalenz von diskreten und kontinuierlichen Cesàro-Verfahren bei Funktionen vom Exponentialtyp

Von

WOLF-DIETER LANG

§ 1. Einleitung

Eine beliebige Folge komplexer Zahlen s_n $(n=0, 1, \ldots)$ heißt C_k-limitierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(k+1)\, n^{-k} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu = s \qquad (k>0) \quad [1] \tag{1.1}$$

ist. Wir schreiben dafür $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Analog dazu heißt eine komplexwertige Funktion $f(x)$, die für $x \geqq 0$ definiert ist und gewisse Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt, $\mathfrak{C}_k$-limitierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} k\, x^{-k} \int_0^x (x-u)^{k-1} f(u)\, du = s \qquad (k>0) \quad [1] \tag{1.2}$$

ist. Dafür wird dann $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ geschrieben.

Wir wählen nun für die Zahlenwerte s_n in (1.1) die Werte $f(n)$ der Funktion $f(x)$ aus (1.2) an den Stellen $x=0, 1, \ldots, n, \ldots$ und stellen die *Frage:* Unter welchen Umständen folgt aus $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ die Beziehung $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ und umgekehrt?

Es ist klar, daß man eine positive Antwort auf diese Frage nur für eine verhältnismäßig enge Klasse von Funktionen $f(x)$ erwarten kann. Wir behandeln diese Frage für die Funktionenklasse $\mathfrak{F}_\alpha$. Darunter verstehen wir die Klasse der Funktionen $f(z)$ $(z = x+iy = re^{i\varphi})$, die der folgenden Bedingung $(\mathfrak{F}_\alpha)$ genügen:

$(\mathfrak{F}_\alpha)$ Die Funktion $f(z)$ ist im abgeschlossenen Winkelraum $\overline{W}_\alpha (|\varphi| \leqq \alpha;\ 0<\alpha\leqq \frac{\pi}{2})$ holomorph und vom Exponentialtyp, d. h. es gilt $|f(z)| \leqq M e^{a|z|}$ $(z \in \overline{W}_\alpha)$ für zwei nicht negative Konstanten M und a.

Das Wachstum einer solchen Funktion $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ längs eines Strahls $\arg z = \varphi$ beschreibt die Indikatorfunktion

$$h_f(\varphi) = \limsup_{r\to\infty} r^{-1} \log |f(re^{i\varphi})| \qquad (|\varphi| \leqq \alpha). \tag{1.3}$$

[1] Wir betrachten nur die Cesàro-Verfahren positiver Ordnung.

Unsere oben gestellte Frage schließt an das damit eng verwandte und durch den Satz von CARTWRIGHT gelöste Problem an, unter welchen Umständen von $\lim_{n\to\infty} f(n)=s$ auf $\lim_{x\to\infty} f(x)=s$ geschlossen werden kann.

Satz A (CARTWRIGHT). *Ist* $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$ *und ist* $h_f(\pm\alpha)<\pi\sin\alpha$, *so folgt aus* $\lim_{n\to\infty} f(n)=s$ *stets* $\lim_{x\to\infty} f(x)=s$ [2]).

Das eine *Hauptergebnis* der vorliegenden Arbeit ist der folgende

Satz 9. *Es sei* $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$ *und* $k>0$ *fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Aus* $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n)=s$ *folgt* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)=s$, *wenn* $h_f(\pm\alpha)<\pi\sin\alpha$ *ist.*

b) *Aus* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)=s$ *folgt* $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n)=s$, *wenn* $h_f(\pm\alpha)<2\pi\sin\alpha$ *ist.*

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha)\leqq\pi\sin\alpha$ *bzw.* $\leqq 2\pi\sin\alpha$.

Beim Beweis dieses Satzes spielen neben dem Satz von CARTWRIGHT zwei Erweiterungen des folgenden funktionentheoretischen Satzes eine Rolle.

Satz B (PLANCHEREL-PÓLYA). *Ist* $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$, *so folgt aus* $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ *stets* $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ [3]).

Die erste Erweiterung hiervon ist der folgende

Satz 1. *Ist* $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$ *und ist* $h_f(\pm\alpha)<\frac{2\pi}{b}\sin\alpha$, *so folgt aus* $\lim_{x\to\infty}[f(x+b)-f(x)]=0$ *stets* $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ $(0<b<\infty)$. *Diese Aussage wird falsch für* $h_f(\pm\alpha)\leqq\frac{2\pi}{b}\sin\alpha$.

Daß dieses Ergebnis den Satz B enthält, sieht man sofort ein. Denn ist $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$, so ist $h_f(\pm\alpha)<\infty$, und nach Wahl eines genügend kleinen b wird sicher $h_f(\pm\alpha)<\frac{2\pi}{b}\sin\alpha$.

Eine zweite Erweiterung von Satz B erhält man dadurch, daß man in bekannter Weise einen Differentialoperator D^m nicht nur für ganzes $m>0$, sondern für beliebiges $m>0$ einführt (s. Def. 2).

Satz 2. *Ist* $f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha$, *so folgt aus* $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ *stets* $\lim_{x\to\infty} D^m f(x)=0$ $(m>0)$.

Nachdem in den Sätzen 3 und 4 asymptotische Erweiterungen der Sätze 1 und 2 gegeben werden, beweisen wir in Satz 5 eine limitierungstheoretisch interessante Aussage über die Größe der Cesàro-Mittel kleiner als k-ter Ordnung einer $\mathfrak{C}_k$-limitierbaren Funktion $f(x)$ $(f(z)\in\mathfrak{F}_\alpha)$, wie sie für die Cesàro-Mittel einer C_k-limitierbaren Folge s_n bekannt ist.

Während durch Satz 9 die C_k-Limitierbarkeit der Folge $f(n)$ $(n=0,1,\ldots)$ und die $\mathfrak{C}_k$-Limitierbarkeit der Funktion $f(x)$ $(x\geqq 0)$ in Zusammenhang gebracht werden, behandeln wir in §6 die analoge Frage für $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ und $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Das Ergebnis ist der folgende

---

[2]) Diese Form des Satzes findet sich implizit bei CARTWRIGHT [3], explizit bei MACINTYRE [10, S. 16]; vgl. auch BOAS [2, S. 180].

[3]) Dieses Ergebnis findet sich zuerst bei PLANCHEREL-PÓLYA [11a, S. 243]. Unabhängig davon wurde es neuerdings von GAIER bewiesen [5, S. 454]. Vgl. dazu auch BOAS [2a].

Satz 10. *Es sei* $f(z)\in\mathfrak{H}_\alpha$ *und* $k\geqq 0$ *fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Ist* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k*-summierbar, so ist* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ $\mathfrak{C}_k$*-summierbar, sofern* $h_f(\pm\alpha)<\pi\sin\alpha$ *ist.*

b) *Ist* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ $\mathfrak{C}_k$*-summierbar, so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k*-summierbar, sofern* $h_f(\pm\alpha)<2\pi\sin\alpha$ *ist.*

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha)\leqq\pi\sin\alpha$ *bzw.* $\leqq 2\pi\sin\alpha$.

Zum Schluß bringen wir noch eine Anwendung von Satz 9 auf Cesàro-Borel-Verfahren (s. DOETSCH [4] und GAIER [6, S. 878])[4]. Unser Ergebnis ist

Satz 11. *Es sei* $s_n=O(K^n)$ $(n\to\infty$, K *fest) und* $k>0$ *fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Aus* $C_kB_I\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ *folgt* $\mathfrak{C}_kB\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$, *wenn* $K<(\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ *ist.*

b) *Aus* $\mathfrak{C}_kB\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ *folgt* $C_kB_I\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$, *wenn* $K<(4\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ *ist.*

Diese Aussagen werden falsch für

$$s_n=O\left(n^{\{k\}}(\pi^2+1)^{n/2}\right)^{5}) \quad \text{bzw.} \quad s_n=O\left(n(4\pi^2+1)^{n/2}\right).$$

Insbesondere können also in a) und b) die Zahlen $(\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ und $(4\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ durch keine größeren ersetzt werden. Ob die Aussagen a) und b) schon für $s_n=O\left((\pi^2+1)^{n/2}\right)$ bzw. $s_n=O\left((4\pi^2+1)^{n/2}\right)$ falsch werden, konnte nicht geklärt werden.

Mit Satz 11 ist die von GAIER in [6, S. 879] gestellte Frage beantwortet.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche Hinweise bei der Durchführung ist der Verfasser Herrn Dr. D. GAIER zu großem Dank verpflichtet.

§ 2. Definitionen und Hilfssätze

In diesem Paragraphen werden für einige im folgenden immer wieder auftretende Begriffe abkürzende Bezeichnungen eingeführt und ein paar kleinere Hilfssätze bewiesen.

Mit W_α bezeichnen wir den offenen Winkelraum $|\varphi|<\alpha\left(0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$, mit $\overline{W}_\alpha$ seine abgeschlossene Hülle.

Definition 1. *Die Funktion* $f(z)$ *sei in* $\overline{W}_\alpha$ *stetig. Dann definieren wir für alle* $z\in\overline{W}_\alpha$ *folgende Funktionen* $\mathfrak{S}_k(z;f)$ *und* $\mathfrak{T}_k(z;f)$:

$$\mathfrak{S}_k(z;f)=\begin{cases} f(z) & (k=0)\\ \dfrac{1}{\Gamma(k)}\displaystyle\int_0^z (z-w)^{k-1}f(w)\,dw & (k>0)^{6}); \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{T}_k(z;f)=\Gamma(k+1)\left[\mathfrak{S}_{k+1}(z+1;f)-\mathfrak{S}_{k+1}(z;f)\right] \quad (k\geqq 0). \tag{2.2}$$

[4]) Die Verfahren C_kB_I und $\mathfrak{C}_kB$ werden in Definition 4 erklärt.

[5]) Dabei bezeichne $\{k\}$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich k.

[6]) Hier und auch im folgenden werde stets geradlinig von 0 nach z integriert. Dabei wird $(z-w)^{k-1}$ so gewählt, daß es für positives z auf dieser Strecke positiv wird.

Hilfssatz 1. *Ist die Funktion $f(z)$ in W_α holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig, so gilt das gleiche auch für die Funktionen $\mathfrak{S}_k(z;f)$ für $k>0$. Ferner besteht die Beziehung*

$$h_{\mathfrak{S}_k(f)}(\varphi) \leqq h_f(\varphi) \qquad (|\varphi| \leqq \alpha). \tag{2.3}$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{S}_k(z;f) = \frac{1}{\Gamma(k)} z^k g(z)$ für $k>0$, wobei $g(z) = \int_0^1 (1-u)^{k-1} f(zu)\, du$ ist.

(a) Die Funktionen $g_n(z) = \int_0^1 (1-u)^{k-1} f\left(zu + \frac{1}{n}\right) du$ sind in W_α holomorph.

Ferner strebt $g_n(z) \to g(z)$ $(n \to \infty)$, gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von W_α. Also ist $g(z)$ in W_α holomorph und damit auch $\mathfrak{S}_k(z;f)$.

(b) Die Funktion $g(z)$ ist in $\overline{W_\alpha}$ stetig, also auch $\mathfrak{S}_k(z;f)$.

(c) Für ein festes φ $(|\varphi| \leqq \alpha)$ gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Konstante $M(\varepsilon)$, so daß gilt

$$|f(re^{i\varphi})| \leqq M(\varepsilon)\, e^{(h_f(\varphi)+\varepsilon)r}$$

[s. (1.3)]. Also wird

$$|\mathfrak{S}_k(z;f)| \leqq \frac{1}{\Gamma(k)} r^k M(\varepsilon)\, e^{(h_f(\varphi)+\varepsilon)r} \int_0^1 (1-u)^{k-1}\, du \leqq r^k M_1(\varepsilon)\, e^{(h_f(\varphi)+\varepsilon)r}.$$

Somit gilt $h_{\mathfrak{S}_k(f)}(\varphi) \leqq h_f(\varphi) + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon>0$ und daraus folgt (2.3).

Als nächstes führen wir in üblicher Weise (s. z.B. HARDY [7]) einen allgemeinen Differentialoperator D^m ein.

Definition 2. *Die Funktion $f(z)$ sei in W_α holomorph und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Wir setzen dann für jedes $m \geqq 0$ und $z \in W_\alpha$*

$$D^m f(z) = \frac{1}{\Gamma([m]+1-m)} \frac{d^{[m]+1}}{dz^{[m]+1}} \left\{ \int_0^z (z-w)^{[m]-m} f(w)\, dw \right\}. \tag{2.4}$$

Man sieht sofort, daß für ganzes $m \geqq 0$ $D^m f(z) = \frac{d^m}{dz^m} f(z)$ gilt. Berücksichtigt man (2.1), so läßt sich schreiben

$$D^m f(z) = D^{[m]+1}\, \mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z;f). \tag{2.5}$$

Hilfssatz 2. *Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so ist $f'(z) \in \mathfrak{F}_\beta$ $(0<\beta<\alpha)$.*

Beweis. Offensichtlich läßt sich zu jedem β $(0<\beta<\alpha)$ einheitlich für alle $z \in \overline{W}_\beta$ ein $d>0$ wählen, so daß gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

wenn K der Kreis um z mit Radius d ist. Also ist

$$|f'(z)| \leqq \frac{1}{d} M e^{a(|z|+d)} = M_1 e^{a|z|} \qquad (z \in \overline{W}_\beta).$$

Hilfssatz 3. *Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so ist $D^m \mathfrak{S}_k(z+1;f) \in \mathfrak{F}_\beta$, wobei $0<\beta<\alpha$. Ferner gilt die Beziehung*

$$D^m \mathfrak{S}_k(z+1;f) = \mathfrak{S}_{k-m}(z+1;f) \qquad (0 \leqq m \leqq k;\ z \in \overline{W}_\beta), \tag{2.6}$$

insbesondere also

$$D^k \mathfrak{S}_k(z+1;f) = f(z+1). \tag{2.7}$$

Beweis. Die Funktion $\mathfrak{S}_k(z;f)$ ist nach Hilfssatz 1 in W_α holomorph und vom Exponentialtyp und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Also gilt wieder nach Hilfssatz 1 von $\mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z;\mathfrak{S}_k(f))$ dasselbe. Aus Hilfssatz 2 und (2.5) folgt dann sofort $D^m \mathfrak{S}_k(z+1;f) \in \mathfrak{F}_\beta$.

Sehr leicht zeigt man nun für positives z die Beziehung (2.6). Es gilt nämlich (s. z.B. HARDY [8; S. 111])

$$\mathfrak{S}_{[m]+1-m}(x;\mathfrak{S}_k(f)) = \mathfrak{S}_{k+[m]+1-m}(x;f) \tag{2.8}$$

und, wie man sofort verifiziert,

$$\frac{d}{dx}\mathfrak{S}_r(x;f) = \mathfrak{S}_{r-1}(x;f) \quad \text{für} \quad r \geqq 1. \tag{2.9}$$

Aus (2.5), (2.8) und (2.9) folgt dann (2.6) für positives z, also (durch analytische Fortsetzung) für alle $z \in \overline{W}_\beta$.

Hilfssatz 4. *Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Ferner sei γ mit $0 < |\gamma| \leqq \alpha \leqq \pi/2$ fest gegeben und $h_f(\gamma) < c$. Dann folgt aus $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ stets*

$$\lim_{x\to\infty} e^{-c\varrho} f(x + \varrho e^{i\gamma}) = 0 \tag{2.10}$$

gleichmäßig für alle $\varrho > 0$.

Beweis. Wir führen die Hilfsfunktion $g(z) = e^{i\frac{c}{\sin\gamma}z} f(z)$ ein. Auf dem Strahl $\arg z = \gamma$ gilt $g(z) \to 0$ ($|z| \to \infty$) und auf dem Strahl $\arg z = 0$ gilt $g(x) \to 0$ ($x \to \infty$). Nach dem Prinzip von PHRAGMÉN und LINDELÖF (s. z.B. TITCHMARSH [*12*, S. 177]) folgt daraus die Beschränktheit von $g(z)$ in dem durch diese beiden Strahlen eingeschlossenen Winkelraum und stärker noch (s. z.B. TITCHMARSH [*12*, S. 179]), daß $g(z) \to 0$ strebt für $|z| \to \infty$, gleichmäßig in diesem Winkelraum. Setzt man nun $z = x + \varrho e^{i\gamma}$, so ergibt sich (2.10).

Endlich sei noch ohne Beweis (s. BOAS [*2*, S. 66–68]) erwähnt

Hilfssatz 5. *Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$; ferner sei $h_f(0) \leqq 0$ und $h_f(\pm\alpha) < c$. Dann gilt*

$$\begin{cases} h_f(\varphi) \leqq h_f(\alpha)\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha} & (0 \leqq \varphi \leqq \alpha) \\ h_f(\varphi) \leqq h_f(-\alpha)\dfrac{|\sin\varphi|}{\sin\alpha} & (0 \geqq \varphi \geqq -\alpha) \end{cases} \tag{2.11}$$

und

$$|f(z)| \leqq M e^{c|z|} \quad (z \in \overline{W}_\alpha). \tag{2.12}$$

§ 3. Erweiterungen eines Satzes der Funktionentheorie

Wir sind nun in der Lage, die *Erweiterungen von Satz B* zu beweisen.

Satz 3. *Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Dann folgt aus $f(x+b) - f(x) = s x^k + o(x^k)$ für $x \to \infty$ (s komplex, k reell, $0 < b < \infty$) stets $f'(x) = \frac{s}{b} x^k + o(x^k)$ für $x \to \infty$, sofern $h_f(\pm\alpha) < \frac{2\pi}{b}\sin\alpha$ ist. Diese Aussage wird falsch für $h_f(\pm\alpha) \leqq \frac{2\pi}{b}\sin\alpha$.*

Dieser Satz schließt also von einem gewissen Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{f(x+b)-f(x)}{b}$ $(x\to\infty)$ auf dasselbe Verhalten des Differentialquotienten $f'(x)$ $(x\to\infty)$.

Beweis[7]). Man sieht leicht ein, daß es genügt, den Spezialfall — aus $f(x+1)-f(x)=o(x^k)$ folgt $f'(x)=o(x^k)$ — zu beweisen. Denn ist $b\neq 1$, so setze man $f(z)=f^*\left(\frac{z}{b}\right)$, und ist $f(x+1)-f(x)\cong s\,x^k$, so betrachte man die Funktion $f^*(z)=f(z)-\frac{s}{k+1}(z+1)^{k+1}$ für $k\neq -1$ bzw. $f^*(z)=f(z)-s\log(z+1)$ für $k=-1$.

Es sei nun $g(z)=f(z+1)-f(z)$ und $G(z)=\int_0^z g(w)\,dw$ für alle z im Holomorphiegebiet von $f(z)$. Dann wählen wir positive Konstanten c und β, so daß gilt

(3.1) $\quad h_f(\pm\alpha)<c<2\pi\sin\beta<2\pi\sin\alpha$

und führen die Funktion

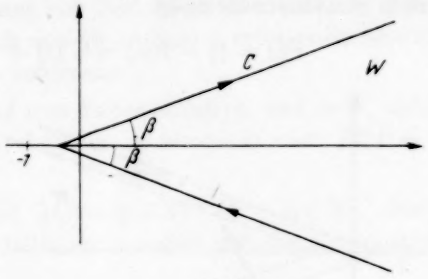


Fig. 1

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}\,G(z+w)\,dw \qquad (z\in W_\beta) \tag{3.2}$$

ein. Dabei sei C der oben gezeichnete Weg, dessen Scheitel so nahe beim Ursprung liege, daß für alle $z\in W_\beta$ und $w\in C$ der Punkt $z+w$ im Holomorphiegebiet von $f(z)$ liegt.

Wir beweisen nun die Holomorphie von $F(z)$ in W_β und die Gültigkeit von

$$f'(z)=F'(z) \quad (z\in W_\beta). \tag{3.3}$$

(a) Zunächst sieht man leicht ein, daß $f(x)=O(x^{k+1})$ $(x\to\infty)$ ist. Also ist sicherlich $h_f(0)\leqq 0$. Daraus folgt nach Hilfssatz 5 wegen (3.1)

$$|f(z)|\leqq M\,e^{c|z|} \qquad (z\in\overline{W}_\alpha).$$

Dann gilt aber auch

$$|G(z+w)|\leqq M_1\,e^{c|z+w|}\leqq M_1\,e^{c(|z|+|w|)} \qquad (z+w\in\overline{W}_\alpha). \tag{3.4}$$

Da nun längs C für $|w|\to\infty$

$$|\sin\pi w|^2\sim e^{2\pi\sin\beta|w|} \tag{3.5}$$

gilt, ist das Integral (3.2) wegen (3.1), (3.4) und (3.5) in jedem beschränkten Teilbereich von W_β gleichmäßig konvergent. Das heißt, $F(z)$ ist in W_β holomorph. Wegen (3.4) gilt ferner noch die Abschätzung

$$|F(z)|\leqq M_2\,e^{c|z|} \qquad (z\in W_\beta). \tag{3.6}$$

[7]) Vergleiche hierzu NÖRLUND [*11*, S. 68ff.].

(b) Es gilt die Beziehung

$$F(z+1)-F(z)=g(z)=f(z+1)-f(z) \quad (z\in W_\beta). \tag{3.7}$$

$$F(z+1)-F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}\left[G(z+1+w)-G(z+w)\right]dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C+C_1}\frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}\,G(z+w)\,dw,$$

wenn C_1 der um eine Einheit nach rechts verschobene Weg C bedeutet. Nach dem Residuensatz folgt

$$F(z+1)-F(z)=G'(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2+C_3}\frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}\,G(z+w)\,dw.$$

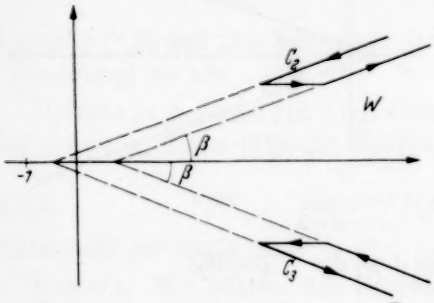


Fig. 2

Läßt man nun die waagrechten Teilstücke der Wege C_2 und C_3 ins Unendliche rücken, so sieht man leicht, daß $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2+C_3}\ldots$ für jedes feste $z\in W_\beta$ gegen Null strebt. Also besteht die Beziehung (3.7).

(c) Wir beweisen nun

$$F(z)=f(z)+\text{const} \quad (z\in W_\beta). \tag{3.8}$$

Wegen (3.7) gilt $F(z)=f(z)+p(z)$, wobei $p(z)$ holomorph in W_β ist und der Beziehung $p(z+1)=p(z)$ genügt. Ferner gilt wegen (3.1) und (3.6)

$$|p(z)|\leqq M_3 e^{c|z|} \quad (z\in W_\beta). \tag{3.9}$$

Die Funktion $p(z)$ muß also eine ganze Funktion mit der Periode 1 und vom Exponentialtyp sein, die dann (s. BOAS [2, S. 109]) für eine natürliche Zahl n die folgende Darstellung erlaubt:

$$p(z)=\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{2\pi i\nu z}.$$

Da aber hierbei $h_{p(z+1)}(\pm\beta)=2\pi n\cdot\sin\beta$ ist, muß wegen (3.1) und (3.9) $n=0$ sein, d.h. $p(z)=\text{const}$. Damit ist (3.3) bewiesen.

(d) Wir kommen nun zum Beweis der eigentlichen Aussage von Satz 3.

Es gilt $g(x)=o(x^k)\,(x\to\infty)$ und wegen (2.12) und (3.1) $h_g(\pm\beta)<c$. Nach Hilfssatz 4 folgt daraus

$$\lim_{x\to\infty} e^{-c\varrho}\left|g\left(x+\varrho e^{\pm i\beta}\right)\right|\left|x+\varrho e^{\pm i\beta}\right|^{-k}=0, \tag{3.10}$$

gleichmäßig für alle $\varrho>0$. Da jedoch bei positivem k für alle $\varrho>0$ und $x\geqq 1$

$$\left|x+\varrho e^{\pm i\beta}\right|^{-k}=x^{-k}\left|1+\frac{\varrho}{x}e^{\pm i\beta}\right|^{-k}\geqq x^{-k}(1+\varrho)^{-k} \tag{3.11}$$

ist, gibt es hiernach mit (3.10) zu jedem $\varepsilon>0$ ein $x_0(\varepsilon)$, so daß gilt

$$|g(x+\varrho e^{\pm i\beta})|<\varepsilon(1+\varrho)^k e^{c\varrho}x^k \qquad (x\geqq x_0\geqq 1;\ \varrho>0). \tag{3.12}$$

Hieraus ersieht man sofort mit Hilfe von (3.1) und (3.5), daß

$$f'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}\,g(x+w)\,dw=o(x^k) \qquad (x\to\infty).$$

Den Fall nicht positiver k erledigt man sogar noch einfacher.

(e) Ein Beispiel für die letzte Behauptung in Satz 3 ist die Funktion $f(z)=\sin 2\pi z$. Damit ist der Beweis vollständig.

Die in § 1 erwähnte *zweite Erweiterung von Satz B* ist eine einfache Folge reeller Zusammenhänge und im Hinblick auf die in Satz 5 erfolgende Anwendung auf funktionale Cesàro-Verfahren interessant.

Satz 4. *Ist $f(z)$ in W_α holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig, so folgt aus $f(x)=s\,x^k+o(x^k)$ $(x\to\infty;\ k>-1,\ s$ komplex) stets $D^m f(x)=o(x^k)$ $(x\to\infty;\ m>0)$.*

Beweis. (a) ganzes $m>0$: Es ist $g(z)=(z+1)^{-k}f(z+1)\in\mathfrak{F}_\alpha$. Nach Satz B folgt $g'(x)=o(1)$ $(x\to\infty)$. Mit Hilfssatz 2 ergibt sich die Behauptung für $m>1$.

(b) beliebiges nicht ganzes $m>0$: Es gilt (2.5). Also genügt es wegen (a) nachzuweisen, daß

$$g(z)=D\,\mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z+1;f)\in\mathfrak{F}_\beta \qquad (0<\beta<\alpha) \tag{3.13}$$

und

$$g(x)=o(x^k) \qquad (x\to\infty) \tag{3.14}$$

gilt. Die Aussage (3.13) folgt sofort aus den Hilfssätzen 1 und 2. Zum Beweis von (3.14) setzen wir $[m]-m=-j$ $(0<j<1)$ und $f(z)=s(z+1)^k+f^*(z)$ wobei $f^*(x)=o(x^k)$ $(x\to\infty)$. Es ist

$$g(x-1)=\frac{1}{\Gamma(1-j)}D\left\{\int_0^{x-1}(x-u)^{-j}f(u)\,du+\int_{x-1}^{x}(x-u)^{-j}f(u)\,du\right\}.$$

Nun gilt

$$\left|D\int_{x-1}^{x}(x-u)^{-j}f(u)\,du\right|=\left|\int_{x-1}^{x}(x-u)^{-j}f'(u)du\right|$$

$$\leqq \max_{x-1\leq u\leq x}|f'(u)|\cdot\int_{x-1}^{x}(x-u)^{-j}\,du=o(x^k) \qquad (x\to\infty).$$

Ferner ist

$$D\int_0^{x-1}(x-u)^{-j}f(u)\,du=-j\int_0^{x-1}(x-u)^{-1-j}f(u)\,du+f(x-1).$$

Da $f(x-1)=s\,x^k+o(x^k)$ $(x\to\infty)$ ist, ist der Beweis von (3.14) erbracht, wenn wir noch zeigen können, daß gilt

$$-j\int_0^{x-1}(x-u)^{-1-j}f(u)\,du=-s\,x^k+o(x^k) \qquad (x\to\infty). \tag{3.15}$$

Dazu spalten wir das Integral in (3.15) auf in 3 Teilintegrale. Es gilt für $0<q<1$

$$(3.16)\quad \begin{cases} \left| -j\int_0^{x-x^q} (x-u)^{-1-j} f(u)\,du \right| \leqq M\int_0^{x-x^q} (x-u)^{-1-j}(u+1)^k\,du \\ \qquad \leqq \frac{M}{k+1}\, x^{-q(1+j)}\left[(x-x^q+1)^{k+1}-1\right] \\ \qquad \leqq M_1 x^{1-q(1+j)} x^k\left[(1-x^{q-1}+x^{-1})^{k+1}-x^{-k-1}\right] \\ \qquad = o(x^k) \qquad (x\to\infty), \end{cases}$$

wenn wir q noch so wählen, daß $q>\frac{1}{1+j}$ ist. Ferner gilt für ein $\xi_x \in <x-x^q, x-1>$

$$(3.17)\quad \begin{cases} \left| -j\int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j} f^*(u)\,du \right| \leqq j\,|f^*(\xi_x)| \int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j}\,du \\ \qquad \leqq |f^*(\xi_x)|\,(1-x^{-qj}) \\ \qquad = o(x^k) \qquad (x\to\infty). \end{cases}$$

Entsprechend (3.17) überlegt man sich die folgende Beziehung

$$(3.18)\quad -j\int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j}\, s\,(u+1)^k\,du = -s\,x^k + o(x^k) \qquad (x\to\infty).$$

Aus (3.16) bis (3.18) ergibt sich aber (3.15) und damit (3.14).

§ 4. Limitierungstheoretische Sätze

Ist eine Funktion $f(x)$ für $x\to\infty$ $\mathfrak{C}_k$-limitierbar zum Wert s, so können wir nach (1.2) und (2.1) auch schreiben

$$(4.1)\qquad \mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Gamma(k+1)\, x^{-k}\, \mathfrak{S}_k(x;f) = s.$$

Satz 5. *Ist $f(z)\in \mathfrak{F}_\alpha$, $k>0$ und $l>-1$ fest vorgegeben, so folgt aus $\mathfrak{S}_k(x;f) = s\,x^l + o(x^l)$ stets $\mathfrak{S}_{k'}(x;f) = o(x^l)$ $(x\to\infty;\ 0\leqq k'<k)$. Insbesondere folgt aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ $(k>0)$ stets $\mathfrak{S}_{k'}(x;f) = o(x^k)$ $(x\to\infty; 0<k'<k)$ und $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$.*

Beweis. Die Funktion $\mathfrak{S}_k(z;f)$ ist nach Hilfssatz 1 in W_α holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Also folgt aus $\mathfrak{S}_k(x;f) = s\,x^l + o(x^l)$ $(x\to\infty)$ nach Satz 4 und (2.6)

$$D^{k-k'}\,\mathfrak{S}_k(x;f) = \mathfrak{S}_{k'}(x;f) = o(x^l) \qquad (x\to\infty).$$

Als nächstes führen wir im Zusammenhang mit den bekannten Rieszschen Limitierungsverfahren für Folgen neue Limitierungsverfahren für Funktionen — die $\mathfrak{R}_k$-Verfahren — ein.

Definition 3a. *Ist s_n $(n=0,1,\ldots)$ eine Folge komplexer Zahlen, so sei*

$$T_k(x;s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{[x]+1} (x+1-\nu)^k\, s_\nu - \sum_{\nu=0}^{[x]} (x-\nu)^k\, s_\nu \qquad (k>0)$$

gesetzt. Die Folge s_n *heißt* R_k*-limitierbar zum Wert* s $(R_k\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s)$, *wenn* $\lim_{x\to\infty} x^{-k}\, T_k(x; s_\nu) = s$ *ist*[8]).

3b. *Die komplexwertige Funktion* $f(x)$ $(x \geqq 0)$ *heißt* $\mathfrak{R}_k$*-limitierbar* $(k>0)$ *zum Wert* s $(\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s)$, *wenn mit der Bezeichnung* (2.2) *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}\, \mathfrak{T}_k(x; f) = s.$$

Wir stellen nun einen Zusammenhang her zwischen der $\mathfrak{R}_k$-Limitierbarkeit einer Funktion $f(x)$ und der R_k-Limitierbarkeit der Folge $s_n = f(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Es gilt der folgende

Satz 6. *Ist* $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, *gilt* $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha$ *und ist* $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty;\ k>0$, *fest*), *so folgt aus* $R_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ *stets* $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ *und umgekehrt.*

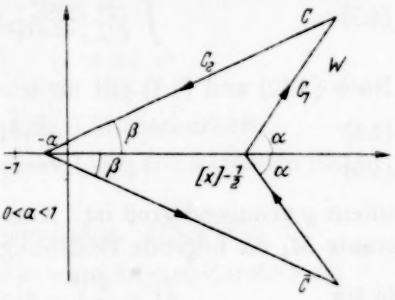


Fig. 3

Dieser Satz ergibt sich sofort aus dem folgenden Satz 6a, den wir jetzt beweisen werden.

Satz 6a. *Ist* $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, *gilt* $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha$ *und ist* $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty;\ k\geqq 0$, *fest*), *so ist für* $x\to\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{[x]} (x-\nu)^k f(\nu) - \int_0^x (x-u)^k f(u)\, du \sim x^k.$$

Beweis. Wegen $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$ genügt es die Differenz

$$G_k(x) = \sum_{\nu=0}^{[x]-1} (x-\nu)^k f(\nu) - \int_0^{[x]-\frac{1}{2}} (x-u)^k f(u)\, du \tag{4.2}$$

zu untersuchen, die man noch in bekannter Weise (s. z. B. Behnke-Sommer [*1*, S. 216]) folgendermaßen umschreiben kann

$$G_k(x) = \int_C \frac{(x-w)^k}{1-e^{-2\pi i w}} f(w)\, dw + \int_{\overline{C}} \frac{(x-w)^k}{e^{2\pi i w}-1} f(w)\, dw.$$

Dabei sind C und $\overline{C}$ die beiden oben gezeichneten Wege, wenn c, c_1 und β positive Konstanten bezeichnen, so daß gilt

$$h_f(\pm\alpha) < c < c_1 < 2\pi \sin\beta < 2\pi \sin\alpha. \tag{4.3}$$

(a) Abschätzung des Integralbeitrags längs C_1. Zu beliebigem $\varepsilon>0$ kann man ein $x_0(\varepsilon)$ angeben, so daß für alle $x \geqq x_0 \geqq 1$ und $\varrho>0$ die Beziehung

$$\left|f([x] - \tfrac{1}{2} + \varrho\, e^{i\alpha})\right| < \varepsilon\, e^{c\varrho} (1+\varrho)^k x^k \tag{4.4}$$

besteht, wie schon von (3.10) bis (3.12) aus Hilfssatz 4 hergeleitet wurde. Ferner gilt

$$\left|x - [x] + \tfrac{1}{2} - \varrho\, e^{i\alpha}\right|^k \leqq (\tfrac{3}{2} + \varrho)^k \tag{4.5}$$

[8]) Das sind die bekannten Limitierungsverfahren der Rieszschen arithmetischen Mittel

und

$$(4.6)\qquad \begin{cases} |1-e^{-2\pi i([x]-\frac{1}{2}+\varrho e^{i\alpha})}| = |1+e^{-2\pi i\varrho e^{i\alpha}}| \\ \qquad\qquad \geqq |1-e^{2\pi\varrho\sin\alpha}| \geqq e^{2\pi\varrho\sin\beta}, \end{cases}$$

sobald ϱ genügend groß ist. Aus (4.3) bis (4.6) erhält man sofort

$$\int_{C_1} \frac{(x-w)^k}{1-e^{-2\pi i w}} f(w)\,dw = o(x^k) \qquad (x\to\infty).$$

(b) Wir zeigen jetzt, daß gilt

$$(4.7)\qquad \int_{C_2} \frac{(x-w)^k}{1-e^{-2\pi i w}} f(w)\,dw \sim x^k \qquad (x\to\infty).$$

Nach (2.12) und (4.3) gilt für $w=-a+\varrho e^{i\beta}$ $(\varrho>0)$

$$(4.8)\qquad |f(w)| \leqq M e^{c\varrho},$$

$$(4.9)\qquad |1-e^{-2\pi i w}| \geqq |1-e^{2\pi\varrho\sin\beta}| \geqq e^{c_1\varrho},$$

sofern ϱ genügend groß ist. Können wir nun noch zeigen, daß für eine Konstante M_1 die folgende Beziehung gilt

$$(4.10)\qquad \left|\left(1-\frac{w}{x}\right)^k - 1\right| \leqq M_1\frac{\varrho}{x} \qquad (w\in C_2,\ x\geqq 1),$$

dann ergibt sich aus (4.3) und (4.8) bis (4.10) die Richtigkeit von (4.7). Für $k=0$ ist nichts zu zeigen. Für $k>0$ schätzen wir folgendermaßen ab

$$\left|\left(1-\frac{w}{x}\right)^k - 1\right| = k\left|\int_0^{w/x}(1-s)^{k-1}\,ds\right|$$

$$\leqq \begin{cases} k\left(1+\dfrac{|w|}{x}\right)^{k-1}\dfrac{|w|}{x} & \text{für } k\geqq 1 \\ k\,\text{const}\,\dfrac{|w|}{x} & \text{für } 0<k<1 \end{cases}$$

$$\leqq M_2\frac{|w|}{x} \qquad (w\in C_2,\ x\geqq 1),$$

was man sich leicht geometrisch klarmacht. Damit ist (4.10) bewiesen.

(c) Ganz entsprechend schließt man für das Integral längs $\overline{C}$, so daß also

$$G_k(x)\sim x^k \qquad (x\to\infty) \qquad \text{gilt.}$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Umständen die $\mathfrak{C}_k$-Limitierbarkeit einer Funktion deren $\mathfrak{R}_k$-Limitierbarkeit bedingt und umgekehrt. Der Schluß ist sehr einfach, wenn wir von der $\mathfrak{C}_k$-Limitierbarkeit ausgehen. Für den Umkehrschluß wird dann Satz 3 herangezogen.

Satz 7. *Ist die Funktion $f(x)$ für $x\geqq 0$ stetig, so folgt aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)=s$ $(k>0$, fest) stets $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)=s$.*

Beim Beweis berücksichtige man nur, daß gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_k(x;f) &= \Gamma(k+1)\left[\mathfrak{S}_{k+1}(x+1;f)-\mathfrak{S}_{k+1}(x;f)\right]\\ &= \Gamma(k+1)\,D\,\mathfrak{S}_{k+1}(x+\vartheta_x;f) \qquad (0<\vartheta_x<1)\\ &= \Gamma(k+1)\,\mathfrak{S}_k(x+\vartheta_x;f).\end{aligned}$$

Satz 8. *Ist* $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ *und gilt* $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha$, *so folgt aus* $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ $(k>0$, *fest) stets* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $g_k(z) = \mathfrak{S}_{k+1}(z+1; f) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Ferner ist

$$h_{g_k}(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha. \tag{4.11}$$

Denn nach (2.3) ist $h_{\mathfrak{S}_{k+1}}(\pm\alpha) \leqq h_f(\pm\alpha)$. Ferner gilt $h_{\mathfrak{S}_{k+1}}(0) \leqq 0$, woraus nach (2.12) dann (4.11) folgt. Somit erfüllt $g_k(z)$ die Voraussetzungen von Satz 3 und danach folgt mit (2.6)

$$\begin{aligned} D\Gamma(k+1)\, g_k(x) &= D\Gamma(k+1)\, \mathfrak{S}_{k+1}(x+1; f) \\ &= \Gamma(k+1)\, \mathfrak{S}_k(x+1; f) \\ &= s\, x^k + o(x^k) \qquad (x\to\infty). \end{aligned}$$

§ 5. Zusammenhang von C_k- und $\mathfrak{C}_k$-Limitierbarkeit

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den folgenden Hauptsatz zu beweisen.

Satz 9. *Es sei* $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ *und* $k>0$ *fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Aus* $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ *folgt* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$, *wenn* $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin\alpha$ *ist.*

b) *Aus* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ *folgt* $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$, *wenn* $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha$ *ist.*

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha) \leqq \pi \sin\alpha$ *bzw.* $\leqq 2\pi \sin\alpha$.

Beweis. a) Aus $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ folgt (s. z.B. Hobson [9, S. 90]) $R_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ und $f(n) = o(n^k)$ $(n\to\infty)$ (s. Hardy [8, S. 101]). Satz A liefert $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$ und Satz 6 $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$, woraus sich dann mit Satz 8 $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ ergibt.

b) Aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ folgt nach Satz 7 $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ und nach Satz 5 $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$. Mit Satz 6 ergibt sich $R_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ und daraus $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ (s. z.B. Hobson [9, S. 90]).

Die beiden Funktionen $f_1(z) = (z+1)^k \sin\pi z$ und $f_2(z) = (2\pi z+1)^\varepsilon \cos 2\pi z$ sind Beispiele für die letzte Behauptung.

1. Es ist für jedes $k>0$ $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f_1(n) = 0$, während $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f_1(x)$ wegen Satz 5 nicht existiert.

2. Es ist für $k>\varepsilon$ $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$, während $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f_2(n)$ nicht existiert. Den ersten Teil der Behauptung sieht man z.B. folgendermaßen ein. Nach Hardy [8, S. 139] ist für $k>\varepsilon$ $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} (n+1)^\varepsilon \cos n = 0$, woraus nach a) $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} (x+1)^\varepsilon \cos x = 0$ folgt. Nun verifiziert man aber sofort, daß aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ für $a>0$ folgt $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(ax) = s$. Damit ergibt sich schließlich $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

Wir bemerken noch, daß die Beweisführung von Satz 9 gleichzeitig gezeigt hat

Zusatz. Der Satz 9 bleibt richtig, wenn man $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n)$ durch $R_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n)$ und $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)$ durch $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x)$ ersetzt.

§ 6. Zusammenhang von C_k- und $\mathfrak{C}_k$-Summierbarkeit

Eine beliebige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen heißt C_k-summierbar, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(k+1)\, n^{-k} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k}{k} a_\nu \qquad (k \geqq 0) \tag{6.1}$$

existiert.

Das Integral $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ einer komplexwertigen Funktion $f(x)$ heißt $\mathfrak{C}_k$-summierbar, wenn

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k} \int_0^{x} (x-u)^k f(u)\, du \qquad (k \geqq 0) \tag{6.2}$$

existiert [vgl. (1.1) und (1.2)][9].

Wir stellen nun wieder für Funktionen $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ die Frage, unter welchen Umständen man aus der C_k-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ auf die $\mathfrak{C}_k$-Summierbarkeit des Integrals $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ schließen kann und umgekehrt. Es sei gleich bemerkt, daß wir uns in diesem Fall mit einer reinen Summierbarkeitsaussage begnügen und nichts über die Werte der C_k-Summe bzw. $\mathfrak{C}_k$-Summe aussagen wollen.

Satz 10. *Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und $k \geqq 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k-summierbar, so ist $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ $\mathfrak{C}_k$-summierbar, sofern $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin\alpha$ ist.*

b) *Ist $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ $\mathfrak{C}_k$-summierbar, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k-summierbar, sofern $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin\alpha$ ist.*

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha) \leqq \pi \sin\alpha$ bzw. $\leqq 2\pi \sin\alpha$.

Beweis. a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k-summierbar ($k \geqq 0$), so gilt (s. z.B. HOBSON [9, S. 90]) $\sum_{\nu=0}^{[x]} (x-\nu)^k f(\nu) \sim x^k$ $(x\to\infty)$ sowie $f(n) = o(n^k)$ $(n\to\infty)$ (s. HARDY [8, S. 101, 102]) und also mit Satz A $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$. Nach Satz 6a ergibt sich hieraus $\int_0^{x} (x-u)^k f(u)\, du \sim x^k$, was zu beweisen war.

b) Ist $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ $\mathfrak{C}_k$-summierbar, gilt also $\mathfrak{S}_{k+1}(x; f) \sim x^k$ $(x\to\infty)$, dann liefert Satz 5 $f(x) = o(x^k)$ $(x\to\infty)$. Nach Satz 6a folgt hieraus $\sum_{\nu=0}^{[x]} (x-\nu)^k f(\nu) \sim x^k$ $(x\to\infty)$, was wieder äquivalent mit der C_k-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ ist.

[9] Der Vergleich der absoluten Konvergenz von $\int f(x)\, dx$ mit der absoluten Konvergenz von $\sum f(n)$ ist durch zwei bereits bekannte Sätze behandelt (vgl. BOAS [2, S. 101 und 197]).

Ähnlich wie bei Satz 9 kann man sich nun überlegen, daß die Funktionen $f_1(z) = (z+1)^k \sin \pi z$ und $f_2(z) = (2\pi z + 1)^{-1} \cos 2\pi z$ Beispiele für die letzte Behauptung sind.

§ 7. Anwendung auf Cesàro-Borel-Verfahren

Wählt man in § 5 für $f(z)$ speziell die Borel-Transformierte $B(z; s_\nu) = e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$ einer komplexen Zahlenfolge s_n $(n = 0, 1, \ldots)$, so erhält man über Satz 9 eine Aussage für Cesàro-Borel-Verfahren.

Definition 4. *Eine komplexe Zahlenfolge* s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ *heißt*

a) $C_k B_1$*-limitierbar zum Wert* s, *wenn* $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} B(n; s_\nu) = s$ *ist;*

b) $\mathfrak{C}_k B$*-limitierbar zum Wert* s, *wenn* $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} B(x; s_\nu) = s$ *ist.*

Wir schreiben dann $C_k B_1\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *bzw.* $\mathfrak{C}_k B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Satz 11. *Es sei* $s_n = O(K^n)$ $(n \to \infty$, K *fest) und* $k > 0$ *fest vorgegeben. Dann gilt:*

a) *Aus* $C_k B_1\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *folgt* $\mathfrak{C}_k B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$, *wenn* $K < (\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ *ist.*

b) *Aus* $\mathfrak{C}_k B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *folgt* $C_k B_1\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$, *wenn* $K < (4\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ *ist.*

Diese Aussagen werden falsch für $s_n = O\left(n^{\{k\}}(\pi^2+1)^{n/2}\right)$[10] *bzw.* $s_n = O\left(n(4\pi^2+1)^{n/2}\right)$.

Beweis. a) Es ist $|s_n| \leqq M K^n$ für ein $K < (\pi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ und daher, wenn $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{z^n}{n!}$ ist, $g(z)$ eine ganze Funktion mit $|g(z)| \leqq M e^{K|z|}$. Betrachtet man nun die ganze Funktion vom Exponentialtyp $f(z) = e^{-z} g(z)$ auf den Strahlen $\arg z = \pm\alpha$ mit $\operatorname{tg} \alpha = \pi$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, so ergibt sich sofort (vgl. Gaier [6, Th. 2]) $h_f(\pm\alpha) = h_g(\pm\alpha) - \cos\alpha < (\pi^2+1)^{\frac{1}{2}} - \cos\alpha = \pi \sin\alpha$; also folgt aus $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty} f(n) = s$ nach Satz 9 sicher $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) = s$, d. h. $\mathfrak{C}_k B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

b) Dieser Teil läßt sich ganz analog beweisen, man setze nur statt π jeweils 2π.

Wir vollenden den Beweis von Satz 11 mit Hilfe der beiden folgenden Gegenbeispiele.

1. Die Folge s_n mit

$$s_n = \begin{cases} 0 & n \leqq \{k\} \\ \dfrac{n!}{(n-\{k\})!} \dfrac{(1+\pi i)^{n-\{k\}} - (1-\pi i)^{n-\{k\}}}{2i} & n > \{k\} \end{cases}$$

besitzt die Borel-Transformierte $B(z; s_\nu) = z^{\{k\}} \sin \pi z$. Daraus ersieht man, daß $C_k B_1\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ist, während jedoch [vgl. das Beispiel der Funktion $f_1(z)$ in § 5] $\mathfrak{C}_k B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n$ nicht existiert.

2. Der Fall $k > 1$ läßt sich sofort durch die Folge t_n erledigen, die auf die Borel-Transformierte $B(z; t_n) = z \cos 2\pi z$ führt. Um auch den Fall $0 < k \leqq 1$

[10] Siehe Fußnote 5.

erledigen zu können, verwenden wir diejenige Folge s_n, deren Borel-Transformierte

$$B(z;s_\nu)=\frac{z\,4^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\pi/2}\cos^{-\alpha}t\cos(4z+\alpha)\,t\,dt \qquad (0<\alpha<1)$$

wird. Für diese Folge s_n gilt $s_n=O\left(n(4\pi^2+1)^{n/2}\right)$ $(n\to\infty)$. Denn es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{z^n}{n!}=e^z\frac{z\,4^{1-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\pi/2}\cos^{-\alpha}t\left(e^{i(4z+\alpha)t}+e^{-i(4z+\alpha)t}\right)dt$$

$$=\frac{4^{1-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left\{\int_0^{\pi/2}\cos^{-\alpha}t\left[e^{i\alpha t}(1+4ti)^n+e^{-i\alpha t}(1-4ti)^n\right]dt\right\}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Folge s_n ist $\mathfrak{C}_k B$-limitierbar, sofern $k>\alpha$ ist. Es gilt nämlich $B(x;s_\nu)=\frac{2^{1-\alpha}\pi x}{\Gamma(1-\alpha-2x)\Gamma(2x+1)}$ $(x\geqq 0)$ (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 134 7)]). Weiter gilt wegen $\Gamma(x)\sin\pi x=\frac{\pi}{\Gamma(1-x)}$ und $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)}=x^a+O(x^{a-1})$ $(x\to\infty)$ (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 58]) $B(x;s_\nu)=x^\alpha\sin\pi(2x+\alpha)+O(x^{\alpha-1})$ $(x\to\infty)$. Somit ist $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x\to\infty}B(x;s_\nu)=0$ sofern $k>\alpha$ ist [vgl. dazu das Beispiel der Funktion $f_2(z)$ in § 5].

Andererseits existiert aber $C_k\text{-}\lim_{n\to\infty}B(n;s_\nu)$ nicht. Damit ist Satz 11 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [2] BOAS, R. P.: Entire functions. New York 1954. — [2a] BOAS, R. P.: Growth of derivatives of entire functions. Math. Z. **68**, 296–298 (1957). — [3] CARTWRIGHT, M. L.: On certain integral functions of order 1. Quart. J. Math. Oxford Ser. **7**, 46–55 (1936). — [4] DOETSCH, G.: Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen. Dissertation. Göttingen 1920. — [5] GAIER, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453–455 (1953). — [6] GAIER, D.: On modified Borel methods. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 873–879 (1955). — [7] HARDY, G. H.: Riemann's form of Taylor's series. J. London Math. Soc. **20**, 48–57 (1945). — [8] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [9] HOBSON, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Bd. II. Cambridge 1926. — [10] MACINTYRE, A. J.: Laplace's transformation and integral functions. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 1–20 (1938/39). — [11] NÖRLUND, N. E.: Differenzenrechnung. Berlin 1924. — [11a] PLANCHEREL, M., u. G. PÓLYA: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. Math. Helv. **9**, 224–248 (1937). — [12] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1952.

Stuttgart, Technische Hochschule, Math. Institut A

(Eingegangen am 23. Dezember 1957)

ZAREMBA, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 295–298 (1958)

Note on the Central Limit Theorem

By
S. K. ZAREMBA

The Central Limit Theorem for independent variables, as proved in its whole generality by FELLER [4], is presently shown to be a fairly simple consequence of a weak form of the Second Limit Theorem. Additional results, generalizing those of KAWATA [8] and concerning moments, are obtained incidentally. Furthermore, an easy generalization of the whole argument leads to a proposition containing, as special cases, all the versions of the Central Limit Theorem for m-dependent variables [2, 3, 6, 7, 10] which could be traced in the existing literature.

THEOREM 1. *Let $\{x_k\}$ be an infinite sequence of independent random variables with respective distribution functions $\{F_k(x)\}$. Assume that, for some non-negative integer p, for a suitably chosen sequence $\{a_n\}$ of positive numbers, and for every positive η:*

$$(i_p) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{-p} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} |x|^p \, dF_k(x) = 0;$$

$$(ii) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|\leq \eta a_n} x^2 \, dF_k(x) - \left[\int_{|x|\leq \eta a_n} x \, dF_k(x) \right]^2 \right\} = 1;$$

and define $\{b_{n,k}\}$ by

$$b_{n,k} = \int_{|x|\leq a_n} x \, dF_k(x).$$

Then the distribution of the random variable

$$X_n = a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - b_{n,k})$$

tends to the normal distribution with zero mean and unit variance; moreover, if $p>0$, the moments of X_n up to the order p tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

PROOF. It is easily seen that if $p>0$, (i_p) entails $(i_0), \ldots, (i_{p-1})$, and that there exists a sequence $\{\varepsilon_k\}$ of positive numbers tending to 0 and satisfying the conditions $(i_0'), \ldots, (i_p')$, (ii'), obtained from $(i_0), \ldots, (i_p)$, (ii) by substituting ε_n for η. Assuming that these conditions are satisfied, make

$$y_{n,k} = x_k \{1 - \max [0, \operatorname{sgn} (|x_k| - \varepsilon_n a_n)]\}; \qquad z_{n,k} = x_k - y_{n,k},$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, n).$$

Then (i_0') can be re-written as follows;

$$(1) \qquad P[z_{n,1} \neq 0] + \cdots + P[z_{n,n} \neq 0] \to 0.$$

Hence, if $Z_n = a_n^{-1}(z_{n,1} + \cdots + z_{n,n})$, a fortiori

$$(2) \qquad \mathrm{p} \lim_{n\to\infty} Z_n = 0.$$

On the other hand, if $Y_n = a_n^{-1}(y_{n,1}+\cdots+y_{n,n})$ and $B_n = a_n^{-1}(b_{n,1}+\cdots+b_{n,n})$, the variable $Y_n - B_n$ clearly has finite moments of every order. In particular,

$$E(Y_n - B_n) \to 0, \tag{3}$$

since we can assume $\varepsilon_n \leqq 1$, and then

$$\begin{cases} |E(Y_n - B_n)| \leqq a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |E(y_{n,k} - b_{n,k})| \\ \quad = a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\varepsilon_n a_n < |x| \leqq a_n} x\, dF_k(x) \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon_n a_n} dF_k(x) \to 0 \end{cases} \tag{4}$$

according to (i_0'). In general,

$$E[Y_n - E(Y_n)]^r = a_n^{-r} \sum_{k(1),\ldots,k(r)=1}^{n} E\left\{ \prod_{i=1}^{r} [y_{n,k(i)} - E(y_{n,k(i)})] \right\}. \tag{5}$$

The last summand can be factorized into products of expectations according to the pattern of identification of $k(1), \ldots, k(r)$. The sum of all the terms factorized in a given way can be represented as

$$\sum a_n^{-\alpha(1)} E[y_{n,k(1)} - E(y_{n,k(1)})]^{\alpha(1)} \cdot \ldots \cdot a_n^{-\alpha(s)} E[y_{n,k(s)} - E(y_{n,k(s)})]^{\alpha(s)},$$

where $\alpha(1), \ldots, \alpha(s) > 0$; $\alpha(1)+\cdots+\alpha(s) = r$; and the summation is extended to all sets of pairwise distinct positive integers $k(1), \ldots, k(s)$ not exceeding n. The absolute value of the sum will increase if each term is replaced by its absolute value, and the summation variables are allowed to take equal values. Then it becomes a product of factors like

$$a_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |E[y_{n,k} - E(y_{n,k})]^{\alpha}|; \tag{6}$$

it will be seen that all these factors are bounded, and that all those for which $\alpha \neq 2$ vanish in the limit.

If $\alpha = 1$, the factor is indeed equal to 0. If $\alpha \geqq 2$, since

$$|y_{n,k} - E(y_{nk})| \leqq 2\varepsilon_n a_n, \tag{7}$$

the value of (6) does not exceed

$$(2\varepsilon_n)^{\alpha-2} a_n^{-2} (\operatorname{var} y_{n,1} + \cdots + \operatorname{var} y_{n,n}), \tag{8}$$

which, according to (ii'), tends to 1 when $\alpha = 2$, and to 0 when $\alpha > 2$. But, if r is odd, every term of (5) must contain factors with odd moments. Hence

$$E[Y_n - E(Y_n)]^r \to 0 \qquad \text{whenever } r \text{ is odd.} \tag{9}$$

If r is even, we are left with sums of products of variances. Since there are $r!/[(r/2)!\, 2^{r/2}]$ ways of forming r variables into $r/2$ pairs, and each of these groupings contributes the same amount to the grand total, the expression to be considered is

$$r!\,[(r/2)!\, 2^{r/2}]^{-1} a_n^{-r} \sum \operatorname{var} y_{n,k(1)} \cdot \ldots \cdot \operatorname{var} y_{n,k(r/2)}, \tag{10}$$

where the sum is taken with respect to all the sets of pairwise distinct values of $k(1), \ldots, k(r/2)$ from 1 to n. However, the upper bounds obtained for the various sums of products of higher moments, and found to be infinitesimal,

still apply if these moments, now assumed to be even, are replaced by the appropriate powers of the corresponding variances. Hence, in the limit, equal values of the summation variables can be allowed, transforming (10) into

$$r!\,[(r/2)!\,2^{r/2}]^{-1}\,a_n^{-r}\,(\operatorname{var} y_{n,1}+\cdots+\operatorname{var} y_{n,n})^{r/2}. \tag{11}$$

Thus, according to (*ii'*),

$$E\,[Y_n-E(Y_n)]^r\to r!/[(r/2)!\,2^{r/2}] \qquad \text{when } r \text{ is even.} \tag{12}$$

The limits given by (9) and (12) for the moments of $Y_n-E(Y_n)$ are those of a normal distribution with zero mean and unit variance. Hence, according to the Second Limit Theorem (cf. e.g. [5]), this distribution is the limit to which the distribution of $Y_n-E(Y_n)$ tends as $n\to\infty$. Finally, owing to a proposition given by CRAMÉR ([1], Section 20.6), and as a consequence of (2) and (3), this is also the limiting distribution of $X_n=Y_n-E(Y_n)+E(Y_n-B_n)+Z_n$. Thus the first part of the theorem is proved.

If $p>0$, it follows easily from (i'_p) that the moments of Z_n up to the order p tend to 0 as $n\to\infty$. Consequently, owing to the Hölder Inequality, the moments of X_n up to the order p tend to the same limits as the corresponding moments of Y_n-B_n. Hence also the second part of the theorem is proved.

DEFINITION. The sequence $\{x_k\}$ of random variables is called m-dependent if the two sets $\{x_{i(1)},\ldots,x_{i(p)}\}$ and $\{x_{k(1)},\ldots,x_{k(q)}\}$ are mutually independent whenever $i(r)+m<k(s)$ for $r=1,\ldots,p$ and $s=1,\ldots,q$.

THEOREM 2. *The conclusions of Theorem 1 are still valid if, in its statement, "independent" is replaced by "m-dependent", if (ii) is re-written as*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-2}\sum_{i,k=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|,\,|y|\leqq\eta a_n} x\,y\,dF_{i,k}(x,y)-\left[\int\limits_{|x|\leqq\eta a_n} x\,dF_i(x)\right]\left[\int\limits_{|y|\leqq\eta a_n} y\,dF_k(y)\right]\right\}=1,$$

where $F_{i,k}(x,y)$ is the joint distribution function of x_i and x_k, and if it is additionally assumed that

$$\text{(iii)}\qquad a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|\leqq a_n} x^2\,dF_k(x)-\left[\int\limits_{|x|\leqq a_n} x\,dF_k(x)\right]^2\right\} \qquad \textit{is bounded.}$$

PROOF. As far as (5), the beginning of the proof of Theorem 1 applies literally. Now, however, for any fixed value of n, the variables $\{y_{n,k}\}$ and $\{z_{n,k}\}$ are m-dependent, and this slightly complicates the factorization of the expectations, but the operation can still be carried out whenever the set $\{y_{n,k(1)},\ldots,y_{n,k(r)}\}$ is decomposable into mutually independent sub-sets, and it will be assumed that this has been done as far as it was possible. As before, terms corresponding to the same factorization can be grouped together, and the absolute value of the corresponding partial sum is found to be smaller than a product of sums like

$$a_n^{-\alpha}\sum\left|E\left\{[y_{n,j(1)}-E(y_{n,j(1)})]\cdot\ldots\cdot[y_{n,j(\alpha)}-E(y_{n,j(\alpha)})]\right\}\right|, \tag{13}$$

the sum being taken with respect to all the sets $\{j(1),\ldots,j(\alpha)\}$ for which $1\leqq j(i)\leqq n$ $(i=1,\ldots,\alpha)$, and the corresponding set of random variables cannot be partitioned into mutually independent sets.

If $\alpha = 1$, the value of (13) is exactly 0. Otherwise $\alpha \geqq 2$, and, as a result of the m-dependence of the variables concerned, and of (7), the sum (13) is smaller than

$$\left[2m(\alpha-1)+1\right]^{\alpha-2} a_n^{-2} (2\varepsilon_n)^{\alpha-2} \sum_{|j(1)-j(2)| \leq m} E\left|\prod_{i=1}^{2} |y_{n,j(i)} - E(y_{n,j(i)})|\right| \leq$$

$$\leqq (2m+1)\left[2m(\alpha-1)+1\right]^{\alpha-2} (2\varepsilon_n)^{\alpha-2} a_n^{-2} (\operatorname{var} y_{n,1} + \cdots + \operatorname{var} y_{n,n}).$$

Here, $\left[2m(\alpha-1)+1\right]^{\alpha-2}$ is a crude upper bound for the number of sets of values of $j(3), \ldots, j(\alpha)$ which, given $j(1)$ and $j(2)$, make it impossible to decompose $\{y_{n,j(1)}, \cdots, y_{n,j(\alpha)}\}$ into mutually independent sets. This coefficient, as well as $2m+1$, is independent of n, while it follows easily from (iii) and (4) that $a_n^{-2}(\operatorname{var} y_{n,1} + \cdots + \operatorname{var} y_{n,n})$ is bounded. Thus the factor is always bounded, and tends to 0 if $\alpha > 2$. The remainder of the proof runs exactly as before, the only difference being that now (10) becomes a sum of products of covariances, and (11) has to be replaced by

$$r!\left[(r/2)!\, 2^{r/2}\right]^{-1} a_n^{-2} \sum_{i,k=1}^{n} \operatorname{cov}(y_{n,i}, y_{n,k}).$$

REMARK. Clearly, there is no difficulty in extending the preceding arguments to the case of vector variables; an appropriate form of the Second Limit Theorem for multivariate distributions is given in [9].

ACKNOWLEDGMENTS. The author wishes to express his great indebtedness to Mr. J. D. NORTH, Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd., for encouraging probabilistic research in the Mathematical Services Department of the firm, and for allowing its results to be published. Sincere thanks are also due to Z. A. LOMNICKI for discussing the whole problem in a way which was most useful to the present author.

References

[1] CRAMÉR, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press 1946. — [2] DIANANDA, P. H.: Some probability limit theorems with statistical applications. Proc. Cambridge Philos. Soc. **49**, 239–246 (1953). — [3] DIANANDA, P. H.: The central limit theorem for m-dependent variables asymptotically stationary to second order. Proc. Cambridge Philos. Soc. **50**, 287–292 (1954). — [4] FELLER, W.: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **40**, 521–559 (1935). — [5] FRÉCHET, M., and J. SHOHAT: A proof of the generalized second limit theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 533–543 (1931). — [6] HOEFFDING, W., and H. ROBBINS: The central limit theorem for dependent variables. Duke Math. J. **15**, 773–780 (1948). — [7] KALLIANPUR, G.: On a limit theorem for dependent random variables (Russian). Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. (N. S.) **101**, 13–16 (1955). — [8] KAWATA, T.: On the central limit theorem and the moment generating function. Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs. **1**, 6–21 (1951). — [9] LOMNICKI, Z. A., and S. K. ZAREMBA: On some moments and distributions occurring in the theory of linear stochastic processes I. Monatsh. Math. **61**, 318–358 (1957). — [10] MARSAGLIA, G.: Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 987–991 (1954).

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Eingegangen am 3. Januar 1958)

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 299–344 (1958)

Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I

Von
DIETER PUPPE

Einleitung

$\pi(X, Y)$ bezeichne die Homotopiemenge der topologischen Räume X und V, d.h. die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \to V$ (mit festem Grundpunkt, vgl. 1.1–1.3). $\pi(X, Y)$ besitzt ein ausgezeichnetes Element 0, repräsentiert durch die konstante Abbildung $X \to v_0 \in V$ ($v_0 =$ Grundpunkt von V). Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ induziert

$$f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V).$$

f^* bildet die Homotopieklasse von $a: Y \to V$ in die Homotopieklasse von $a \circ f: X \to V$ ab. Insbesondere ist $f^*(0) = 0$. Wie bei Homomorphismen von Gruppen wird Kern $f^* = f^{*-1}(0)$ gesetzt und damit der Begriff der exakten Folge definiert.

Wir ordnen in § 1 jeder Abbildung $f: X \to Y$ eine unendliche Folge von Abbildungen

$$\mathfrak{A}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{SPf} SC_f \xrightarrow{SQf} S^2X \xrightarrow{S^2f} S^2Y \to \cdots$$

zu, so daß die induzierte Folge der Homotopiemengen

$$(\mathfrak{A}f)^*: \pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Qf)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \pi(SY, V) \leftarrow \cdots$$

exakt ist (für jeden Raum V, vgl. 1.12 Satz 6). C_f ist dabei der „Abbildungskegel" von f. Er entsteht aus $X \times I + Y$ durch folgende Identifizierungen (vgl. 1.4):

$$X \times I \ni (x, 1) = f(x) \in Y \quad \text{für alle } x \in X,$$

$$X \times 0 \cup x_0 \times I \ (\subset X \times I) \quad \text{wird ein einziger Punkt.}$$

Y läßt sich als Teilraum von C_f auffassen; $Pf: Y \to C_f$ ist die Injektion. Durch Identifizieren von Y zu einem Punkt erhält man aus C_f die Einhängung SX von X (vgl. 1.8). Qf ist die natürliche Projektion, und Sf ist die Einhängung von f.

Von der vierten Stelle an besteht die Folge $(\mathfrak{A}f)^*$ aus Gruppen und Homomorphismen (4.2). Dieser Teil kann als Verallgemeinerung der „track group sequence" von BARRATT [1] § 5 aufgefaßt werden. Ist nämlich $X \subset Y$ und $f: X \to Y$ die Injektion, so ist C_f mit Y/X (d.h. X wird zu einem Punkt identifiziert) homotopieäquivalent, falls das Paar (Y, X) eine gewisse Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt (1.6). Andererseits sind $\pi(S^n X, V)$, $\pi(S^n Y, V)$, $\pi(S^n(Y/X), V)$ nichts anderes als die track groups $(X, x_0)^n(V, v_0; v_0)$,

$(Y, x_0)^n(V, v_0; v_0)$ bzw. $(Y, X)^n(V, v_0; v_0)$ (vgl. [1]). Man erhält also die track group sequence des Tripels $\{x_0\} \subset X \subset Y$. (Über den allgemeinen Fall eines beliebigen Tripels von Räumen vgl. 4.2.)

Wir werden zeigen: *Die Folge $\mathfrak{A}f$ ist homotopieäquivalent mit der Folge*

$$\mathfrak{P}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3f} C_{P^2f} \xrightarrow{P^4f} \cdots$$

(1.11 Satz 5). Demnach ergibt sich jede Abbildung der Folge $\mathfrak{A}f$ aus der vorhergehenden bis auf Homotopieäquivalenz durch dieselbe Konstruktion. Der Beweis für die Exaktheit von $(\mathfrak{A}f)^*$ wird dadurch vereinfacht: Man braucht die Exaktheit nur an der ersten Stelle nachzuprüfen, während man bisher bei der track group sequence drei verschiedene Arten von Stellen zu untersuchen hatte.

In § 2 wird gezeigt, daß *der Homotopietyp der Folge $\mathfrak{A}f$ nur vom Homotopietyp von f abhängt* (2.4 Satz 9). Die letzten drei Paragraphen bringen Anwendungen:

In § 3 wird untersucht, für welche $f: X \to Y$ die induzierten Abbildungen $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für jedes V monomorph[1]) sind. Anders ausgedrückt: Für welche $f: X \to Y$ folgt immer $a \simeq 0$ aus $a \circ f \simeq 0$ (V und $a: Y \to V$ beliebig)? Unter gewissen — nicht sehr einschneidenden — Voraussetzungen über X und Y gilt: *$f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ ist genau dann monomorph für jeden Bildraum V, wenn die Einhängung $Sf: SX \to SY$ von $f: X \to Y$ ein Rechts-Homotopieinverses besitzt* (3.4 Satz 12). In einem zweiten Teil dieser Arbeit [12] wird dieselbe Frage für einen Spezialfall noch genauer behandelt werden, nämlich für den Fall, daß f eine Abbildung einer orientierbaren n-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit auf die n-Sphäre vom Grade 1 ist.

Aus der Monomorphie von $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ folgt im allgemeinen nicht, daß f^* auch einwertig[2]) ist (vgl. die Beispiele in 4.1 und 4.6). Wenn es aber in $\pi(X, V)$ und $\pi(Y, V)$ Gruppenstrukturen gibt, so daß f^* ein Homomorphismus ist, z.B. wenn f (bis auf Homotopieäquivalenz) die Einhängung Sf' einer anderen Abbildung f' ist (vgl. 4.2), so ist das doch der Fall. Etwas allgemeiner gilt dann: *Die Mengen $f^{*-1}f^*(\eta)$ haben für jedes $\eta \in \pi(Y, V)$ gleiche Mächtigkeit.* Wir zeigen in § 4 (vgl. 4.4 Satz 13), daß letzteres auch dann richtig ist, *wenn f (bis auf Homotopieäquivalenz) von der Form $Qf' \equiv P^2f'$ ist* ($\equiv$ bedeutet: homotopieäquivalent). Diese Voraussetzung ist offenbar allgemeiner als $f \equiv Sf' \equiv P^3f'$. Daß eine weitere Verschärfung in derselben Richtung nicht möglich ist, zeigen die Beispiele in 4.6.

In § 5 benutzen wir die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}i$ der Injektion $i: X \vee Y \to X \times Y$ (vgl. 5.1) zum Beweis einer *Formel über die Einhängung eines topologischen Produkts* $S(X \times Y)$ [5.1 Satz 15 und 5.6 (34)] *bzw.* $S(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$ (5.9 Satz 19). $S(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$ spaltet in ein „Büschel" (topologische Summe

[1]) Wir nennen eine Abbildung φ zwischen Mengen mit einem ausgezeichneten Element 0 *monomorph*, wenn Kern $\varphi = \varphi^{-1}(0) = 0$ ist, und *epimorph*, wenn sie die eine Menge auf die andere abbildet.

[2]) Eine Abbildung heißt *einwertig*, wenn sie je zwei verschiedenen Elementen verschiedene Bilder zuordnet (eineindeutig-in).

mit Identifizierung der Grundpunkte) von Teilräumen auf. Diese Teilräume sind Sphären, wenn alle X_i Sphären sind (5.9 Satz 20). Im allgemeinen sind es Einhängungen von $\wedge$-Produkten der Räume X_i, wobei wir (im Anschluß an HILTON) als $\wedge$-Produkt $X \wedge Y$ den Raum bezeichnen, der aus $X \times Y$ durch Identifizieren des Teilraums $X \vee Y$ zu einem Punkt entsteht („reduced join" bei JAMES [*10*] § 14). Für den Fall, daß alle X_i Sphären sind, wurde die genannte Formel (mit anderen Methoden) zuerst von K. A. HARDIE bewiesen (nach einer brieflichen Mitteilung von HILTON). Die allgemeine Formel für zwei Faktoren

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$$

hat HILTON angegeben (unter gewissen Voraussetzungen über die Erweiterungsmöglichkeit von Homotopien). Neu ist also hier nur die Verallgemeinerung auf mehrere Faktoren und zum Teil die genaue Untersuchung der Voraussetzungen, die über die Faktoren gemacht werden müssen. Ein wichtiger Schritt ist dabei der Nachweis, daß *das $\wedge$-Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ ist* (5.8 Satz 18), eine Tatsache, die keineswegs trivial ist und auch nicht ganz allgemein gezeigt werden kann, sondern nur unter der Voraussetzung, daß die Grundpunkte *„nicht ausgeartet"* sind (zur Definition s. 5.5). Das ist zugleich die einzige Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel für $S(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$. Wenn es nur auf den freien Homotopietyp der Räume ankommt und nicht auf die Wahl der Grundpunkte, so ist sie keine Einschränkung [vgl. 5.5. D)].

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung und Z ein weiterer Raum. f und die Identität 1_Z von Z induzieren $f \wedge 1_Z: X \wedge Y \to Y \wedge Z$ [vgl. 5.3. A)]. Diese $\wedge$-Multiplikation mit 1_Z ist (bis auf Homotopieäquivalenz) mit der Bildung der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ vertauschbar, d.h. *man erhält eine zu $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$ homotopieäquivalente Folge, wenn man jede Abbildung von $\mathfrak{A}f$ mit 1_Z $\wedge$-multipliziert* (5.10 Satz 21). Ein Spezialfall davon ist [$Z = S^1$, vgl. 5.3 (33)], daß die Einhängung von $\mathfrak{A}f$ mit $\mathfrak{A}(Sf)$ homotopieäquivalent ist.

Weitere Anwendungen der Abbildungsfolge und der hier genannten Ergebnisse werden im zweiten Teil der Arbeit [*12*] angegeben.

§ 1. Die Abbildungsfolge

1.1. In den topologischen Räumen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, soll immer ein bestimmter Punkt als *Grundpunkt* ausgezeichnet sein, es sei denn, daß ausdrücklich etwas anderes gesagt ist. Unter einer *Abbildung* $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen verstehen wir grundsätzlich eine stetige Abbildung, die den Grundpunkt x_0 von X in den Grundpunkt y_0 von Y überführt.

I sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen. (Als Grundpunkt wird etwa $0 \in I$ genommen, was jedoch hier nebensächlich ist.) Eine Schar von Abbildungen $f_t: X \to Y$, $t \in I$, heißt eine *Homotopie*, wenn $(x, t) \to f_t(x)$ eine stetige Abbildung $X \times I \to Y$ definiert. Es wird bei einer Homotopie also $f_t(x_0) = y_0$

für alle $t \in I$ verlangt. Zwei Abbildungen $f, f' : X \to Y$ heißen *homotop* — in Zeichen: $f \simeq f'$ —, wenn es eine Homotopie $f_t : X \to Y$ gibt mit $f_0 = f$, $f_1 = f'$.

$p : X \to \overline{X}$ sei eine Abbildung auf $\overline{X}$. Ist $A \subset \overline{X}$ genau dann offen in $\overline{X}$, wenn $p^{-1}(A)$ in X offen ist, so heißt p eine *Identifizierung*. Ist $p : X \to \overline{X}$ eine Identifizierung, so ist $f : \overline{X} \to Y$ genau dann stetig, wenn die Zusammensetzung $f \circ p$ stetig ist (s. BOURBAKI [2] § 9, No. 2). Darüber hinaus gilt:

Hilfssatz 1. *Ist $p : X \to \overline{X}$ eine Identifizierung, so auch die induzierte Abbildung $X \times I \to \overline{X} \times I$. Ist also $f_t : \overline{X} \to Y$ eine Schar von Abbildungen (ohne Voraussetzungen über Stetigkeit) und ist $f_t \circ p$ eine Homotopie, so auch f_t.*

Zum Beweis s. HILTON [6] S. 109f., Lemma 3.4, 3.5.

Bemerkung. Man beachte, daß nicht etwa allgemein eine Identifizierung $X \to \overline{X}$ mit der Multiplikation mit einem weiteren topologischen Raum Z vertauschbar ist (vgl. BOURBAKI [2] § 9, Exerc. 11). Entscheidend für Hilfssatz 1 ist, daß $Z = I$ lokal-kompakt ist.

1.2. Für jeden topologischen Raum X bezeichnen wir die Identität $X \to X$ mit 1 oder genauer mit 1_X. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine Abbildung $f' : Y \to X$ gibt mit

$$f' \circ f \simeq 1_X \quad \text{und} \quad f \circ f' \simeq 1_Y.$$

(Nach 1.1 bleiben die Grundpunkte bei den Abbildungen und Homotopien immer erhalten.) f' heißt *homotopieinvers* zu f. Existiert zwischen X und Y eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$, so heißen X und Y *homotopieäquivalent* oder vom gleichen *Homotopietyp* — in Zeichen: $X \equiv Y$.

Sind $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ irgend zwei Abbildungen, so heißt ein Paar (φ, ψ) von Abbildungen $\varphi : X \to X'$, $\psi : Y \to Y'$ eine *Homotopieäquivalenz zwischen f und f'* — in Zeichen: $(\varphi, \psi) : f \equiv f'$ —, wenn φ und ψ Homotopieäquivalenzen sind und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist, d.h. $\psi \circ f \simeq f' \circ \varphi$. Existiert zwischen f und f' eine Homotopieäquivalenz, so heißen f und f' homotopieäquivalent oder vom gleichen Homotopietyp — in Zeichen: $f \equiv f'$.

In naheliegender Verallgemeinerung nennen wir zwei (endliche oder unendliche) Folgen von Abbildungen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots,$$
$$X_1' \xrightarrow{f_1'} X_2' \xrightarrow{f_2'} X_3' \xrightarrow{f_3'} \cdots$$

homotopieäquivalent oder vom gleichen Homotopietyp — in Zeichen: $[f_1, f_2, f_3, \ldots] \equiv [f_1', f_2', f_3', \ldots]$, wenn es ein System von Homotopieäquivalenzen

$\varphi_\nu: X_\nu \to X'_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, gibt, so daß jedes Quadrat des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \\ X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & X'_2 & \xrightarrow{f'_2} & X'_3 & \xrightarrow{f'_3} & \cdots \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. Das System $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$ heißt *Homotopieäquivalenz zwischen den Folgen* $[f_1, f_2, f_3, \ldots]$ *und* $[f'_1, f'_2, f'_3, \ldots]$.

Es ist klar, daß die Relation der Homotopieäquivalenz zwischen Abbildungen und Folgen von Abbildungen reflexiv und transitiv ist. Die Symmetrie folgt aus:

Hilfssatz 2. *Ist (φ, ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen $f: X \to Y$ und $f': X' \to Y'$ und sind φ', ψ' homotopieinvers zu φ bzw. ψ, so ist (φ', ψ') eine Homotopieäquivalenz zwischen f' und f.*

Beweis. Da φ', ψ' offenbar Homotopieäquivalenzen sind, braucht nur gezeigt zu werden, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi'} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. In der Tat folgt aus der vorausgesetzten Beziehung $\psi \circ f \simeq f' \circ \varphi$:

$$f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ \psi \circ f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f' \circ \varphi \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f'.$$

Um später darauf Bezug nehmen zu können, formulieren wir hier noch einen Hilfssatz: A sei ein *Teilraum* des topologischen Raumes X. Wir meinen damit (hier und im folgenden) zugleich, daß A und X denselben Punkt $x_0 \in A \subset X$ als Grundpunkt haben. X/A sei der Raum, der aus X entsteht, wenn alle Punkte von A miteinander identifiziert werden.

Hilfssatz 3. *Gibt es eine Homotopie der Identität $1_X: X \to X$, die den Teilraum $A \subset X$ in sich auf einen Punkt zusammenzieht, so ist die natürliche Projektion $p: X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt: Es gibt eine Homotopie $h_t: X \to X$ mit

$$h_0 = 1_X, \quad h_1(A) = x_0, \quad h_t(A) \subset A \qquad \text{für alle } t \in I.$$

h_1 induziert eine Abbildung $h'_1: X/A \to X$, die durch $h'_1 \circ p = h_1$ charakterisiert ist. $p \circ h_t$ induziert in analoger Weise für alle t eine Abbildung $h''_t: X/A \to X/A$. Offenbar ist $h''_1 = p \circ h'_1$. Nach Hilfssatz 1 ist h''_t eine Homotopie. Die Formeln

$$h'_1 \circ p = h_1 \simeq h_0 = 1_X,$$
$$p \circ h'_1 = h''_1 \simeq h''_0 = 1_{X/A}$$

zeigen, daß h'_1 zu p homotopieinvers ist.

1.3. Für zwei topologische Räume X, V (mit den Grundpunkten x_0, v_0) sei $\pi(X, V)$ die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen $X \to V$ (im Sinne von 1.1, d.h. x_0 wird immer in v_0 abgebildet). Wir nennen $\pi(X, V)$ die *Homotopiemenge* von X und V. Sie besitzt ein ausgezeichnetes Element 0, repräsentiert durch die konstante Abbildung $X \to v_0$. $[a]$ bezeichne die Homotopieklasse von $a: X \to V$.

Eine Abbildung $f: X \to Y$ induziert $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ mit $f^*(0) = 0$. Man definiert nämlich

$$f^*[a] = [a \circ f]$$

für jedes $a: Y \to V$. Offenbar gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Für $f^{*-1}(0)$ schreiben wir auch Kern f^*.

Eine Folge von Abbildungen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

soll in dieser Arbeit *exakt* heißen, wenn die induzierte Folge

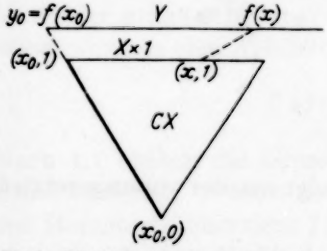


Fig. 1. Die stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

$$\pi(X_1, V) \xleftarrow{f_1^*} \pi(X_2, V) \xleftarrow{f_2^*} \pi(X_3, V) \xleftarrow{f_3^*} \cdots$$

für jedes V exakt ist, d.h.

$$\text{Kern } f_\nu^* = \text{Bild } f_{\nu+1}^* \quad \text{für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

1.4. Ist X irgendein topologischer Raum mit dem Grundpunkt x_0, so nennen wir

$$CX = (X \times I)/(X \times 0 \cup x_0 \times I)$$

den *Kegel über* X. Die Punkte von CX werden ebenso wie ihre Repräsentanten in $X \times I$ mit (x, s), $x \in X$, $s \in I$, bezeichnet, und $(x_0, 0)\,(= (x_0, s) = (x, 0))$ gilt als Grundpunkt.

Zu einer (stetigen) Abbildung $f: X \to Y$ definieren wir nun den *Abbildungskegel* C_f: C_f entsteht aus $CX + Y$ (topologische Summe im Sinne von BOURBAKI [2] § 8, No. 10), wenn $(x, 1) \in CX$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert wird (Fig. 1). Die Punkte von C_f werden ebenso wie ihre Repräsentanten in $CX + Y$ mit (x, s) $(\in CX)$ bzw. y $(\in Y)$ bezeichnet, und $y_0\,(= (x_0, s) = (x, 0))$ gilt als Grundpunkt. Beim Übergang $CX + Y \to C_f$ wird in Y nichts identifiziert. Y kann also als Teilmenge von C_f betrachtet werden. Die Injektion $Pf: Y \to C_f$ ist (als Einschränkung der Identifizierung $CX + Y \to C_f$) offenbar stetig. Darüberhinaus stimmt die in Y als Teilmenge von C_f induzierte Topologie mit der ursprünglichen überein.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ (bezüglich der ursprünglichen Topologie) eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset C$ gibt, so daß $A = B \cap Y$. Ein solches B wird z.B. durch

$$B = \begin{cases} f^{-1}(A) \times 1 \cup A, & \text{falls } y_0 \notin A, \text{ also } x_0 \notin f^{-1}(A) \\ Cf^{-1}(A) \cup A, & \text{falls } y_0 \in A, \text{ also } x_0 \in f^{-1}(A) \end{cases}$$

definiert. Diese Mengen sind abgeschlossen in C_f, weil $f^{-1}(A)$ wegen der Stetigkeit von f in X abgeschlossen ist. Man beachte, daß keine Trennungsaxiome vorausgesetzt wurden. Insbesondere braucht x_0 in X nicht abgeschlossen zu sein, und deshalb mußten die beiden Fälle $y_0 \notin A$ und $y_0 \in A$ unterschieden werden. Man kann im allgemeinen auch nicht behaupten, daß Y eine *abgeschlossene* Teilmenge von C_f ist.

Beispiel. $X = S^{n-1}$ [$(n-1)$-Sphäre]. Dann ist CX eine n-Vollkugel E^n (vgl. Fig. 2), und C_f ist der Raum, der aus Y entsteht, wenn E^n mittels $f: S^{n-1} \to Y$ (S^{n-1} = Randsphäre von E^n) an Y „angeheftet" wird (vgl. HILTON [6] S. 76).

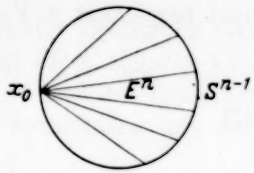


Fig. 2

1.5. Satz 1. *Die Folge*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f$$

ist exakt (vgl. 1.3), d.h. für jeden Bildraum V ist die induzierte Folge

$$\pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V)$$

exakt, d.h. Kern f^* = Bild $(Pf)^*$.

Beweis. Aus der Definition von C_f und Pf (= Injektion) ergibt sich unmittelbar $Pf \circ f \simeq 0$, denn $Pf \circ f: X \to C_f$ läßt sich durch die Zuordnung $(x, s) \to (x, s)$ zu einer Abbildung $CX \to C_f$ fortsetzen [vgl. 1.4 Fig. 1]. Daraus folgt $(Pf \circ f)^* = f^* \circ (Pf)^* = 0$, d.h. Bild $(Pf)^* \subset$ Kern f^*.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein $a: Y \to V$ mit $[a] \in$ Kern f^*. Das bedeutet $f^*[a] = [a \circ f] = 0$, d.h. $a \circ f \simeq 0$. Folglich gibt es eine Abbildung $b: CX \to V$ mit $b(x, 1) = a(f(x))$ für alle $x \in X$. b und a zusammen definieren eine Abbildung $CX + Y \to V$, die mit der Identifizierung $CX + Y \to C_f$ verträglich ist. Sie induziert also $b': C_f \to V$, und nach Konstruktion gilt

$$(Pf)^*[b'] = [b' \circ Pf] = [b' | Y] = [a],$$

d.h. $[a] \in$ Bild $(Pf)^*$.

1.6. Sei speziell $X \subset Y$ und $f: X \to Y$ die Injektion. Dann ist CX ein Teilraum von C_f (man bestätigt leicht, daß er die induzierte Topologie trägt), und es ist $CX \cap Y = X$. Ferner nehmen wir an, daß das Paar (Y, X) folgende *Homotopieerweiterungseigenschaft* besitzt:

HE: Zu jeder Abbildung g_0 von Y in einen beliebigen Bildraum und jeder Homotopie h_t von $h_0 = g_0 | X$ gibt es eine Homotopie g_t von g_0 mit $h_t = g_t | X$.

Einen Überblick über Fragen der Homotopieerweiterung gibt BARRATT [1] 5.1. Wir heben hier nur hervor (vgl. HILTON [6] S. 97 Th. 1.4 oder J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (J)):

Ist Y ein CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHAED [19] *und X ein Teilkomplex, so ist HE erfüllt.*

Hilfssatz 4. *Ist $X \subset Y$, $f: X \to Y$ die Injektion und genügt (Y, X) der Bedingung HE, so gibt es eine Homotopie der Identität $C_f \to C_f$, die CX in sich auf einen Punkt zusammenzieht.*

Den Beweis stellen wir für den Augenblick zurück. Aus Hilfssatz 4 zusammen mit 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion $q: C_f \to C_f/CX$ eine Homotopieäquivalenz ist. Andererseits ist (für jede Injektion $f: X \subset Y$):

$$C_f/CX = (CX + Y)/(CX + X) = Y/X, \tag{1}$$

und bezeichnet $p: Y \to Y/X$ die natürliche Projektion, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ {\scriptstyle 1_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \xrightarrow{p} & Y/X \end{array} \tag{2}$$

kommutativ. Das bedeutet (vgl. 1.2):

Satz 2. *Ist $X \subset Y$, $f: X \to Y$ die Injektion und genügt (Y, X) der Bedingung HE, so ist $Pf: Y \to C_f$ mit der natürlichen Projektion $p: Y \to Y/X$ homotopieäquivalent. $(1_Y, q)$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen Pf und p.*

Beweis von Hilfssatz 4. $h_t: CX \to C_f$ sei die natürliche Nullhomotopie der Injektion $h_0: CX \to C_f$, d.h.

$$h_t(x, s) = \big(x, s(1-t)\big), \qquad (x, s) \in CX,\ t \in I.$$

$h_t|X$ ist eine Nullhomotopie der Injektion $h_0|X: X \to C_f$. Wegen *HE* ist $h_t|X$ so zu $g_t: Y \to C_f$ fortsetzbar, daß $g_0: Y \to C_f$ die Injektion ist. h_t und g_t zusammen definieren eine Homotopie $CX + Y \to C_f$, die mit der Identifizierung $CX + Y \to C_f$ (im Urbildraum) verträglich ist; nach 1.1 Hilfssatz 1 wird also eine Homotopie $\varphi_t: C_f \to C_f$ induziert. Nach Konstruktion ist $\varphi_0 = 1$, und $\varphi_t|CX = h_t$ zieht CX in sich auf einen Punkt zusammen.

1.7. Bemerkung. Das Resultat von 1.6 beleuchtet noch einmal die Definition von C_f. Für eine Injektion $f: X \subset Y$ ist C_f im wesentlichen Y/X (vorausgesetzt, daß *HE* erfüllt ist). Den Fall einer beliebigen Abbildung $f: X \to Y$ kann man darauf mit Hilfe der bekannten Konstruktion des *Abbildungszylinders* zurückführen. Ersetzt man f durch die Injektion von X in den Abbildungszylinder Z_f, die mit f homotopieäquivalent ist, und bildet dann Z_f/X, so erhält man gerade C_f.

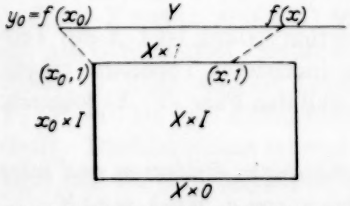


Fig. 3. Die stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

[Genauere Durchführung: Der Abbildungszylinder Z_f (Fig. 3) von $f: X \to Y$ entsteht aus $(X \times I)/(x_0 \times I) + Y$, wenn $(x, 1) \in (X \times I)/(x_0 \times I)$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert wird. (Vgl. FOX [8] § 3 oder HILTON [6] S. 107 f.; dort wird allerdings $x_0 \times I$ in $X \times I$ nicht zu einem Punkt identifiziert.) Identifiziert man jedes $x \in X$ mit $(x, 0) \in Z_f$, so wird X zu einem Teilraum von Z_f.

Auch Y kann man als Teilraum von Z_f auffassen (analog wie bei C_f, vgl. 1.4). Die Zuordnung $x \to (x, t)$ definiert eine Homotopie $j_t: X \to Z_f$ zwischen der Injektion j_0 und $j_1 = i \circ f$, wobei $i: Y \to Z_f$ die Injektion ist; d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X & \xrightarrow{j_0} & Z_f \end{array}$$

ist bis auf Homotopie kommutativ. Man sieht leicht (unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1), daß Y Deformationsretrakt von Z_f ist (vgl. [6] S. 109, Th. 3.2). Folglich ist $(1_X, i)$ eine Homotopieäquivalenz zwischen f und der Injektion $j_0: X \to Z_f$. Daß tatsächlich $Z_f / X = C_f$ ist, ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.]

1.8. Als *Einhängung* des Raumes X bezeichnet man den Raum

$$SX = (X \times I)/(X \times 0 \cup X \times 1 \cup x_0 \times I).$$

Die Punkte von SX werden wie ihre Repräsentanten in $X \times I$ mit (x, s), $x \in X$, $s \in I$, bezeichnet, und $(x_0, 0)$ $(= (x, 0) = (x, 1) = (x_0, s))$ gilt als Grundpunkt. Für eine Abbildung $f: X \to Y$ wird die Einhängung $Sf: SX \to SY$ durch $Sf(x, s) = (f(x), s)$ definiert. Offenbar ist $S1_X = 1_{SX}$ und $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Ist $h_t: X \to Y$ eine Homotopie, so auch Sh_t (vgl. 1.1 Hilfssatz 1). Daraus folgt leicht, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz wieder eine Homotopieäquivalenz ist.

Für $f: X \to \{y_0\} = Y$ ist offenbar $C_f = SX$ (vgl. 1.4).

Man bezeichnet auch manchmal den Raum $\tilde{S}X$, der aus $X \times I$ durch Identifizieren von $X \times 0$ und $X \times 1$ zu je einem Punkt entsteht, als Einhängung von X. Der Unterschied ist für „vernünftige" X nicht wesentlich; z.B. gilt:

Hilfssatz 5. *Ist X ein CW-Komplex*[3]*, so ist die natürliche Projektion $p: \tilde{S}X \to SX$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Nach 1.2 Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, daß sich eine Zusammenziehung von $x_0 \times I \subset \tilde{S}X$ zu einer Homotopie der Identität von $\tilde{S}X$ fortsetzen läßt. Das ist möglich, weil $(\tilde{S}X, x_0 \times I)$ ein Paar von CW-Komplexen ist (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [19] (H)) und daher die Bedingung HE erfüllt (1.6). (Wir haben bisher in $\tilde{S}X$ keinen Grundpunkt festgelegt. Entweder verzichtet man darauf ganz, dann ist unter „Homotopieäquivalenz" in Hilfssatz 5 freie Homotopieäquivalenz ohne Festhaltung von Grundpunkten zu verstehen; oder man wählt irgendeinen Punkt von $x_0 \times I$ als Grundpunkt für $\tilde{S}X$.)

[3]) In einem CW-Komplex wird grundsätzlich eine 0-Zelle der Zerlegung als Grundpunkt genommen. Das ist jedoch keine Einschränkung, weil man durch geeignete Unterteilung einer gegebenen Zellenzerlegung jeden Punkt zu einer 0-Zelle machen kann.

1.9. Nach Definition (vgl. 1.4) ist $Pf: Y \to C_f$ für alle $f: X \to Y$ eine Injektion. Wir wollen auf sie die Überlegungen von 1.6 anwenden und haben dazu zunächst zu zeigen:

Hilfssatz 6. *Das Paar* (C_f, Y) *besitzt die Eigenschaft HE (vgl. 1.6).*

Beweis. Sei $g: C_f \to V$ und $h_t: Y \to V$ mit $h_0 = g|Y$ gegeben. Zu zeigen ist, daß es eine Fortsetzung $g_t: C_f \to V$ von h_t gibt mit $g_0 = g$. Eine solche Fortsetzung läßt sich anschaulich so beschreiben: Die Deformationswege für die Punkte $y \in Y$ sind durch h_t gegeben. Der Bildpunkt von $(x, s) \in C_f$, $s \geqq \frac{1}{2}$, durchläuft erst das g-Bild der Strecke von (x, s) nach $(x, 1) = f(x)$ und dann einen Teil des Deformationsweges von $f(x) \in Y$. Die „Länge" dieses Teils (gemessen durch den Parameter t des Deformationsweges) nimmt vom vollen Wert 1 bis auf 0 ab, wenn s von 1 nach $\frac{1}{2}$ geht. Der Bildpunkt von $(x, s) \in C_f$, $s \leqq \frac{1}{2}$, durchläuft nur einen Teil des g-Bildes der Strecke von (x, s) nach $(x, 1)$, und dieser Teil nimmt von der vollen Länge bis auf 0 ab, wenn s von $\frac{1}{2}$ nach 0 geht. Explizit kann man $g_t: C_f \to V$ etwa durch

$$g_t(y) = h_t(y), \qquad y \in Y$$

$$g_t(x, s) = \begin{cases} g\left(x, s + \frac{t}{2}\right), & s \geqq \frac{1}{2},\ t \leqq 2 - 2s, \quad x \in X \\ h_{2s+t-2}(f(x)), & s \geqq \frac{1}{2},\ t \geqq 2 - 2s, \quad x \in X \\ g(x, s + st), & s \leqq \frac{1}{2}, \qquad\qquad\quad x \in X \end{cases}$$

definieren.

Demnach läßt sich 1.6 Satz 2 für jedes $f: X \to Y$ auf $Pf: Y \to C_f$ (an Stelle des dortigen f) anwenden. Aus den Definitionen in 1.4 und 1.8 geht unmittelbar hervor, daß $C_f/Y = SX$ ist. $Qf: C_f \to C_f/Y = SX$ sei die natürliche Projektion, d.h.

$$(3) \qquad \begin{cases} Qf(x, s) = (x, s), & x \in X,\ s \in I \\ Qf(y) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y. \end{cases}$$

C_{Pf} entsteht nach Definition aus $CX + CY + Y$ durch die Identifizierungen

$$CX \ni (x, 1) = f(x) \in Y \qquad \text{für alle } x \in X$$
$$CY \ni (y, 1) = y \in Y \qquad \text{für alle } y \in Y.$$

Man erhält es aber offenbar auch aus $CX + CY$ durch die Identifizierungen (Fig. 4)

$$CX \ni (x, 1) = (f(x), 1) \in CY \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Die natürliche Projektion [vgl. 1.6 (1)]

$$Rf: C_{Pf} \to C_{Pf}/CY = C_f/Y = SX$$

ist durch

$$(4) \qquad \begin{cases} Rf(x, s) = (x, s), & x \in X,\ s \in I \\ Rf(y, s) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y,\ s \in I \end{cases}$$

gegeben. Mit diesen Bezeichnungen geht 1.6 Satz 2 hier über in:

Satz 3. *Für jedes $f: X \to Y$ ist $P^2 f: C_f \to C_{Pf}$ mit $Qf: C_f \to SX$ homotopieäquivalent. $(1_{C_f}, Rf)$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.*

Dem kommutativen Diagramm (2) in 1.6 entspricht hier

$$\begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{P^2 f} & C_{Pf} \\ & {\scriptstyle Qf}\searrow & \downarrow{\scriptstyle Rf} \\ & & SX. \end{array} \tag{5}$$

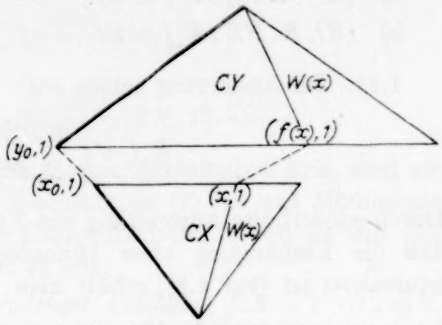


Fig. 4. Die stark ausgezogenen Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

1.10. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{P^3 f} & C_{P^2 f} \\ {\scriptstyle Rf}\downarrow & {\scriptstyle QPf}\searrow & \downarrow{\scriptstyle RPf} \\ SX & & SY \end{array} \tag{6}$$

erhält man aus (5), wenn man f durch Pf ersetzt und Rf hinzufügt. Das Dreieck in (6) ist daher kommutativ. Die untere Zeile soll nun so ergänzt werden, daß (6) — wenigstens bis auf Homotopie — kommutativ bleibt. Sei für jedes $x \in X$

$$W(x) = \{(x, s) \mid s \in I\} \cup \{(f(x), s) \mid s \in I\} \subset C_{Pf}$$

(vgl. 1.9 Fig. 4). $W(x)$ wird durch Rf [vgl. 1.9 (4)] auf die Strecke $\{(x, s) \mid s \in I\} \subset SX$ und durch QPf [vgl. 1.9 (3)] auf $\{(f(x), s) \mid s \in I\} \subset SY$ abgebildet. Wird $W(x)$ in der Richtung von $(x, 0)$ über $(x, 1) = (f(x), 1)$ nach $(f(x), 0)$ durchlaufen, so bewegt sich der Bildpunkt bei Rf von $(x, 0)$ nach $(x, 1)$ und bei QPf von $(f(x), 1)$ nach $(f(x), 0)$. Daher ist zu vermuten, daß $S_- f: SX \to SY$, definiert durch $S_- f(x, s) = (f(x), 1 - s)$ das Diagramm (6) so ergänzt, daß das untere Dreieck und damit das ganze Diagramm bis auf Homotopie kommutativ wird. Tatsächlich ist $\varphi_t: C_{Pf} \to SY$, definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, s) &= (f(x), 1 - ts), \qquad x \in X,\ s \in I \\ \varphi_t(y, s) &= (y, (1 - t)s), \qquad y \in Y,\ s \in I, \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $\varphi_0 = QPf$ und $\varphi_1 = S_- f \circ Rf$. Weil Rf und RPf Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), liest man aus dem durch $S_- f: SX \to SY$ ergänzten Diagramm (6) ab:

Satz 4. *Für jedes $f: X \to Y$ ist $P^3 f: C_{Pf} \to C_{P^2 f}$ mit $S_- f: SX \to SY$ homotopieäquivalent. (Rf, RPf) ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.*

Sei $\sigma_X: SX \to SX$ durch $\sigma_X(x, s) = (x, 1 - s)$ definiert. Dann ist $\sigma_X \circ \sigma_X = 1$ und $S_- f = Sf \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ Sf$. Das Diagramm (6) bleibt also bis auf Homotopie kommutativ, wenn man die untere Zeile nicht durch $S_- f$ sondern durch $Sf: SX \to SY$ ergänzt und Rf durch $R_- f = \sigma_X \circ Rf$ oder RPf durch $R_- Pf = \sigma_Y \circ RPf$ ersetzt. Da σ_X und σ_Y topologische Abbildungen sind, gilt ergänzend zu Satz 4:

Satz 4'. *Für jedes $f: X \to Y$ bestehen die Homotopieäquivalenzen*

a) $(R_- f, RPf) : P^3 f \equiv Sf$

b) $(Rf, R_- Pf) : P^3 f \equiv Sf$.

1.11. Zur Abkürzung setzen wir

$$R_n f = \begin{cases} RP^n f, & n \text{ gerade} \\ R_- P^n f, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Durch wiederholte Anwendung von 1.9 Satz 3, 1.10 Satz 4' und der Tatsache, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz weder eine Homotopieäquivalenz ist (vgl. 1.8), erhält man:

(a) $(1, Rf) : P^2 f \equiv Qf$ (Satz 3),

(b) $(Rf, R_1 f) : P^3 f \equiv Sf$ ((Satz 4'b)),

(c) $(R_1 f, R_2 f) : P^4 f \equiv SPf$ ((Satz 4'a), angewandt auf Pf),

(d)
$$\begin{cases} (R_2 f, R_3 f) : P^5 f \equiv SP^2 f & \text{((b), angewandt auf } P^2 f), \\ (1, SRf) : SP^2 f \equiv SQf & \text{(Einhängung von (a))}, \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} (R_3 f, R_4 f) : P^6 f \equiv SP^3 f & \text{((c), angewandt auf } P^2 f), \\ (SRf, SR_1 f) : SP^3 f \equiv S^2 f & \text{(Einhängung von (b))}, \end{cases}$$

...

Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich:

Satz 5. *Zwischen den Folgen von Abbildungen*

$$\mathfrak{P}f: \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2 f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3 f} C_{P^2 f} \xrightarrow{P^4 f} \cdots$$

und

$$\mathfrak{A}f: \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{SPf} SC_f \xrightarrow{SQf} S^2 X \xrightarrow{S^2 f} \cdots$$

besteht die Homotopieäquivalenz

$$(1_X, 1_Y, 1_{C_f}, Rf, R_1 f, R_2 f, SRf \circ R_3 f, SR_1 f \circ R_4 f, SR_2 f \circ R_5 f, \ldots,$$
$$\ldots, S^n Rf \circ S^{n-1} R_3 f \circ S^{n-2} R_6 f \circ \cdots \circ R_{3n} f, \; S^n R_1 f \circ \cdots \circ R_{3n+1} f,$$
$$S^n R_2 f \circ \cdots \circ R_{3n+2} f, \ldots)$$

(vgl. 1.2), d.h. in dem Diagramm

(7)
$$\begin{array}{ccccccccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{Pf} & C_f & \xrightarrow{P^2 f} & C_{Pf} & \xrightarrow{P^3 f} & C_{P^2 f} & \xrightarrow{P^4 f} & C_{P^3 f} & \xrightarrow{P^5 f} & C_{P^4 f} \xrightarrow{P^6 f} \cdots \\ 1\downarrow & & 1\downarrow & & 1 & & Rf\downarrow & & R_1 f\downarrow & & R_2 f\downarrow & & \downarrow SRf \circ R_3 f \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{Pf} & C_f & \xrightarrow{Qf} & SX & \xrightarrow{Sf} & SY & \xrightarrow{SPf} & SC_f & \xrightarrow{SQf} & S^2 X \xrightarrow{S^2 f} \cdots \end{array}$$

sind die vertikalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen, und jedes Quadrat ist bis auf Homotopie kommutativ.

$\mathfrak{A}f$ soll die *Abbildungsfolge* von f genannt werden.

1.12. Nach 1.5 Satz 1 ist die Folge $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f$ exakt, also auch die Folge $\mathfrak{P}f$. Nach 1.11 Satz 5 ist $\mathfrak{P}f$ mit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ homotopieäquivalent.

Eine solche Homotopieäquivalenz [vgl. (7)] induziert für jeden Bildraum V ein Diagramm (vgl. 1.3)

$$(8)\qquad \begin{array}{ccccccccc} \pi(X,V) & \xleftarrow{f^\bullet} & \pi(Y,V) & \xleftarrow{(Pf)^\bullet} & \pi(C_f,V) & \xleftarrow{(P^2f)^\bullet} & \pi(C_{Pf},V) & \xleftarrow{(P^3f)^\bullet} & \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \pi(X,V) & \xleftarrow{f^\bullet} & \pi(Y,V) & \xleftarrow{(Pf)^\bullet} & \pi(C_f,V) & \xleftarrow{(Qf)^\bullet} & \pi(SX,V) & \xleftarrow{(Sf)^\bullet} & \cdots. \end{array}$$

Da die vertikalen Abbildungen in (7) Homotopieäquivalenzen sind, sind sie hier Isomorphismen; da die einzelnen Quadrate in (7) bis auf Homotopie kommutativ sind, besteht hier strenge Kommutativität. Also ist mit der oberen Zeile auch die untere exakt, d.h. es gilt:

Satz 6. *Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ irgendeiner Abbildung $f: X \to Y$ ist exakt, d.h. sie induziert für jeden Bildraum V eine exakte Folge der entsprechenden Homotopiemengen (vgl. 1.3).*

§ 2. Invarianz der Abbildungsfolge

2.1. Das Hauptziel dieses Paragraphen ist es zu zeigen, daß die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) bis auf Homotopieäquivalenz nur vom Homotopietyp von $f: X \to Y$ abhängt (2.4 Satz 9). Etwas allgemeiner untersuchen wir das Verhalten von $\mathfrak{A}f$ bei einer „Transformation" von f.

Unter einer *Transformation* von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ verstehen wir ein Paar (φ, ψ) von Abbildungen $\varphi: X \to X'$, $\psi: Y \to Y'$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist, d.h. $f' \circ \varphi \simeq \psi \circ f$. Dementsprechend heißt ein System $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$ von Abbildungen $\varphi_\nu: X_\nu \to X'_\nu$ eine Transformation von

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

in

$$X'_1 \xrightarrow{f'_1} X'_2 \xrightarrow{f'_2} X'_3 \xrightarrow{f'_3} \cdots,$$

wenn $f'_\nu \circ \varphi_\nu \simeq \varphi_{\nu+1} \circ f_\nu$ gilt für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Eine Transformation (φ, ψ) oder $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$ ist also eine Homotopieäquivalenz im Sinne von 1.2, wenn φ und ψ bzw. φ_ν für alle ν Homotopieäquivalenzen sind.

2.2. Zu einer Transformation (φ, ψ) von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ zusammen mit einer *bestimmten Homotopie* $\Phi_t: X \to Y'$ zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$ definieren wir

$$\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \to C_{f'}$$

(vgl. 1.4) durch

$$(9)\qquad \begin{cases} \chi(y) = \psi(y), & y \in Y \\ \chi(x,s) = \begin{cases} (\varphi(x), 2s) & x \in X,\ s \leqq \frac{1}{2} \\ \Phi_{2s-1}(x), & x \in X,\ s \geqq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\chi \circ Pf = \chi | Y = Pf' \circ \psi$ ($Pf: Y \to C_f$ ist die Injektion, vgl. 1.4), also ist (ψ, χ) eine Transformation von Pf in Pf', bei der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi} \\ Y' & \xrightarrow{Pf'} & C_{f'} \end{array}$$

sogar (streng) kommutativ ist. Hierzu kann man nun wieder

$$C(\psi, \chi, \Psi): C_{Pf} \to C_{Pf'}$$

bilden, wobei $\Psi_t: Y \to C_{f'}$ irgendeine Homotopie zwischen $\Psi_0 = Pf' \circ \psi$ und $\Psi_1 = \chi \circ Pf$ $(= \Psi_0)$ ist, z.B. die triviale Homotopie $\Psi_t = Pf' \circ \psi$ für alle $t \in I$. Im letzteren Fall schreiben wir kurz $C(\psi, \chi)$ für $C(\psi, \chi, \Psi)$.

Durch Iteration erhält man eine *„durch (φ, ψ, Φ) induzierte" Transformation* $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \ldots)$ von

$$\mathfrak{P}f: \; X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3f} C_{P^2f} \to \cdots$$

in $\mathfrak{P}f'$, wenn man χ_ν durch

$$\begin{aligned} \chi_1 &= C(\psi, \chi) \\ \chi_2 &= C(\chi, \chi_1) \\ \chi_\nu &= C(\chi_{\nu-2}, \chi_{\nu-1}), \quad \nu > 2 \end{aligned}$$

definiert.

Für die Abbildungsfolgen $\mathfrak{A}f$ bzw. $\mathfrak{A}f'$ (vgl. 1.11) liegt es nahe, das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \to & C_f & \xrightarrow{Qf} & SX & \xrightarrow{Sf} & SY & \xrightarrow{SPf} & SC_f \to \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\chi} & & \downarrow{\scriptstyle S\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle S\psi} & & \downarrow{\scriptstyle S\chi} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{Pf'} & C_{f'} & \xrightarrow{Qf'} & SX' & \xrightarrow{Sf'} & SY' & \xrightarrow{SPf'} & SC_{f'} \to \cdots \end{array} \tag{10}$$

zu betrachten. Das erste Quadrat ist nach Voraussetzung bis auf Homotopie kommutativ. Vom zweiten haben wir die Kommutativität oben schon festgestellt. Im dritten geht $Y \subset C_f$ sowohl bei $S\varphi \circ Qf$ als auch bei $Qf' \circ \chi$ [vgl. 1.8, 1.9 (3)] in den Grundpunkt von SX' über, und für $(x, s) \in C_f$ $(x \in X, s \in I)$ gilt

$$(S\varphi \circ Qf)(x, s) = (\varphi(x), s)$$

$$(Qf' \circ \chi)(x, s) = \begin{cases} (\varphi(x), 2s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x_0', 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[vgl. (3), (9)]. Daraus folgt leicht $Qf' \circ \chi \simeq S\varphi \circ Qf$. Das vierte Quadrat in (10) geht durch Einhängung aus dem ersten, das fünfte aus dem zweiten usw. hervor. Folglich sind alle Quadrate in (10) mindestens bis auf Homotopie kommutativ, d.h. $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \ldots)$ *ist eine Transformation von* $\mathfrak{A}f$ *in* $\mathfrak{A}f'$. Wir nennen sie die *durch* (φ, ψ, Φ) *induzierte Transformation*.

2.3. Satz 7. *Ist (φ, ψ) eine Transformation von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ (vgl. 2.1) und $\Phi_t: X \to Y'$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$, so sind in den induzierten Transformationen $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \ldots)$ von $\mathfrak{P}f$ in $\mathfrak{P}f'$ und $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, \ldots)$ von $\mathfrak{A}f$ in $\mathfrak{A}f'$ (vgl. 2.2) je zwei entsprechende Abbildungen homotopieäquivalent, d.h.*

$$S^n\varphi \equiv \chi_{3n-2}$$
$$S^n\psi \equiv \chi_{3n-1}$$
$$S^n\chi \equiv \chi_{3n}$$

für alle $n \geqq 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\chi_1 = C(\psi, \chi) = C\big(\psi, C(\varphi, \psi, \Phi)\big) \equiv S\varphi. \tag{11}$$

$\chi_1: C_{Pf} \to C_{Pf'}$ ist nach 2.2 durch

$$\chi_1(x, s) = \chi(x, s), \qquad x \in X,\ s \in I$$

$$\chi_1(y, s) = \begin{cases} (\psi(y), 2s), & s \leqq \frac{1}{2},\ y \in Y \\ (Pf' \circ \psi)(y) = (\chi \circ Pf)(y), & s \geqq \frac{1}{2},\ y \in Y \end{cases}$$

definiert (über C_{Pf} vgl. 1.9). In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{\chi_1} & C_{Pf'} \\ {\scriptstyle Rf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Rf'} \\ SX & \xrightarrow{S\varphi} & SX' \end{array} \tag{12}$$

sei Rf wie in 1.9 die natürliche Projektion $C_{Pf} \to C_{Pf}/CY = SX$. Jedes $(y, s) \in CY \subset C_{Pf}$ geht sowohl bei $Rf' \circ \chi_1$ als auch bei $S\varphi \circ Rf$ in den Grundpunkt von SX' über. Für $(x, s) \in C_{Pf}$ $(x \in X,\ s \in I)$ gilt

$$(Rf' \circ \chi_1)(x, s) = Rf'\big(\chi(x, s)\big) = \begin{cases} Rf'\big(\varphi(x), 2s\big) = \big(\varphi(x), 2s\big), & s \leqq \frac{1}{2} \\ Rf'\big(\Phi_{2s-1}(x)\big) = (x_0', 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[vgl. (9), (4)] und

$$(S\varphi \circ Rf)(x, s) = S\varphi(x, s) = \big(\varphi(x), s\big).$$

Daraus entnimmt man leicht $S\varphi \circ Rf \simeq Rf' \circ \chi_1$. Also ist (12) bis auf Homotopie kommutativ, und weil Rf, Rf' Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), ist (11) damit bewiesen.

Aus (11) gewinnt man

$\chi_2 \equiv S\psi$ durch Anwendung auf (ψ, χ) an Stelle von (φ, ψ),

$\chi_3 \equiv S\chi$ durch Anwendung auf (χ, χ_1),

$\chi_\nu \equiv S\chi_{\nu-3}$, $\nu > 3$, durch Anwendung auf $(\chi_{\nu-3}, \chi_{\nu-2})$,

$\chi_\nu \equiv S\chi_{\nu-3} \equiv S^2\chi_{\nu-6} \equiv \cdots$ durch wiederholte Anwendung der vorigen Formel und ihrer Einhängungen.

Aus diesen Formeln ist Satz 7 leicht zu entnehmen.

2.4. Wir werden nun zeigen, daß der Homotopietyp der Folgen $\mathfrak{P}f$ und $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) nur vom Homotopietyp von $f: X \to Y$ abhängt. In diesem ganzen Abschnitt sei (φ, ψ) eine Transformation von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ (vgl. 2.1) und $\Phi_t: X \to Y'$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$.

Hilfssatz 7. *Ist (φ, ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen f und f', so ist auch $\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \to C_{f'}$ (vgl. 2.2) eine Homotopieäquivalenz.*

Der Beweis wird bis zum nächsten Abschnitt zurückgestellt. Als Folgerung ergibt sich:

Satz 8a). *Sind in der durch (φ, ψ, Φ) induzierten Transformation $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \ldots)$ von $\mathfrak{P}f$ in $\mathfrak{P}f'$ (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.*

Da nach 2.3 Satz 7 jede der Abbildungen $\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \ldots$ mit der entsprechenden aus $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \ldots)$ homotopieäquivalent ist, folgt aus Satz 8a):

Satz 8b). *Sind in der durch (φ, ψ, Φ) induzierten Transformation $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \ldots)$ von $\mathfrak{A}f$ in $\mathfrak{A}f'$ (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.*

Die Sätze 8a) und 8b), angewandt auf die ersten beiden Abbildungen φ, ψ der genannten Transformationen, ergeben die Invarianzaussage:

Satz 9. *Ist $f: X \to Y$ mit $f': X' \to Y'$ homotopieäquivalent, so auch $\mathfrak{P}f$ mit $\mathfrak{P}f'$ und $\mathfrak{A}f$ mit $\mathfrak{A}f'$.*

2.5. Beweis von Hilfssatz 7. Zunächst einige Vorbemerkungen:

A) Zwei Transformationen (φ, ψ) von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ und (φ', ψ') von f' in $f'': X'' \to Y''$ setzen sich offenbar zu einer Transformation $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ von f in f'' zusammen. Sind $\Phi_t: X \to Y'$ und $\Phi'_t: X' \to Y''$ Homotopien zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$ bzw. zwischen $\Phi'_0 = f'' \circ \varphi'$ und $\Phi'_1 = \psi' \circ f'$, so ist $(\Phi' \circ \Phi)_t: X \to Y''$, definiert durch

$$(\Phi' \circ \Phi)_t = \begin{cases} \Phi'_{2t} \circ \varphi, & t \leqq \frac{1}{2} \\ \psi' \circ \Phi_{2t-1}, & t \geqq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{13}$$

eine Homotopie zwischen $f'' \circ \varphi' \circ \varphi$ und $\psi' \circ \psi \circ f$. Es gilt

$$C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi) \simeq C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi) \tag{14}$$

(zur Definition dieser Abbildungen vgl. 2.2).

Beweis von (14). Wir bezeichnen die linke Seite von (14) zur Abkürzung mit χ', die rechte mit χ''. Nach Definition von $C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \to C_{f'}$ [2.2 (9)] ist

$$\chi'(y) = \psi'(\psi(y)) = \chi''(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \subset C_f.$$

Die Strecke $\{(x, s) \mid s \in I\} \subset C_f$ ($x \in X$ fest) geht bei χ' und χ'' in denselben Weg über, der lediglich in verschiedener Weise parametrisiert ist. Es ist nämlich

[vgl. (9), (13)]

$$\chi'(x,s)=\begin{cases}(\varphi'(\varphi(x)),2s), & 0\leqq s\leqq\frac{1}{2}\\ \Phi'_{4s-2}(\varphi(x)), & \frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{3}{4}\\ \psi'(\Phi_{4s-3}(x)), & \frac{3}{4}\leqq s\leqq 1\end{cases}$$

und

$$\chi''(x,s)=\begin{cases}(\varphi'(\varphi(x)),4s), & 0\leqq s\leqq\frac{1}{4}\\ \Phi'_{4s-1}(\varphi(x)), & \frac{1}{4}\leqq s\leqq\frac{1}{2}\\ \psi'(\Phi_{2s-1}(x)), & \frac{1}{2}\leqq s\leqq 1.\end{cases}$$

Eine Homotopie der Identität von I in diejenige stückweise affine Selbstabbildung, die 0 in 0, $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{2}$ und 1 in 1 abbildet, liefert offenbar eine Homotopie zwischen χ' und χ''.

B) Sei (φ_τ,ψ_τ), $\tau\in I$, eine Schar von Transformationen von $f:X\to Y$ in $f':X'\to Y'$ und $\Phi_t^\tau:X\to Y'$ sei für jedes $\tau\in I$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0^\tau=f'\circ\varphi_\tau$ und $\Phi_1^\tau=\psi_\tau\circ f$. Sind φ_τ,ψ_τ Homotopien (d.h. stetig von τ abhängig, vgl. 1.1) und definiert die Zuordnung $(x,t,\tau)\to\Phi_t^\tau(x)$ eine stetige Abbildung $X\times I\times I\to Y'$, so ist auch

$$C(\varphi_\tau,\psi_\tau,\Phi^\tau):C_f\to C_{f'}$$

(vgl. 2.2) eine Homotopie, wie man mit Hilfe von 1.1 Hilfssatz 1 leicht zeigt.

Ist φ_τ,ψ_τ und Φ_t^0 mit den genannten Eigenschaften gegeben, jedoch zunächst nicht Φ_t^τ für $\tau>0$, so kann man Φ_t^0 immer so zu Φ_t^τ für alle $\tau\in I$ erweitern, daß alle obigen Eigenschaften erfüllt sind. Man setze z.B.

$$\Phi_t^\tau=\begin{cases}f'\circ\varphi_{\tau-4t}, & t\leqq\frac{\tau}{4}\\ \Phi^0_{(4t-\tau)(4-2\tau)^{-1}}, & \frac{\tau}{4}\leqq t\leqq 1-\frac{\tau}{4}\\ \psi_{\tau-4+4t}\circ f, & t\geqq 1-\frac{\tau}{4}.\end{cases}$$

Daraus folgt: *Sind (φ_0,ψ_0) und (φ_1,ψ_1) zwei homotope Transformationen von f in f' (d.h. $\varphi_0\simeq\varphi_1$, $\psi_0\simeq\psi_1$) und ist Φ_t^0 eine Homotopie zwischen $f'\circ\varphi_0$ und $\psi_0\circ f$, so gibt es eine Homotopie Φ_t^1 zwischen $f'\circ\varphi_1$ und $\psi_1\circ f$, so daß*

$$C(\varphi_0,\psi_0,\Phi^0)\simeq C(\varphi_1,\psi_1,\Phi^1).$$

C) Gibt es zu $f:X\to Y$ zwei Abbildungen $g,g':Y\to X$ mit

$$g\circ f\simeq 1_X \qquad (\text{„Links-Homotopieinverses“})$$
$$f\circ g'\simeq 1_Y \qquad (\text{„Rechts-Homotopieinverses“}),$$

so folgt $g\simeq g\circ f\circ g'\simeq g'$ und daraus $f\circ g\simeq 1_Y$, d.h. g ist (zweiseitig) homotopieinvers zu f, f ist also eine Homotopieäquivalenz (vgl. auch Fox [8] Th. 2).

Der eigentliche Beweis von Hilfssatz 7 wird nun folgendermaßen geführt: Sei (φ,ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen $f:X\to Y$ und $f':X'\to Y'$ und

$\Phi_t : X \to Y'$ eine Homotopie zwischen $f' \circ \varphi$ und $\psi \circ f$. Sind φ' und ψ' homotopieinvers zu φ bzw. ψ, so ist (φ', ψ') eine Homotopieäquivalenz zwischen f' und f (1.2 Hilfssatz 2). Es gibt also eine Homotopie $\Phi'_t : X' \to Y$ zwischen $f \circ \varphi'$ und $\psi' \circ f'$. Nach (14) ist

$$C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi) \simeq C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \bigcirc \Phi), \tag{15}$$

$$C(\varphi, \psi, \Phi) \circ C(\varphi', \psi', \Phi') \simeq C(\varphi \circ \varphi', \psi \circ \psi', \Phi \bigcirc \Phi'). \tag{16}$$

Wir werden zeigen, daß auf den rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen stehen. Daraus folgt dann die Behauptung von Hilfssatz 7. Multipliziert man nämlich (15) von links mit einem Homotopieinversen der rechten Seite, so sieht man, daß $C(\varphi, \psi, \Phi)$ ein Links-Homotopieinverses besitzt. Analog ergibt sich aus (16) die Existenz eines Rechts-Homotopieinversen; also ist $C(\varphi, \psi, \Phi)$ eine Homotopieäquivalenz [vgl. C)].

Beim Nachweis, daß die rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen sind, kann man sich offenbar auf eine der beiden Formeln, etwa (15) beschränken: Nach Voraussetzung ist $\varphi' \circ \varphi \simeq 1_X$, $\psi' \circ \psi \simeq 1_Y$. Daher gibt es nach B) eine zu der Transformation $(1_X, 1_Y)$ von f in f gehörende Homotopie $\Phi^1_t : X \to Y$ zwischen $\Phi^1_0 = f$ und $\Phi^1_1 = f$, so daß

$$C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \bigcirc \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^1). \tag{17}$$

Setzen wir $\Phi^{-1}_t = \Phi^1_{1-t}$, so gilt nach (14)

$$C(1_X, 1_Y, \Phi^1) \circ C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^1 \bigcirc \Phi^{-1}), \tag{18}$$

$$C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \circ C(1_X, 1_Y, \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1} \bigcirc \Phi). \tag{19}$$

Es gibt eine stetig von allen Variablen abhängende Schar $\Psi^\tau_t : X \to Y$, $t, \tau \in I$, mit $\Psi^0_t = (\Phi^1 \bigcirc \Phi^{-1})_t$ und $\Psi^1_t = f$ für alle $t \in I$; man braucht nur

$$\Psi^\tau_t = \begin{cases} \Phi^1_{(1-\tau)\cdot 2t}, & t \leqq \frac{1}{2} \\ \Phi^{-1}_{1-(1-\tau)(2-2t)} = \Phi^1_{(1-\tau)(2-2t)}, & t \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

zu setzen [vgl. (13)]. Daher folgt aus B):

$$C(1_X, 1_Y, \Phi^1 \bigcirc \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Psi^1) = C(1_X, 1_Y). \tag{20}$$

Nach Definition gilt [vgl. (9)]

$$C(1_X, 1_Y)(y) = y, \qquad y \in Y$$

$$C(1_X, 1_Y)(x, s) = \begin{cases} (x, 2s), & s \leqq \frac{1}{2},\ x \in X \\ f(x) = (x, 1), & s \geqq \frac{1}{2},\ x \in X, \end{cases}$$

woraus man leicht entnimmt, daß $C(1_X, 1_Y)$ zur Identität von C_f homotop ist. Wegen (20) und (18) ist dann auch die linke Seite von (18) zur Identität homotop. Entsprechendes gilt für (19), d.h. $C(1_X, 1_Y, \Phi^1)$ ist eine Homotopieäquivalenz und damit wegen (17) auch die rechte Seite von (15).

§ 3. Bedingungen für die Monomorphie von f^*: $\pi(Y, V) \to \pi(X, V)$

3.1. Folgende Feststellungen sind nahezu trivial:

A) *$f: X \to Y$ ist genau dann nullhomotop, wenn die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für jeden Bildraum V die Nullabbildung ist.* [*$0 \in \pi(X, V)$ ist die Homotopieklasse von $X \to v_0 =$ Grundpunkt von V, vgl. 1.3.*]

B) *$f: X \to Y$ besitzt genau dann ein Links-Homotopieinverses $l: Y \to X$ (d.h. $l \circ f \simeq 1_X$), wenn $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für jedes V epimorph*[4]) *ist.*

Beweis von A). Aus $f \simeq 0$ folgt $f^*[a] = [a \circ f] = 0$ (vgl. 1.3) für alle $a: Y \to V$. Zum Nachweis der Umkehrung wähle man $V = Y$; dann ist nach Voraussetzung insbesondere $0 = f^*[1_Y] = [f]$, d.h. $f \simeq 0$.

Beweis von B). Aus $l \circ f \simeq 1$ folgt $f^* \circ l^* = 1$ und daraus die Epimorphie von f^*. Zum Nachweis der Umkehrung wähle man $V = X$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $l: Y \to V = X$ mit $[1_X] = f^*[l] = [l \circ f]$, d.h. $l \circ f \simeq 1_X$ (vgl. 1.3).

Gibt es ein $r: Y \to X$ mit $f \circ r \simeq 1_Y$, so folgt $r^* \circ f^* = 1$, d.h.

C) *Besitzt $f: X \to Y$ ein Rechts-Homotopieinverses, so ist $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für jedes V monomorph*[4]).

Im Gegensatz zu A) und B) wäre hier die Umkehrung falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: Hat $g: S^1 \times S^1 \to S^2$ ($S^n = n$-Sphäre) den Grad 1, so ist $g^*: \pi(S^2, V) \to \pi(S^1 \times S^1, V)$ für jedes V monomorph ([*12*] 6.4, Satz 5); es gibt aber kein Rechts-Homotopieinverses zu g, denn jede Abbildung $S^2 \to S^1 \times S^1$ ist nullhomotop (wegen $\pi(S^2, S^1 \times S^1) = \pi_2(S^1 \times S^1) \cong \pi_2(S^1) + \pi_2(S^1) = 0$, s. Steenrod [*15*] 17.8 und 21.2 (2)). Mit Hilfe der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) kann man unter gewissen Voraussetzungen über X und Y aber doch ein Kriterium für die Monomorphie von f^* finden, das notwendig und hinreichend ist (3.4 Satz 12).

Bemerkung. Die Aussage C) bleibt nach unserem Beweis richtig, wenn man „monomorph" durch das schärfere „einwertig" ersetzt. Eine Abbildung heißt einwertig, wenn je zwei verschiedene Elemente verschiedene Bilder haben. Bei der Monomorphie wird nur verlangt, daß kein von 0 verschiedenes Element in 0 übergeht. Tatsächlich gibt es Abbildungen $f: X \to Y$, deren induzierte Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für alle V monomorph, aber für gewisse V nicht einwertig ist (vgl. 4.1 und 4.6 Beispiel A). Genaueres darüber findet man in § 4; hier steht die Frage nach der Monomorphie im Vordergrund.

3.2. Ist $f: X \to Y$ die *konstante Abbildung* von X in den Grundpunkt von Y, so ist $C_f = Y \vee SX$. Das Zeichen $\vee$ bedeutet dabei die topologische Summe mit Identifizierung der Grundpunkte, d.h.

$$A \vee B = (A + B)/\{a_0, b_0\},$$

[4]) Siehe Fußnote [1]) S. 300.

wenn a_0, b_0 die Grundpunkte der Räume A bzw. B sind. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen von C_f (1.4) und SX (1.8). $Pf: Y \to Y \vee SX$ (vgl. 1.4) ist die Injektion und $Qf: Y \vee SX \to SX$ [vgl. 1.9 (3)] die natürliche Projektion, bei der Y in den Grundpunkt übergeht. Durchläuft man die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) weiter, so erhält man:

a) $Sf: SX \to SY$ ist die konstante Abbildung,

b) $SPf: SY \to S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X$ ist die Injektion,

c) $SQf: S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X \to S^2X$ ist die natürliche Projektion, usw.

[Bei b) und c) wurde von der allgemeinen Beziehung $S(A \vee B) = SA \vee SB$ Gebrauch gemacht, die sich aus den Definitionen unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1 leicht ergibt.] Da nach 2.4 Satz 9 der Homotopietyp von $\mathfrak{A}f$ nur vom Homotopietyp von f abhängt, folgt:

Satz 10. *Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) einer nullhomotopen Abbildung $f: X \to Y$ stimmt bis auf Homotopieäquivalenz mit der aus konstanten Abbildungen, Injektionen und Projektionen (in periodischem Wechsel) bestehenden Folge*

$$X \to Y \to Y \vee SX \to SX \to SY \to SY \vee S^2X \to \cdots$$

überein.

3.3. Satz 11. *Ist die durch $f: X \to Y$ induzierte Abbildung der Homotopiemengen $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ monomorph für jedes V, so besitzt die Einhängung Sf ein Rechts-Homotopieinverses.*

Beweis. Aus der Monomorphie von f^* folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge (1.12 Satz 6) $(Pf)^* = 0$. Da das für alle V gilt, folgt nach 3.1 A) $Pf \simeq 0$. Wendet man Satz 10 auf $Pf: Y \to C_f$ (an Stelle von $f: X \to Y$) an, so ergibt sich, daß QPf mit der natürlichen Projektion $p: C_f \vee SY \to SY$ homotopieäquivalent ist. Die Injektion $SY \to C_f \vee SY$ ist rechts-(homotopie)-invers zu p. Nach 1.11 Satz 5 ist $QPf \equiv P^2Pf$ und $P^3f \equiv Sf$ also $Sf \equiv P^3f \equiv QPf \equiv p$. Mit p hat daher auch Sf ein Rechts-Homotopieinverses.

Satz 11 ist eine „abgeschwächte Umkehrung" von 3.1 C); denn wenn f ein Rechts-Homotopieinverses besitzt, so auch Sf (aber nicht umgekehrt). Im folgenden Abschnitt wird sich zeigen, daß auch die genaue Umkehrung von Satz 11 richtig ist (3.4 Satz 12), allerdings nicht ohne gewisse Voraussetzungen über die Räume X und Y (vgl. das Beispiel am Schluß von 3.4).

3.4. Satz 12. *Sind X und Y zusammenhängende CW-Komplexe und ist Y einfach zusammenhängend, so induziert $f: X \to Y$ genau dann Monomorphismen $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ der Homotopiemengen für jeden Bildraum V, wenn die Einhängung Sf ein Rechts-Homotopieinverses besitzt.*

Wir benötigen folgende Hilfssätze, deren Beweise in den nächsten Abschnitten nachgeholt werden:

Hilfssatz 8. *Wenn es zu $Pf: Y \to C_f$ (für irgendein $f: X \to Y$, vgl. 1.4) ein Rechts-Homotopieinverses $r: C_f \to Y$ gibt, so ist die Einhängung $S\psi$ der durch*

f und r gegebenen Abbildung $\psi: X \vee C_f \to Y$ (d.h. $\psi | X = f$, $\psi | C_f = r$) eine Homotopieäquivalenz.

Hilfssatz 9. *Sind X und Y zusammenhängende CW-Komplexe und ist Y einfach zusammenhängend, so ist C_f für jedes $f: X \to Y$ einfach zusammenhängend und zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent.*

Wählt man für Y speziell einen Raum, der nur aus dem Grundpunkt besteht, so ist $C_f = SX$ (vgl. 1.8), und man erhält aus Hilfssatz 9:

Folgerung. *Ist X ein zusammenhängender CW-Komplex, so ist SX einfach zusammenhängend.*

Hilfssatz 10. *Für jeden CW-Komplex A gibt es einen natürlichen Isomorphismus $H_q(A) \cong H_{q+1}(SA)$, $q > 0$, der Homologiegruppen zu beliebiger Koeffizientengruppe.*

„Natürlich" bedeutet hier, daß für jede Abbildung $g: A \to B$ zwischen CW-Komplexen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(A) & \cong & H_{q+1}(SA) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} \\ H_q(B) & \cong & H_{q+1}(SB) \end{array} \qquad q > 0$$

kommutativ ist.

Beweis von Satz 12. Daß die Bedingung für Monomorphie notwendig ist (sogar ohne Voraussetzungen über X und Y), wurde schon in 3.3 Satz 11 festgestellt.

Wir müssen noch zeigen, daß sie hinreichend ist, gehen also davon aus, daß Sf ein Rechts-Homotopieinverses besitzt. Nach 1.11 Satz 5 ist $Sf \equiv P^3 f$ und $P^2 f \equiv Qf$. Aus letzterem folgt $P^3 f \equiv PQf$, wenn man auf beide Seiten den Operator P anwendet (vgl. 2.4 Satz 9). Mit Sf besitzt daher auch PQf ein Rechts-Homotopieinverses. Wir wenden Hilfssatz 8 auf $Qf: C_f \to SX$ (an Stelle von $f: X \to Y$) an und erhalten eine Abbildung $\psi: C_f \vee C_{Qf} \to SX$, für die $\psi | C_f = Qf$ gilt und deren Einhängung $S\psi$ eine Homotopieäquivalenz ist. Die Voraussetzungen über X und Y gestatten es, daraus zu folgern, daß ψ selbst eine Homotopieäquivalenz ist. Stellen wir den Beweis dafür zunächst zurück, so wird folgendermaßen weitergeschlossen:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{i} & C_f \vee C_{Qf} \\ & {\scriptstyle Qf}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ & & SX \end{array}$$

worin i die Injektion bezeichnet, ist wegen $\psi | C_f = Qf$ kommutativ. Weil ψ (wie wir noch zu zeigen haben) eine Homotopieäquivalenz ist, folgt $Qf \equiv i$. Die natürliche Projektion $C_f \vee C_{Qf} \to C_f$ ist links-(homotopie-)invers zu i, also besitzt auch Qf ein Links-Homotopieinverses. Nach 3.1 B) ist dann

$$(Qf)^* : \pi(SX, V) \to \pi(C_f, V)$$

für jedes V epimorph, und wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (1.12 Satz 6) folgt nacheinander:

$$(Pf)^* = 0,$$

$$f^* \text{ ist monomorph,}$$

und das war zu beweisen.

Es bleibt zu zeigen, daß $\psi: C_f \vee C_{Qf} \to SX$ eine Homotopieäquivalenz ist, wenn $S\psi$ es ist: Wegen $Qf \equiv P^2 f$ (1.11 Satz 5) ist

$$C_{Qf} \equiv C_{P^2 f} \quad \text{(2.4 Satz 9 oder Hilfssatz 7)}$$

$$\equiv SY \quad \text{(1.11 Satz 5)}.$$

Nach Hilfssatz 9 ist C_f einfach zusammenhängend und zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent. Das gleiche gilt für SX und SY (Folgerung aus Hilfssatz 9) und folglich auch für $C_f \vee C_{Qf} \equiv C_f \vee SY$. Demnach ist ψ mit einer Abbildung $\psi': A \to B$ zwischen zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden CW-Komplexen A, B homotopieäquivalent. Aus $\psi \equiv \psi'$ folgt $S\psi \equiv S\psi'$ (vgl. 1.8), d.h. mit $S\psi$ ist auch $S\psi'$ eine Homotopieäquivalenz. Als solche induziert $S\psi'$ Isomorphismen der Homologiegruppen $H_{q+1}(SA) \to H_{q+1}(SB)$ für alle q. Nach Hilfssatz 10 induziert dann auch ψ' Isomorphismen $H_q(A) \to H_q(B)$ für alle $q > 0$. Nach einem bekannten Satz von J. H. C. WHITEHEAD ([19] Th. 3) folgt daraus, daß ψ' eine Homotopieäquivalenz ist. Wegen $\psi \equiv \psi'$ ist der Beweis von Satz 12 damit beendet.

Daß die Voraussetzungen über X und Y in Satz 12 nicht entbehrlich sind, zeigt folgendes Beispiel: X bestehe nur aus dem Grundpunkt x_0, und Y sei ein zusammenhängender CW-Komplex mit $H_q(Y) = 0$ für alle $q > 0$, der aber nicht einfach zusammenhängend ist. (Ist M^3 ein Poincaréscher Raum, vgl. SEIFERT-THRELFALL [13] S. 218 und e^3 eine 3-Zelle einer Zerlegung von M^3, so hat z.B. $Y = M^3 - e^3$ die geforderten Eigenschaften.) Die Abbildung $f: X = \{x_0\} \to y_0 \in Y$ induziert nicht für jedes V einen Monomorphismus $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$; denn z.B. für $V = Y$ ist $[1_Y] \neq 0$ aber $f^*[1_Y] = [f] = 0$. Die Einhängung Sf besitzt jedoch trotzdem ein Rechts-Homotopieinverses, ja sie ist sogar eine Homotopieäquivalenz nach J. H. C. WHITEHEAD [19] Th. 3, denn SY ist ebenso wie SX einfach zusammenhängend (Folgerung aus Hilfssatz 9), und Sf induziert Isomorphismen der (trivialen) Homologiegruppen (vgl. Hilfssatz 10).

3.5. Beweis von Hilfssatz 8. Bezeichnet $i: X \to X \vee C_f$ die Injektion, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \vee C_f \\ {\scriptstyle 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

nach Definition von ψ kommutativ. Also ist $(1_X, \psi)$ eine Transformation von i in f (vgl. 2.1) und induziert nach 2.2 die Transformation $(1_X, \psi, \chi,$

$S1_X, S\psi, \ldots$) der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}i$ in $\mathfrak{A}f$ mit $\chi = C(1_X, \psi): C_i \to C_f$. Offenbar ist $C_i = CX \vee C_f$. Nach Definition von χ [2.2 (9)] gilt $\chi | (X \vee C_f) = Pf \circ \psi$, also insbesondere $\chi | C_f = Pf \circ r$. Nach Voraussetzung ist diese Abbildung zur Identität von C_f homotop. Ist $j: C_f \to CX \vee C_f$ die Injektion, so gilt also

$$\chi \circ j = \chi | C_f \simeq 1_{C_f}.$$

Weil sich CX auf den Grundpunkt zusammenziehen läßt, ist j eine Homotopieäquivalenz, und folglich auch χ. Da demnach die beiden in ($1_X, \psi, \chi, S1_X, S\psi, \ldots$) aufeinanderfolgenden Abbildungen χ und $S1_X = 1_{SX}$ Homotopieäquivalenzen sind, ist es nach 2.4 Satz 8b) auch die nächste Abbildung $S\psi$, und Hilfssatz 8 ist bewiesen.

Hilfssatz 9 läßt sich mit geläufigen Methoden leicht beweisen, und Hilfssatz 10 ist bekannt, aber anscheinend nirgends in dieser Form veröffentlicht. Der Vollständigkeit halber führen wir die Beweise aus:

3.6. Beweis von Hilfssatz 9. Sind X, Y CW-Komplexe[5]), so gibt es zu jeder Abbildung $f: X \to Y$ eine homotope Zellenabbildung $f': X \to Y$, d.h. eine Abbildung f', die jedes Gerüst $X^{(q)}$ (Vereinigung aller Zellen von X, deren Dimension höchstens q ist) in das entsprechende Gerüst $Y^{(q)}$ von Y abbildet (J. H. C. Whitehead [19] § 5 (L)). Homotope Abbildungen sind insbesondere homotopieäquivalent, also folgt aus 2.4 Hilfssatz 7: $C_f \equiv C_{f'}$. Für den Beweis von Hilfssatz 9 kann man sich daher auf den Fall beschränken, daß f schon eine Zellenabbildung ist:

Wir setzen $\tilde{C}X = (X \times I)/(X \times 0)$ und betrachten an Stelle von C_f zunächst den Raum $\tilde{C}_f$, der aus $\tilde{C}X + Y$ entsteht, wenn man $(x, 1) \in \tilde{C}X$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert. $(x_0, 1) = y_0$ sei der Grundpunkt von $\tilde{C}_f$. $x_0 \times I$ läßt sich als Teilraum von $\tilde{C}_f$ auffassen, und es gilt $\tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$ (vgl. 1.4). Aus den Zellenzerlegungen von X und Y erhält man in natürlicher Weise Zellenzerlegungen von $X \times I$, $\tilde{C}X$ und schließlich von $\tilde{C}_f$; $\tilde{C}_f$ ist mit dieser Zerlegung ein CW-Komplex, weil f eine Zellenabbildung sein sollte (vgl. J. H. C. Whitehead [19] § 5 (H) und § 8), und $x_0 \times I$ ist offenbar ein Teilkomplex. Folglich ist auch $C_f = \tilde{C}_f/(x_0 \times I)$ ein CW-Komplex. Weil $x_0 \times I$ zusammenziehbar ist und sich eine solche Zusammenziehung zu einer Homotopie der Identität von $\tilde{C}_f$ fortsetzen läßt (vgl. 1.6), folgt aus 1.2 Hilfssatz 3:

Die natürliche Projektion

$$p: \tilde{C}_f \to \tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Es braucht nun nur noch gezeigt zu werden, daß $\tilde{C}_f$ einfach zusammenhängend ist. Hierzu ist die Voraussetzung, daß X und Y CW-Komplexe sind, übrigens nicht mehr erforderlich. Die Teilmengen $U = \tilde{C}_f - \{(x_0, 0)\}$ und $V = \tilde{C}_f - Y = \tilde{C}X - X \times 1$ bilden eine offene Überdeckung von $\tilde{C}_f$ (Fig. 5). $w: I \to \tilde{C}_f$ sei ein geschlossener Weg mit dem Anfangspunkt $y_0 \in Y \subset \tilde{C}_f$.

[5]) Siehe Fußnote [3]) S. 307.

Wegen der Kompaktheit von I gibt es eine positive Zahl ε, so daß jedes Teilintervall von I, dessen Länge kleiner als ε ist, entweder in $w^{-1}(U)$ oder in $w^{-1}(V)$ liegt (Lebesguesche Zahl). Folglich setzt sich w aus endlich vielen Wegen $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ zusammen, so daß u_ν ganz in U und v_ν ganz in V verläuft. Weil X zusammenhängend ist, lassen sich die Endpunkte von v_ν innerhalb $U \cap V = X \times (I - \{0, 1\})$ durch einen Weg v'_ν verbinden. Wegen der Zusammenziehbarkeit von V ist v_ν unter Festhaltung der Endpunkte mit v'_ν, also

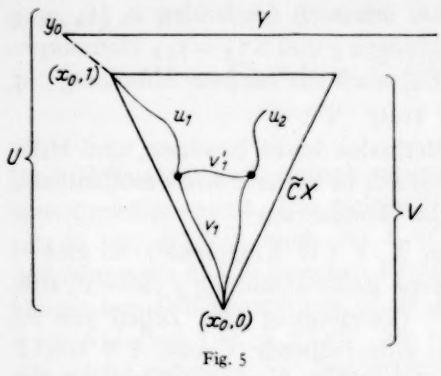


Fig. 5

$w = u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots$ mit $w' = u_1 v'_1 u_2 v'_2 \ldots$ homotop. w' liegt ganz in U, Y ist Deformationsretrakt von U und nach Voraussetzung einfach zusammenhängend; folglich ist $w' \simeq w$ nullhomotop, und Hilfssatz 9 ist bewiesen.

3.7. Beweis von Hilfssatz 10. Nach 1.8 Hilfssatz 5 ist die natürliche Projektion $p: \tilde{S}A \to SA$ eine Homotopieäquivalenz, wenn A ein CW-Komplex ist. Ohne jede Voraussetzung über A gilt:

Hilfssatz 11. *Für jeden Raum A und jedes $q > 0$ bestehen die Isomorphismen*

$$H_q(A) \underset{\cong}{\xleftarrow{\partial_*}} H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \underset{\cong}{\xrightarrow{\tilde{p}_*}} H_{q+1}(\tilde{S}A, (a_0, 1)) \cong H_{q+1}(\tilde{S}A). \tag{21}$$

Dabei ist $\tilde{C}A = (A \times I)/(A \times 0)$ wie in 3.6; A wird mit $A \times 1 \subset \tilde{C}A$ identifiziert. ∂_* ist der Randhomomorphismus der Homologiefolge und $\tilde{p}: \tilde{C}A \to \tilde{C}A/A = \tilde{S}A$ die natürliche Projektion.

Wird im Fall der CW-Komplexe $p_*: H_{q+1}(\tilde{S}A) \xrightarrow{\cong} H_{q+1}(SA)$ an (21) angeschlossen, so erhält man den in Hilfssatz 10 behaupteten Isomorphismus $H_q(A) \cong H_{q+1}(SA)$. Er ist natürlich, weil bei jedem einzelnen Schritt ein natürlicher Isomorphismus vorliegt

Beweis von Hilfssatz 11. $\tilde{C}A$ ist zusammenziehbar, also $H_q(\tilde{C}A) = 0$ für alle $q > 0$. Daß ∂_* ein Isomorphismus ist, folgt demnach aus der Exaktheit der Homologiefolge

$$0 = H_{q+1}(\tilde{C}A) \to H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \to H_q(\tilde{C}A) = 0.$$

Um zu zeigen, daß $\tilde{p}_*$ ein Isomorphismus ist, setzen wir

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(a, s) \mid s \geqq \tfrac{1}{3}\} \subset \tilde{C}A \\ U_2 &= \{(a, s) \mid s \geqq \tfrac{2}{3}\} \subset \tilde{C}A \end{aligned} \qquad a \in A,\ s \in I.$$

Wie man leicht sieht, gibt es eine Homotopie der Identität von $\tilde{C}A$, die U_1 in sich auf A $(= A \times 1 \subset \tilde{C}A)$ zusammenzieht und A punktweise festläßt. Daraus folgt

$$H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \cong H_{q+1}(\tilde{C}A, U_1). \tag{22}$$

Nach dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property", vgl. EILENBERG-STEENROD [5] Chap. VII, Th. 9.1) ist

$$H_{q+1}(\tilde{C}A, U_1) \cong H_{q+1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2). \tag{23}$$

Setzt man (22) mit (23) zusammen und verfährt man für $\tilde{S}A$ analog, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}(\tilde{C}A, A) & \cong & H_{q+1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2) \\ \tilde{p}_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2))_* \\ H_{q+1}(\tilde{S}A, (a_0, 1)) & \cong & H_{q+1}(\tilde{S}A - \tilde{p}(U_2), \tilde{p}(U_1 - U_2)). \end{array} \tag{24}$$

Weil $\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2)$ eine Homöomorphie ist, ist $(\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2))_*$ und daher auch $\tilde{p}_*$ ein Isomorphismus.

§ 4. Algebraische Strukturen in $\pi(X, V)$

4.1. In § 3 wurde untersucht, wann eine Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ zwischen Homotopiemengen, die durch $f: X \to Y$ induziert wird, monomorph ist. Es wurde schon erwähnt, daß dabei Monomorphie nicht mit Einwertigkeit äquivalent ist (3.1 Bemerkung). Sei z. B. $X = S^3$, $Y = V = S^2$, d. h. $\pi(Y, V) = \pi_2(S^2) \cong Z$ (= Gruppe der ganzen Zahlen) und $\pi(X, V) = \pi_3(S^2) \cong Z$ (vgl. STEENROD [15] 21.2). Hat $f: S^3 \to S^2$ die Hopfsche Invatiante 1 (vgl. H. HOPF [7]) und $a_n: S^2 \to S^2$ den Grad n, so hat $a_n \circ f$ die Hopfsche Invariante n^2 ([7] Satz IIb'). Da die Hopfsche Invariante einer Abbildung $S^3 \to S^2$ ihre Homotopieklasse bestimmt, gilt einerseits

$$f^*[a_n] = [a_n \circ f] = [a_{-n} \circ f] = f^*[a_{-n}];$$

andererseits ist nur dann $f^*[a_n] = 0$, wenn $n = 0$, also $[a_n] = 0$ ist. Demnach ist f^* monomorph, bildet aber $[a_n]$ und $[a_{-n}]$, die für $n \neq 0$ voneinander verschieden sind, in dasselbe Element ab.

Im Gegensatz zu diesem Beispiel gilt

GM: $f^{*-1}f^*[a]$ *besitzt für jedes* $[a] \in \pi(Y, V)$ *die gleiche Mächtigkeit,*

sicher dann, wenn es in $\pi(X, V)$ und $\pi(Y, V)$ Gruppenstrukturen gibt, so daß $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ ein Homomorphismus ist. Wir werden in diesen Paragraphen einige Bemerkungen über algebraische Strukturen in den Abbildungsmengen sowie über die Gültigkeit von *GM* machen. Unter anderem ergänzen wir dabei die Ergebnisse von § 3 in bezug auf die Frage nach der Einwertigkeit.

4.2. Für Abbildungen $\alpha, \beta: SX \to V$ (SX ist die Einhängung von X, vgl. 1.8) liegt es nahe eine „Addition" durch

$$(\alpha + \beta)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ \beta(x, 2s - 1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, s) \in SX \tag{25}$$

zu definieren. Es ist bekannt und man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß diese Verknüpfung beim Übergang zu den Homotopieklassen eine Gruppenoperation in $\pi(SX, V)$ induziert. Wir schreiben sie wieder additiv, obwohl sie nicht abelsch zu sein braucht [Beispiel: $\pi(SS^0, V) = \pi_1(V) =$ Fundamentalgruppe von V].

Für die Einhängung einer Abbildung $Sf: SX \to SY$ gilt

$$(\alpha + \beta) \circ Sf = \alpha \circ Sf + \beta \circ Sf,$$

wie man aus der Definition (25) unmittelbar entnimmt. Folglich induziert Sf einen Homomorphismus

$$(Sf)^* : \pi(SY, V) \to \pi(SX, V) \quad \text{(vgl. 1.3)}.$$

Die durch die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) induzierte exakte Folge von Homotopiemengen (vgl. 1.12)

$$\pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Qf)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \cdots \tag{26}$$

besteht demnach von der vierten Stelle an aus Gruppen und Homomorphismen. Beschränkt man sich auf diesen Teil und nimmt man für f eine Injektion $X \subset Y$, bei der die Homotopieerweiterungseigenschaft HE von 1.6 erfüllt ist, so erhält man die „track group sequence" von BARRATT [1] für das Raumtripel $\{x_0\} \subset X \subset Y$. Nach 1.6 Satz 2 ist nämlich $C_f \equiv Y/X$, folglich $S^n C_f \equiv S^n(Y/X)$ und daher $\pi(S^n C_f, V) \cong \pi\big(S^n(Y/X), V\big)$.

$$\pi(S^n X, V), \quad \pi(S^n Y, V) \quad \text{und} \quad \pi\big(S^n(Y/X), V\big)$$

sind aber gerade die Barrattschen track groups

$$(X, x_0)^n (V, v_0; v_0), \quad (Y, x_0)^n (V, v_0; v_0) \quad \text{bzw.} \quad (Y, X)^n (V, v_0; v_0).$$

Die track group sequence für ein Raumtripel $A \subset B \subset C$ mit beliebigem A erhält man, falls A nicht leer ist, aus der Abbildungsfolge von $B/A \subset C/A$. Wenn A leer ist, kann man $\emptyset \subset B \subset C$ durch $\{a_0\} \subset B + \{a_0\} \subset C + \{a_0\}$ ersetzen, ohne die track group sequence zu ändern, und damit diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Unsere exakte Folge von Homotopiemengen (26) verallgemeinert und verlängert also die track group sequence.

4.3. Wir werden hier auch an der dritten Stelle der Folge (26) eine algebraische Struktur definieren nämlich eine Operation von $\pi(SX, V)$ in $\pi(C_f, V)$. Für $\alpha: SX \to V$, $a: C_f \to V$ wird $\alpha \top a: C_f \to V$ durch

$$\begin{cases} (\alpha \top a)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ a(x, 2s-1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} & x \in X, \ s \in I \\ (\alpha \top a)(y) = a(y), & y \in Y \end{cases} \tag{27}$$

definiert (Fig. 6). Durch Übergang zu den Homotopieklassen ergibt sich eine Verknüpfung $\pi(SX, V) \times \pi(C_f, V) \to \pi(C_f, V)$, die wir auch mit $\top$ bezeichnen

und die folgenden Regeln genügt $([\alpha], [\beta] \in \pi(SX, V), [a], [b] \in \pi(C_f, V))$:

A) $[\alpha] \top ([\beta] \top [a]) = ([\alpha] + [\beta]) \top [a]$,

B) $0 \top [a] = [a]$,

C) $[\alpha] \top (Qf)^* [\beta] = (Qf)^* ([\alpha] + [\beta])$.

Man bestätigt diese Regeln sehr leicht anhand der Definitionen (25) und (27). Bei C) sei daran erinnert, daß $Qf: C_f \to C_f/Y = SX$ die natürliche Projektion

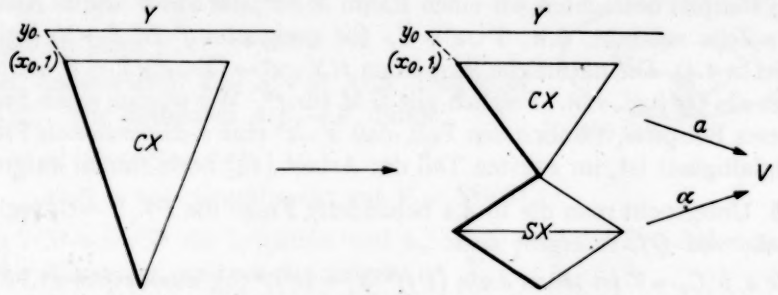


Fig. 6. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

ist (1.9). Ist $[\alpha] \top [a] = [\alpha] \top [b]$, so folgt aus A) und B):

$$[a] = 0 \top [a] = (-[\alpha] + [\alpha]) \top [a] = (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [a])$$
$$= (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [b]) = [b],$$

also

D) *Die Zuordnung* $[a] \to [\alpha] \top [a]$ *definiert für jedes* $[\alpha]$ *eine einwertige Abbildung.*

Aus C) folgt insbesondere:

E) $[\alpha] \top 0 = (Qf)^* [\alpha]$.

4.4. Mit Hilfe von 4.3 kann man die Frage, wann zwei Elemente von $\pi(SX, V)$ durch $(Qf)^*$ in dasselbe Element von $\pi(C_f, V)$ abgebildet werden, auf die Frage nach Kern $(Qf)^* =$ Bild $(Sf)^*$ (vgl. 1.12 Satz 6) zurückführen:

$$(Qf)^* [\alpha] = (Qf)^* [\beta] \quad \text{ist nach 4.3 D) mit}$$
$$(-[\alpha]) \top (Qf)^* [\alpha] = (-[\alpha]) \top (Qf)^* [\beta]$$

äquivalent. Nach 4.3 C) ist die rechte Seite hiervon $(Qf)^* (-[\alpha] + [\beta])$ und die linke $(Qf)^* (-[\alpha] + [\alpha]) = 0$. $[\alpha]$ und $[\beta]$ haben also genau dann das gleiche Bild bei $(Qf)^*$, wenn

$$-[\alpha] + [\beta] \in \text{Kern } (Qf)^* = \text{Bild } (Sf)^*$$

ist. Insbesondere hat $(Qf)^{*-1} (Qf)^* [\alpha]$ für jedes $[\alpha] \in \pi(SX, V)$ die gleiche Mächtigkeit, und zwar die Mächtigkeit von Bild $(Sf)^*$.

Das gleiche gilt für jede Abbildung, die zu Qf homotopieäquivalent ist (zur Definition vgl. 1.2), da eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen

Räumen einen Isomorphismus zwischen den entsprechenden Homotopiemengen induziert. Wir fassen zusammen:

Satz 13. *Ist $f: X \to Y$ für eine geeignete Abbildung f' mit Qf' ($\equiv P^2 f'$, vgl. 1.11 Satz 5) homotopieäquivalent, so gilt GM (vgl. 4.1) für die induzierte Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ (V beliebig), d.h. für jedes $[\alpha] \in \pi(Y, V)$ hat $f^{*-1} f^* [\alpha]$ die gleiche Mächtigkeit. Ist insbesondere f^* monomorph, so ist es sogar einwertig.*

Als Beispiel betrachten wir einen Raum $Y \cup e^n$, der aus Y durch Anheften einer n-Zelle entsteht, d.h. $Y \cup e^n = C_{f'}$ für geeignetes $f': S^{n-1} \to Y$ (vgl. das Beispiel in 1.4). Die natürliche Projektion $f: Y \cup e^n \to (Y \cup e^n)/Y = S^n$ ist nichts anderes als Qf' (vgl. 1.9). Folglich gilt GM für f^*. Wir werden einen Spezialfall dieses Beispiels, nämlich den Fall, daß $Y \cup e^n$ eine n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist, im zweiten Teil der Arbeit [12] noch einmal aufgreifen.

4.5. Untersucht man die in 4.4 behandelte Frage für $Pf: Y \to C_f$ (vgl. 1.4) an Stelle von Qf, so ergibt sich:

Für $a, b: C_f \to V$ ist genau dann $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$, wenn es ein $\alpha: SX \to V$ mit $[\alpha] \top [a] = [b]$ gibt.

Beweis. $Pf: Y \to C_f$ ist die Injektion, also gilt $(Pf)^*[a] = [a|Y]$, und aus der Definition (27) folgt

$$(Pf)^*([\alpha] \top [a]) = (Pf)^*[a].$$

Das beweist die Implikation in der einen Richtung.

Sei nun umgekehrt $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$, d.h. $a|Y \simeq b|Y$ vorausgesetzt. Nach 1.9 Hilfssatz 6 hat (C_f, Y) die Homotopieerweiterungseigenschaft HE von 1.6, folglich gibt es ein $b': C_f \to V$ mit $b' \simeq b$ und $b'|Y = a|Y$. Wegen der Identifizierung $CX \ni (x, 1) = f(x) \in Y$ in C_f folgt $b'(x, 1) = a(x, 1)$ für alle $x \in X$. Daher definiert die Festsetzung

$$\alpha(x, s) = \begin{cases} b'(x, 2s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ a(x, 2 - 2s), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Abbildung $\alpha: SX \to V$. Man zeigt leicht $\alpha \top a \simeq b'$ (vgl. Fig. 6); denn $Y < C_f$ wird durch $\alpha \top a$ und b' gleich abgebildet, und der Weg $(\alpha \top a)|I_x$ mit $I_x = \{(x, s) | s \in I\} < C_f$ setzt sich aus $b'|I_x$, dem zu $a|I_x$ inversen Weg und dem Weg $a|I_x$ selbst zusammen. Aus $\alpha \top a \simeq b'$ und $b' \simeq b$ folgt die Behauptung $[\alpha] \top [a] = [b]$.

Das hiermit bewiesene Kriterium läßt sich auch in der Form

$$(28) \qquad (Pf)^{*-1}(Pf)^*[a] = \pi(SX, V) \top [a] \qquad \text{für alle } [a] \in \pi(C_f, V)$$

ausdrücken. Man kann daraus jedoch nicht etwa folgern, daß $(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$ für jedes $[a]$ gleiche Mächtigkeit hat. Es kann sogar vorkommen, daß $(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$ für $[a] = 0$ nur ein Element, für ein gewisses anderes $[a]$ aber unendlich viele Elemente besitzt — und umgekehrt. Das zeigen die folgenden Beispiele.

4.6. Beispiel A. $f: S^1 \to S^1 \times S^1$ sei die Injektion des ersten Faktors, d.h. $f(x) = (x, x_0)$ für alle $x \in S^1$. C_f besteht dann aus dem Torus $S^1 \times S^1$ und einer 2-Zelle e^2 (vgl. Fig. 7 und das Beispiel in 1.4). Die Projektion $p_1: S^1 \times S^1 \to S^1$ auf den ersten Faktor ist links-(homotopie-)invers zu f, folglich Sp_1 links-(homotopie-)invers zu Sf. Nach 3.1 B) ist dann $(Sf)^*: \pi(S(S^1 \times S^1), V) \to \pi(SS^1, V)$ epimorph. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (1.12 Satz 6) folgt nacheinander: $(Qf)^* = 0$ und

$$\text{Kern}\,(Pf)^* = 0. \tag{29}$$

Das gilt für jedes V.

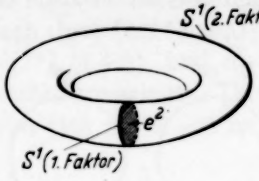


Fig. 7

Sei andererseits $V = S^1 \vee S^2$ (zur Definition vgl. 3.2). Wir definieren $a: C_f \to V$ durch

$$a\,|\,(S^1 \times S^1) = i \circ p_2$$
$$a(e^2) = v_0 = \text{Grundpunkt von } V = S^1 \vee S^2,$$

wobei $i: S^1 \to S^1 \vee S^2$ die Injektion und $p_2: S^1 \vee S^1 \to S^1$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist, und werden zeigen:

Hilfssatz 12. *Die Zuordnung* $[\alpha] \to [\alpha] \top [a]$ *definiert eine einwertige Abbildung* $\pi(SS^1, V) \to \pi(C_f, V)$.

Daraus folgt, daß

$$(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a] = \pi(SS^1, V) \top [a]$$

[vgl. 4.5 (28)] ebenso viele Elemente hat wie $\pi(SS^1, V) = \pi_2(S^1 \vee S^2)$, also abzählbar unendlich viele, während $(Pf)^*$ nach (29) monomorph ist.

Beweis von Hilfssatz 12. Wir müssen zeigen, daß für jedes Paar $\alpha, \beta: SS^1 = S^2 \to V = S^1 \vee S^2$ mit $\alpha \neq \beta$ auch $\alpha \top a \neq \beta \top a$ ist. Dazu denken wir uns C_f aus der Randsphäre S^2 von $E^2 \times I$ (E^2 = abgeschlossene Kreisscheibe) durch Identifizieren von $E^2 \times 0$ mit $E^2 \times 1$ entstanden (Fig. 7). $p: S^2 \to C_f$ sei die natürliche Projektion. Nach Definition von $\alpha \top a$ [vgl. (27) und Fig. 6] repräsentiert $(\alpha \top a) \circ p\,|\,(x \times I)$ für jedes x aus dem Rand von E^2 eine Erzeugende $[i] = \iota \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$, und

$$(\alpha \top a) \circ p\,|\,(E^2 \times 0) = (\alpha \top a) \circ p\,|\,(E^2 \times 1)$$

repräsentiert $[\alpha] \in \pi_2(S^1 \vee S^2)$. Folglich ist $[(\alpha \top a) \circ p]$ das Whitehead-Produkt $[[\alpha], \iota]$ (vgl. [18] § 3). Es genügt nun zu zeigen, daß für $\xi = [\alpha] - [\beta] \neq 0$ auch

$$[[\alpha], \iota] - [[\beta], \iota] = [\xi, \iota] \neq 0$$

ist (zur Bilinearität des Whitehead-Produkts vgl. [18] Th. 1 und 3.3). Nach [18] 3.2 ist $[\xi, \iota] = \iota \cdot \xi - \xi$, wobei $\iota \cdot \xi$ das Bild von ξ bei Anwendung der Operation $\iota \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$ bezeichnet. Sei $\tilde{V}$ die universelle Überlagerung von $V = S^1 \vee S^2$. Die Operation ι in $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ wird, wenn man $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ mit $\pi_2(\tilde{V})$ identifiziert, durch die zu ι gehörende Deckbewegung d_ι von $\tilde{V}$ induziert (vgl. EILENBERG [4] § 9). $\tilde{V}$ besteht aus einer Geraden (der universellen

Überlagerung von S^1), an die abzählbar viele 2-Sphären in konstanten Abständen mit je einem Punkt angeheftet sind (Fig. 8). d_ι „verschiebt" dieses Gebilde um eine Stufe. Daraus entnimmt man leicht, daß die Operation ι kein von 0 verschiedenes Element $\xi \in \pi_2(S^1 \vee S^2) = \pi_2(\tilde{V})$ in sich abbildet, d.h. $[\xi, \iota] = \iota \cdot \xi - \xi \neq 0$.

Beispiel B. Das Produkt $S^5 \times S^6$ kann man aus $S^5 \vee S^6$ (vgl. 3.2) durch Anheften einer 11-Zelle erhalten, d.h. es gibt eine Abbildung $f: S^{10} \to S^5 \vee S^6$ mit $C_f = S^5 \times S^6$ (vgl. das Beispiel in 1.4). $Pf: S^5 \vee S^6 \to S^5 \times S^6$ ist dann die natürliche Injektion, und wie wir zeigen werden (5.1 Satz 14) ist $(P^2 f)^* : \pi(C_{Pf}, V) \to \pi(C_f, V)$ monomorph für jedes V. Wegen $P^2 f \equiv Qf$ (1.9 Satz 3) ist daher auch $(Qf)^* : \pi(S S^{10}, V) \to \pi(C_f, V)$ monomorph und folglich einwertig (4.4 Satz 13). Also hat Kern $(Pf)^*$ = Bild $(Qf)^*$ (vgl. 1.12 Satz 6) ebenso viele Elemente wie $\pi(S S^{10}, V) = \pi_{11}(V)$. Nimmt man $V = S^6$, so hat Kern $(Pf)^*$ unendlich viele Elemente, denn $\pi_{11}(S^6)$ ist frei zyklisch (SERRE [14]).

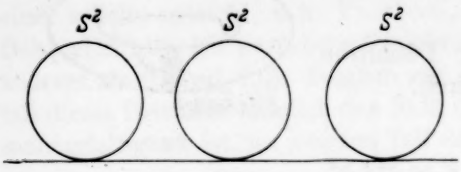


Fig. 8

Andererseits besteht $(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$ nur aus $[a]$ selbst, wenn $a: S^5 \times S^6 \to S^6$ die natürliche Projektion ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{G}$ der Raum der Abbildungen $S^6 \to S^6$ vom Grade 1 (ohne Festlegung eines Grundpunktes) und $\mathfrak{F}$ der Teilraum derjenigen Abbildungen, die den Grundpunkt $y_0 \in S^6$ in sich überführen. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ werden mit der „Kompakt-Offen-Topologie" versehen (Topologie der kompakten Konvergenz bei BOURBAKI, vgl. [3] § 1, No. 3, III und § 2, Prop. 7), und die Identität $S^6 \to S^6$ gilt als Grundpunkt. Man erhält eine (natürliche) Abbildung $\omega: \pi_5(\mathfrak{G}) \to \pi(S^5 \times S^6, S^6)$, wenn man jedem $g: S^5 \to \mathfrak{G}$ die durch

$$(x, y) \to g(x)(y) = \text{Bild von } y \in S^6 \text{ bei Anwendung von } g(x) \in \mathfrak{G}$$

gegebene Abbildung $S^5 \times S^6 \to S^6$ zuordnet und dann zu den Homotopieklassen übergeht. Bild ω besteht aus den Homotopieklassen von solchen Abbildungen $S^5 \times S^6 \to S^6$, deren Einschränkung auf $x_0 \times S^6$ (x_0 = Grundpunkt von S^5) die natürliche Abbildung $x_0 \times S^6 \to S^6$ [d.h. $(x_0, y) \to y$] ist. Andererseits ist für $b: S^5 \times S^6 \to S^6$ genau dann $[b] \in (Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$, wenn $b \mid (S^5 \vee S^6) \simeq a \mid (S^5 \vee S^6)$ ist. Weil $S^5 \vee S^6$ Teilkomplex des CW-Komplexes $S^5 \times S^6$ ist, gibt es dann ein $b': S^5 \times S^6 \to S^6$ mit $b' \simeq b$ und $b' \mid (S^5 \vee S^6) = a \mid (S^5 \vee S^6)$. Nach Definition von a ist $a \mid (x_0 \times S^6) : x_0 \times S^6 \to S^6$ die natürliche Abbildung, also auch $b' \mid (x_0 \times S^6)$. Folglich gilt:

$$(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a] \subset \text{Bild } \omega = \omega(\pi_5(\mathfrak{G})).$$

Es genügt nun, $\pi_5(\mathfrak{G}) = 0$ zu beweisen. Dazu betrachten wir die Abbildung $\mathfrak{G} \to S^6$, definiert durch $g \to g(y_0)$ für jedes $g \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G} \to S^6$ ist eine Faserung mit der Faser $\mathfrak{F}$ (vgl. G. W. WHITEHEAD [16] (2.1)). Zu ihr gehört die exakte

Homotopiefolge

$$(30) \qquad \cdots \to \pi_6(S^6) \xrightarrow{\varrho} \pi_5(\mathfrak{F}) \to \pi_5(\mathfrak{G}) \to \pi_5(S^6) = 0.$$

Nach [16] (2.10) ist $\pi_5(\mathfrak{F}) \cong \pi_{11}(S^6)$. Identifiziert man diese beiden Gruppen, so ist $\varrho(\xi)$ für jedes $\xi \in \pi_6(S^6)$ bis auf das Vorzeichen das Whitehead-Produkt $[\iota, \xi]$ (zur Definition s. [18] § 3), wobei ι eine Erzeugende von $\pi_6(S^6)$ ist (vgl. [16] (3.2) und die Berichtigung von J. H. C. WHITEHEAD [20] (3.1)). $\pi_{11}(S^6)$ ist frei zyklisch (SERRE [14]) und wird von $[\iota, \iota]$ erzeugt; denn $[\iota, \iota]$ hat die Hopfsche Invariante 2 (G. W. WHITEHEAD [17] (3.49)), und $\pi_{11}(S^6)$ enthält nach [17] § 9 nur Elemente mit gerader Hopfscher Invariante. Daraus folgt, daß ϱ epimorph, also wegen der Exaktheit von (30) $\pi_5(\mathfrak{G}) = 0$ ist.

§ 5. Produkte

5.1. Die Abbildungsfolge (vgl. 1.11) erweist sich als ein nützliches Hilfsmittel für den Beweis einer zuerst von HILTON angegebenen Formel für die Einhängung eines topologischen Produkts von zwei Räumen. Nachher werden wir diese Formel auf mehrere Faktoren verallgemeinern.

Wir identifizieren $X \vee Y$ (zur Definition vgl. 3.2) im folgenden immer mit der Teilmenge $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ des topologischen Produkts $X \times Y$ (x_0, y_0 sind die Grundpunkte von X bzw. Y). Man bestätigt leicht, daß $X \vee Y$ die durch $X \times Y$ induzierte Topologie trägt. $i: X \vee Y \to X \times Y$ sei die Injektion, (x_0, y_0) sei der gemeinsame Grundpunkt von $X \vee Y$ und $X \times Y$. Bezeichnen wir C_i (vgl. 1.4) mit $X \bar{\wedge} Y$, so lautet die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}i$ von i (vgl. 1.11):

$$(31) \qquad X \vee Y \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{Pi} X \bar{\wedge} Y \xrightarrow{Qi} SX \vee SY \xrightarrow{Si} S(X \times Y) \to \cdots.$$

[Dabei wurde von der allgemeinen Beziehung $S(X \vee Y) = SX \vee SY$ Gebrauch gemacht, vgl. 3.2.]

Hilfssatz 13. *Für irgend zwei Räume X, Y ist in* (31): $Qi \simeq 0$.

Der Beweis wird im nächsten Abschnitt geführt. Als Folgerungen erhält man:

Satz 14. *Für irgend zwei Räume X, Y induziert die Injektion $Pi: X \times Y \to X \bar{\wedge} Y$ Monomorphismen der Homotopiemengen (zur Definition s. 1.3)*

$$(Pi)^*: \pi(X \bar{\wedge} Y, V) \to \pi(X \times Y, V)$$

für jedes V.

Satz 15. *Für irgend zwei Räume X, Y gilt*

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \bar{\wedge} Y).$$

Beweis von Satz 14. Aus Hilfssatz 13 folgt $(Qi)^* = 0$ [vgl. 3.1 A)]. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}i$ (1.12 Satz 6) ergibt sich daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 15. Aus Hilfssatz 13 folgt

$$C_{Qi} \equiv SX \vee SY \vee S(X \bar{\wedge} Y)$$

(man setze $f = Qi$ in 3.2 Satz 10). Andererseits ist $Qi \equiv P^2 i$ (1.11 Satz 5), also $C_{Qi} \equiv C_{P^2 i}$ (2.4 Satz 9) und schließlich $C_{P^2 i} \equiv S(X \times Y)$ (1.11 Satz 5).

5.2. Beweis von Hilfssatz 13. Ist $i: A \subset B$ irgendeine Injektion, so läßt sich C_i als die Teilmenge

$$\{(b, s) \mid b \in A,\ s \in I \quad \text{oder} \quad b \in B,\ s = 1\}$$

von CB auffassen (vgl. 1.4). C_i hat zwar im allgemeinen nicht die durch CB induzierte Topologie (z.B. wenn $B = I$ und A nicht abgeschlossen ist), aber

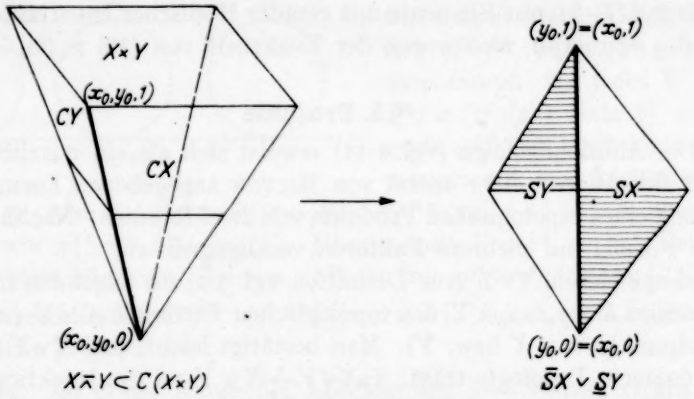


Fig. 9. Schraffierte Teile und stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

die Injektion $j: C_i \to CB$ ist jedenfalls stetig [da ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung $(A \times I) + B \to C_i$ stetig ist]. Insbesondere haben wir für $A = X \vee Y$, $B = X \times Y$ die stetige Injektion $j: X \barwedge Y \to C(X \times Y)$.

$Qi: X \barwedge Y \to SX \vee SY$ ist die natürliche Projektion, d.h.

$$(32) \qquad \begin{cases} Qi(x, y_0, s) = (x, s) \in SX, & x \in X,\ s \in I \\ Qi(x_0, y, s) = (y, s) \in SY, & y \in Y,\ s \in I \\ Qi(x, y, 1) = \text{Grundpunkt}, & x \in X,\ y \in Y \end{cases}$$

[vgl. 1.9 (3)]. Sei

$$\overline{S}X = SX/\{(x, s) \mid x \in X,\ s \leqq \tfrac{1}{2}\}$$
$$\underline{S}Y = SY/\{(y, s) \mid y \in Y,\ s \geqq \tfrac{1}{2}\}$$

(vgl. Fig. 9). Man konstruiert leicht eine Homotopie der Identität von SX, die $\{(x, s) \mid x \in X,\ s \leqq \frac{1}{2}\}$ in sich zusammenzieht, woraus nach 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion $SX \to \overline{S}X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Das gleiche zeigt man für $SY \to \underline{S}Y$, und da SX, SY in $SX \vee SY$ nur den Grundpunkt gemeinsam haben (der bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleibt), folgt: Die natürliche Projektion

$$p: SX \vee SY \to \overline{S}X \vee \underline{S}Y$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Durch die Zuordnung

$$(x, y, s) \to \begin{cases} (y, s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x, s), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

wird eine Abbildung $C(X \times Y) \to \bar{S} X \vee \underline{S} Y$ definiert (Fig. 9), deren Zusammensetzung mit der Injektion $j: X \bar{\wedge} Y \to C(X \times Y)$ gleich $p \circ Q i$ [vgl. (32)] ist. Weil $C(X \times Y)$ zusammenziehbar ist, folgt $p \circ Q i \simeq 0$ und daher — weil p eine Homotopieäquivalenz ist —: $Q i \simeq 0$.

5.3. Nach einem Vorschlag von HILTON wird

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$$

gesetzt („reduced join" bei JAMES [10] § 14). Als Grundpunkt in $X \wedge Y$ nehmen wir den Bildpunkt von $X \vee Y$ bei der Identifizierung. Das $\wedge$-Produkt ist offenbar kommutativ, jedoch im allgemeinen nicht assoziativ (vgl. 5.8). Es ist „funktoriell", d.h.

A) *$f: X \to X'$ und $g: Y \to Y'$ induzieren $f \wedge g: X \wedge Y \to X' \wedge Y'$, definiert durch* $(f \wedge g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

Aus 1.1 Hilfssatz 1 folgt:

B) *Sind $f_t: X \to X'$ und $g_t: Y \to Y'$ $(t \in I)$ Homotopien (d.h. stetig in allen Variablen), so gilt das gleiche für $f_t \wedge g_t$.*

Aus A) und B) entnimmt man leicht:

C) *Der Homotopietyp von $X \wedge Y$ hängt nur vom Homotopietyp der „Faktoren" X, Y ab.*

Beispiele:

$$\begin{cases} X \wedge S^0 = X \\ X \wedge I \ = CX \\ X \wedge S^1 = SX \end{cases} \tag{33}$$

($S^n = n$-Sphäre).

Zwischen der $\wedge$- und der $\bar{\wedge}$-Operation (vgl. 5.1) besteht ein enger Zusammenhang. Sind z.B. X und Y abzählbare CW-Komplexe (d.h. sie besitzen höchstens abzählbar viele Zellen), so ist auch $X \times Y$ ein CW-Komplex (vgl. JAMES [9] Th. 1.9 oder MILNOR [11] 2.1) und $X \vee Y$ ist ein Teilkomplex [vorausgesetzt, daß die Grundpunkte in X, Y zugleich 0-Zellen sind, vgl. Fußnote [3]), S. 307]. Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) erhält man aus 1.6 Satz 2:

$$X \wedge Y \equiv X \bar{\wedge} Y.$$

Wir werden sehen, daß das sogar unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen gilt, die nur die Umgebung der Grundpunkte betreffen und insbesondere für a l l e CW-Komplexe erfüllt sind (5.6 Satz 16).

5.4. $X \vee I$ (mit dem Grundpunkt $x_0 = 0 \in I$) ist mit X homotopieäquivalent. Nimmt man in $X \vee I$ jedoch $1 \in I \subset X \vee I$ als Grundpunkt — wir bezeichnen

den Raum dann mit $\check{X}$ —, so kann sich der Homotopietyp (im Sinne von 1.2) ändern.

Hilfssatz 14. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) $X \equiv \check{X}$.

b) *Die natürliche Projektion* $\check{X} \to X$ *(Identifizieren von* I *zu einem Punkt) ist eine Homotopieäquivalenz.*

c) *Es gibt eine Homotopie der Identität von* $\check{X}$, *die* I *in sich auf den Punkt* 1 *zusammenzieht.* ($1 \in I$ *bleibt als Grundpunkt während der Homotopie immer fest.*)

d) *Es gibt eine Umgebung* U *des Grundpunktes* x_0 *von* X, *die sich in* X *auf* x_0 *zusammenziehen läßt, und eine stetige Funktion* $u: X \to I$ *mit* $u(x_0) = 1$ *und* $u(x) = 0$ *für* $x \notin U$.

Beweis. a) folgt offenbar aus b), und b) folgt nach 1.2 Hilfssatz 3 aus c).

Sind die Abbildungen $f: \check{X} \to X$ und $g: X \to \check{X}$ homotopieinvers zueinander, so erfüllt $U = g^{-1}(I)$ die Bedingung d): Die Injektion $U \to X$ ist nullhomotop, weil sie zu $f \circ g | U$ homotop ist und $g | U \simeq 0$ gilt. Die Zusammensetzung von g mit der natürlichen Projektion $\check{X}$ $(= X \vee I) \to \check{X}/X = I$ liefert eine Funktion $u: X \to I$ mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist d) aus a) gefolgert.

Es bleibt zu zeigen: d) impliziert c). Ausgehend von U und u kann man leicht eine abgeschlossene Umgebung U' von x_0 konstruieren, die wieder die gleichen Eigenschaften hat. Man setzt etwa $U' = \{x \mid u(x) \geqq \frac{1}{2}\} \subset U$ und $u' = \mathrm{Max}(2u - 1, 0)$. Wir können daher von vornherein annehmen, daß U abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung $\varphi: U \times I \to X$ mit

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, 1) = x_0, \quad \varphi(x_0, t) = x_0 \qquad (x \in U,\ t \in I).$$

Mit ihrer Hilfe definieren wir zunächst $\varphi': U \times I \to \check{X}$ durch

$$\varphi'(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 2t) & (\in X \subset \check{X}), \quad t \leqq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & (\in I \subset \check{X}), \quad t \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x \in U,\ t \in I).$$

Setzt man

$$(h_t | X)(x) = \begin{cases} x, & x \notin U \\ \varphi'(x, t \cdot u(x)), & x \in U \end{cases}$$

$$(h_t | I)(s) = \begin{cases} s, & t \leqq \frac{1}{2} \\ 1 - (1 - s)(2 - 2t), & t \geqq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so erfüllt $h_t: \check{X} \to \check{X}$ die Bedingung c).

5.5. In Anlehnung an 5.4 treffen wir die Definition:

Der Grundpunkt x_0 *von* X *heißt nicht ausgeartet, wenn* X *die (untereinander äquivalenten) Bedingungen a) bis d) von Hilfssatz 14 erfüllt.*

Ist X ein CW-Komplex, so auch $\check{X}$ $(= X \vee I)$, und I ist ein Teilkomplex von $\check{X}$. (Das ist klar, wenn der Grundpunkt x_0 von X zugleich eine 0-Zelle der Zellenzerlegung ist. Ist das zunächst nicht der Fall, so erreicht man es

durch geeignete Unterteilung.) Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) läßt sich die natürliche Zusammenziehung von I auf den Punkt 1 zu einer Homotopie der Identität von X fortsetzen, d.h. die Bedingung c) ist erfüllt, und wir können feststellen:

A) *Kein Punkt eines CW-Komplexes ist ausgeartet.*

Aus $X \equiv X'$ folgt offenbar $\check{X} \equiv \check{X}'$; es gilt daher [vgl. 5.4a)]:

B) *Ist $X \equiv X'$, so sind die Grundpunkte von X und X' entweder beide ausgeartet oder beide nicht ausgeartet.*

Die Umgebung $U = I$ von $1 \in I < \check{X}$ erfüllt 5.4 d); folglich gilt:

C) *Der Grundpunkt von $\check{X}$ ist nicht ausgeartet (für beliebiges X).*

Da X mit $\check{X}$ frei homotopieäquivalent ist (d.h. homotopieäquivalent, wenn nicht verlangt wird, daß die Grundpunkte bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleiben sollen), folgt aus C):

D) *Zu jedem Raum gibt es einen frei homotopieäquivalenten mit nicht ausgeartetem Grundpunkt.*

Schließlich kann man zeigen:

E) *Haben die bogenweise zusammenhängenden Räume X und X' nicht ausgeartete Grundpunkte und sind sie frei homotopieäquivalent, so sind sie auch homotopieäquivalent im strengen Sinn von 1.2.*

Da diese Eigenschaft im folgenden nicht benutzt wird, führen wir den Beweis hier nicht durch. Er wird in einem Anhang (5.13) nachgeholt.

E) zeigt insbesondere, daß es im Rahmen der Homotopietheorie unwesentlich ist, welchen Punkt eines Raumes man als Grundpunkt wählt, wenn er nur nicht ausgeartet ist.

5.6. Satz 16. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist die natürliche Projektion*

$$p : X \barwedge Y \to (X \barwedge Y)/C(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$$

(vgl. 1.6 (1) und die Definitionen von $\barwedge$ und $\wedge$ in 5.1, 5.3) eine Homotopieäquivalenz.

Zusammen mit 5.1 Satz 15 ergibt das:

Folgerung. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so gilt*

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y) \tag{34}$$

(*Formel von* Hilton).

Beweis von Satz 16. Nach Voraussetzung ist $X \equiv \check{X}$, $Y \equiv \check{Y}$ [vgl. 5.4 a)]. Wir zeigen zuerst, daß die Projektion $p' : \check{X} \barwedge \check{Y} \to \check{X} \wedge \check{Y}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dazu genügt es nach 1.6 die Homotopieerweiterungseigenschaft HE für das Paar $(B, A) = (\check{X} \times \check{Y}, \check{X} \vee \check{Y})$ nachzuweisen. HE besagt, daß sich jede Abbildung $f : B \times 0 \cup A \times I \to V$ (V beliebig) mit $f(a_0 \times I) = v_0$ (a_0, v_0 = Grundpunkte von $A < B$ bzw. V) zu einer Abbildung $B \times I \to V$ fortsetzen läßt. [In

der Formulierung in 1.6 ist f durch $f(b, 0) = g_0(b)$, $f(a, t) = h_t(a)$, $b \in B$, $a \in A$, $t \in I$, gegeben.] Für $(B, A) = (\tilde{X} \times \tilde{Y}, \tilde{X} \vee \tilde{Y})$ folgt also HE aus:

Hilfssatz 15. *Für beliebige Räume X, Y gibt es eine Retraktion*

$$\varrho : \tilde{X} \times \tilde{Y} \times I \to \tilde{X} \times \tilde{Y} \times 0 \cup (\tilde{X} \vee \tilde{Y}) \times I.$$

Dieser Hilfssatz wird im folgenden Abschnitt 5.7 bewiesen.

Um das Ergebnis über p' auf p zu übertragen, betrachten wir die natürlichen Projektionen

$$p_1 : \tilde{X} \to \tilde{X}/I = X$$
$$p_2 : \tilde{Y} \to \tilde{Y}/I = Y$$

und setzen

$$q = p_1 \wedge p_2 : \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \to X \wedge Y \qquad \text{[vgl. 5.3 A)]}$$
$$\bar{q} = C(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2) : \tilde{X} \barwedge \tilde{Y} \to X \barwedge Y \qquad \text{(vgl. 2.2).}$$

[Dabei ist $p_1 \times p_2 : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ durch $(p_1 \times p_2)(x, y) = (p_1(x), p_2(y))$ definiert und $p_1 \vee p_2 = (p_1 \times p_2) | (\tilde{X} \vee \tilde{Y})$.] $\bar{q}$ wird also durch die Transformation $(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2)$ der Injektion $\tilde{X} \vee \tilde{Y} \to \tilde{X} \times \tilde{Y}$ in die Injektion $X \vee Y \to X \times Y$ induziert. Man bestätigt leicht, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \barwedge \tilde{Y} & \xrightarrow{p'} & \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \\ {\scriptstyle \bar{q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X \barwedge Y & \xrightarrow{p} & X \wedge Y \end{array} \tag{35}$$

kommutativ ist. Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 Homotopieäquivalenzen [vgl. 5.4 b)]. Aus 5.3 A) und B) folgt leicht, daß dann auch $q = p_1 \wedge p_2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Aus analogen Gründen sind $p_1 \vee p_2$ und $p_1 \times p_2$ Homotopieäquivalenzen, also nach 2.4 Hilfssatz 7 auch $\bar{q}$. Da wir von p' oben gezeigt haben, daß es eine Homotopieäquivalenz ist, folgt aus (35) das gleiche für p, und Satz 16 ist bewiesen.

Bemerkung. Wie man leicht sieht, ist $X \barwedge S^0 = CX \vee \tilde{X} \equiv \tilde{X}$ ($S^0 =$ 0-Sphäre). Andererseits gilt $X \wedge S^0 = X$. Für die Aussage:

$$X \barwedge Y \equiv X \wedge Y \text{ für alle } Y$$

ist es also auch notwendig, daß $\tilde{X} \equiv X$ ist, d.h. daß X einen nicht ausgearteten Grundpunkt hat.

5.7. Zum Beweis von Hilfssatz 15 benötigen wir:

Hilfssatz 16. *Seien X, Y irgend zwei topologische Räume, A eine kompakte Teilmenge von X und $p' : X \to X/A$ die natürliche Projektion. Dann ist $p = p' \times 1_Y : X \times Y \to X/A \times Y$ eine Identifizierung.* (Vgl. auch die Bemerkung am Schluß von 1.1.)

Beweis. p ist offenbar stetig, d.h.: Ist $B \subset X/A \times Y$ offen, so auch $p^{-1}(B)$. Es muß noch die Umkehrung gezeigt werden: Wir setzen also $p^{-1}(B)$ als offen voraus und wollen zeigen, daß B für jedes $(\bar{x}, y) \in B$ eine Umgebung ist.

1. Fall: $\bar{x} = p'(A)$: Dann ist $A \times y \subset p^{-1}(B)$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es offene Mengen $U_0 \subset X$, $V_0 \subset Y$, so daß $A \times y \subset U_0 \times V_0 \subset p^{-1}(B)$. $p'(U_0) \times V_0 \subset B$ ist dann eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$ und daher auch B selbst.

2. Fall: $\bar{x} = p'(x) \neq p'(A)$. Trivialerweise gibt es offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subset p^{-1}(B)$. $p'(U) \times V \subset B$ ist dann eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$, falls $U \cap A = \emptyset$ ist; anderenfalls folgt $(p'(A), y) \subset B$, man kann das zum 1. Fall Gesagte benutzen und erhält mit $p'(U \cup U_0) \times (V \cap V_0)$ eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$, die in B enthalten ist. In jedem Falle folgt, daß B eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$ ist.

Beweis von Hilfssatz 15. $\check{X}$ und $\check{Y}$ entstehen aus $X + I$ bzw. $Y + I$ durch Identifizieren von $x_0 \in X$ mit $0 \in I$ bzw. $y_0 \in Y$ mit $0 \in I$. Die natürlichen Abbildungen

$$(X + I) \times (Y + I) \to \check{X} \times (Y + I) \to \check{X} \times \check{Y}$$

sind nach Hilfssatz 16 ebenfalls Identifizierungen, und schließlich folgt aus 1.1 Hilfssatz 1, daß auch

$$(X + I) \times (Y + I) \times I \to \check{X} \times \check{Y} \times I \tag{36}$$

eine Identifizierung ist. Es genügt daher, die gesuchte Retraktion ϱ auf $X \times Y \times I$, $X \times I \times I$, $I \times Y \times I$ und I^3 getrennt zu definieren, wenn man nur dafür sorgt, daß sie mit der Identifizierung (36) verträglich ist.

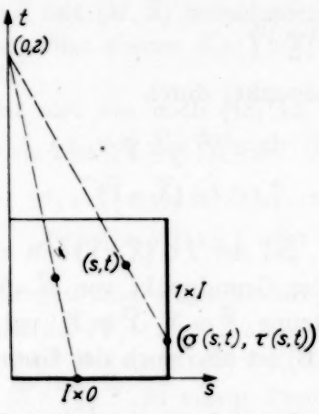


Fig. 10. Stark ausgezogen: $I \times 0 \cup 1 \times I$

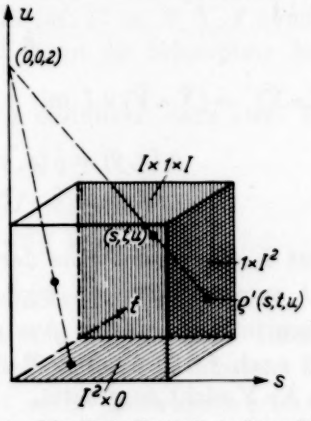


Fig. 11. Schraffiert: $I^3 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$

Seien $\sigma, \tau : I^2 \to I$ so erklärt, daß die Zuordnung

$$(s, t) \to \big(\sigma(s, t), \tau(s, t)\big), \qquad s, t \in I$$

die Zentralprojektion von I^2 auf $I \times 0 \cup 1 \times I$ vom Punkt $(0, 2)$ aus liefert (Fig. 10).

$$\varrho' : I^3 \to I^2 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$$

sei die Zentralprojektion vom Punkt $(0, 0, 2)$ aus (Fig. 11). Eine Retraktion ϱ der gesuchten Art erhält man nun durch die Festsetzung

$$\varrho(x,y,t)=\begin{cases}(x,y,0), & x\in X,\ y\in Y,\ t\in I\\ (x,\sigma(y,t),\tau(y,t)), & x\in X,\ y\in I\\ (\sigma(x,t),y,\tau(x,t)), & x\in I,\ y\in Y\\ \varrho'(x,y,t), & x\in I,\ y\in I.\end{cases}$$

5.8. Das $\wedge$-Produkt ist im allgemeinen nicht assoziativ. Bezeichnet z.B. Q den Raum der rationalen und N den der natürlichen Zahlen, so kann man $(Q\wedge Q)\wedge N$ und $Q\wedge(Q\wedge N)$ zwar als dieselbe Menge auffassen, aber die Topologien sind verschieden (vgl. BOURBAKI [2] § 9, Exerc. 11, wo ein sehr ähnliches Beispiel genannt ist). Es gilt jedoch:

Satz 17. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist auch der Grundpunkt von $X\wedge Y$ nicht ausgeartet.*

Satz 18. *Innerhalb der Klasse der Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt ist das $\wedge$-Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ.*

Beweis von Satz 17. Die Retraktion ϱ von 5.6 Hilfssatz 15 induziert eine Retraktion

$$\bar{\varrho}:(\check{X}\wedge\check{Y})\times I\to(\check{X}\wedge\check{Y})\vee I. \tag{37}$$

[Der Übergang von ϱ zu $\bar{\varrho}$ erfolgt durch die Identifizierung $\check{X}\times\check{Y}\times I\to(\check{X}\wedge\check{Y})\times I$, vgl. 1.1 Hilfssatz 1.] Definiert man

$$h_t:(\check{X}\wedge\check{Y})^{\vee}\to(\check{X}\wedge\check{Y})^{\vee}$$

$[(\check{X}\wedge\check{Y})^{\vee}=(\check{X}\wedge\check{Y})\vee I$ mit $1\in I$ als Grundpunkt] durch

$$\begin{aligned}h_t(x,y)&=\bar{\varrho}(x,y,t), && x\in\check{X},\ y\in\check{Y},\ t\in I\\ h_t(s)&=1-(1-s)(1-t), && s\in I\subset(\check{X}\wedge\check{Y})^{\vee},\end{aligned}$$

so ist h_t eine Homotopie der Identität h_0, bei der $I\subset(\check{X}\wedge\check{Y})^{\vee}$ in sich auf $1\in I$ zusammengezogen wird. Daher ist der Grundpunkt von $\check{X}\wedge\check{Y}$ nicht ausgeartet [vgl. 5.4 c)]. Aus der Voraussetzung $\check{X}\equiv X$, $\check{Y}\equiv Y$ [vgl. 5.4 a)] folgt nach 5.3 C) $\check{X}\wedge\check{Y}\equiv X\wedge Y$. Nach 5.5 B) ist also auch der Grundpunkt von $X\wedge Y$ nicht ausgeartet.

Beweis von Satz 18. Wir haben zu zeigen: $(X\wedge Y)\wedge Z\equiv X\wedge(Y\wedge Z)$ wenn X, Y, Z nicht ausgeartete Grundpunkte haben, d.h. wenn $X\equiv\check{X}$: $Y\equiv\check{Y}$, $Z\equiv\check{Z}$ ist [vgl. 5.4 a)]. Aus dieser Voraussetzung folgt nach 5.3 C): $(X\wedge Y)\wedge Z\equiv(\check{X}\wedge\check{Y})\wedge\check{Z}$. Sei M die Menge der Punkte von $(\check{X}\wedge\check{Y})\wedge\check{Z}$ und $\mathfrak{T}$ die Topologie. Aus der natürlichen Projektion $\check{X}\times\check{Y}\times\check{Z}\to M$ erhält man auf M andererseits die Identifizierungstopologie $\bar{\mathfrak{T}}$.

Unter Benutzung der obigen Retraktion $\bar{\varrho}$ [vgl. (37)] und der natürlichen Projektion $\bar{p}:(\check{X}\wedge\check{Y})\vee I\to\check{X}\wedge\check{Y}$ (Identifizieren von I zu einem Punkt) defi-

nieren wir $h_t: M \to M$ durch

$$h_t(x, y, z) = (\bar{p}\,\bar{\varrho}(x, y, t), z), \qquad x \in \check{X},\ y \in \check{Y},\ z \in \check{Z},\ t \in I.$$

Nach 5.3 B) ist h_t eine Homotopie, wenn man M mit der Topologie $\mathfrak{T}$ versieht. Nach 1.1 Hilfssatz 1 ist h_t auch eine Homotopie, wenn man auf M die Topologie $\overline{\mathfrak{T}}$ nimmt, denn h_t wird durch eine Homotopie von $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z}$ in sich induziert [gegeben durch $(x, y, z) \to (p\varrho(x, y, t), z)$, wobei ϱ die Retraktion von 5.6 Hilfssatz 15 und $p: \check{X} \times \check{Y} \times I \to \check{X} \times \check{Y}$ die natürliche Projektion ist].

Die Identität $(M, \overline{\mathfrak{T}}) \to (M, \mathfrak{T})$ ist stetig, weil ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} \to (M, \overline{\mathfrak{T}})$ stetig ist. Schließlich werden wir zeigen:

(38) $h_1: (M, \mathfrak{T}) \to (M, \overline{\mathfrak{T}})$ ist stetig.

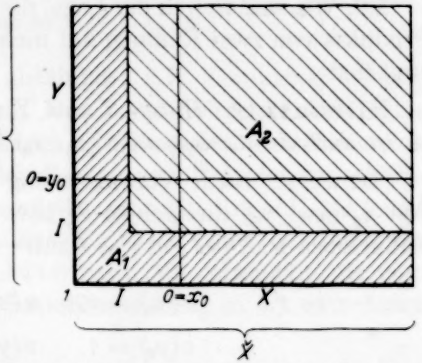


Fig. 12. Stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes: Setzt man $h_1: (M, \mathfrak{T}) \to (M, \overline{\mathfrak{T}})$ mit der Identität $(M, \overline{\mathfrak{T}}) \to (M, \mathfrak{T})$ zusammen, so ergibt sich je nach der Reihenfolge $h_1: (M, \mathfrak{T}) \to (M, \mathfrak{T})$ oder $h_1: (M, \overline{\mathfrak{T}}) \to (M, \overline{\mathfrak{T}})$. Beide Abbildungen sind vermöge h_t zur Identität h_0 homotop, also ist $(M, \mathfrak{T}) = (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$ mit $(M, \overline{\mathfrak{T}})$ homotopieäquivalent. Da $(M, \overline{\mathfrak{T}})$ in X, Y, Z symmetrisch ist, folgt ebenso $X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (M, \overline{\mathfrak{T}})$ und damit die behauptete Assoziativität.

Es ist also nur noch (38) zu beweisen. Wir definieren dazu zwei Teilmengen A_1, A_2 von $\check{X} \wedge \check{Y}$ durch (Fig. 12)

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \in I \subset \check{X},\ x \geqq \tfrac{1}{2} \text{ oder } y \in I \subset \check{Y},\ y \geqq \tfrac{1}{2}\}$$
$$A_2 = \{(x, y) \mid (x \notin I \text{ oder } x \leqq \tfrac{1}{2}) \text{ und } (y \notin I \text{ oder } y \leqq \tfrac{1}{2})\}.$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, weil ihre Urbilder in $\check{X} \times \check{Y}$ es sind. Die Projektion $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z} \to (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} = (M, \mathfrak{T})$ ist eine abgeschlossene Identifizierung (vgl. BOURBAKI [2] § 9, No. 7), weil lediglich die abgeschlossene Teilmenge $(\check{X} \wedge \check{Y}) \vee \check{Z}$ zu einem Punkt identifiziert wird. Insbesondere ist das Bild M_i von $A_i \times \check{Z}$ in M $(i = 1, 2)$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ abgeschlossen. Da M_1, M_2 ganz M überdecken, genügt es zu zeigen, daß $h_1 | M_i$ stetig ist. Für $i = 1$ ist das trivial, weil $h_1(M_1)$ nur aus dem Grundpunkt besteht (vgl. die Definition von h_t). Für $i = 2$ bemerken wir zunächst, daß M_2 als Menge mit $(A_2 \times \check{Z})/(A_2 \times \check{z}_0)$ übereinstimmt ($\check{z}_0 = 1 \in I \subset \check{Z}$ ist der Grundpunkt von $\check{Z}$). Aber auch die Topologie von $(A_2 \times \check{Z})/(A_2 \times \check{z}_0)$ stimmt sowohl mit der durch $\mathfrak{T}$ als auch mit der durch $\overline{\mathfrak{T}}$ in M_2 induzierten überein. Das folgt aus [2] § 9, Prop. 8, weil $A_2 \times \check{Z}$ eine abgeschlossene Teilmenge sowohl von $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z}$

als auch von $\check{X}\times\check{Y}\times\check{Z}$ ist (A_2 bleibt von der Identifizierung $\check{X}\times\check{Y}\to\check{X}\wedge\check{Y}$ unberührt) und weil

$$(\check{X}\wedge\check{Y})\times\check{Z}\to(M,\mathfrak{T})$$
$$\check{X}\times\check{Y}\times\check{Z}\to(M,\overline{\mathfrak{T}})$$

abgeschlossene Identifizierungen sind. $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ induzieren also in M_2 dieselbe Topologie. Weil $h_1|M_2:(M_2,\overline{\mathfrak{T}})\to(M,\overline{\mathfrak{T}})$ stetig ist, wie wir oben sahen, ist es auch $h_1|M_2:(M_2,\mathfrak{T})\to(M,\overline{\mathfrak{T}})$.

5.9. Wir sind nun in der Lage, die Formel 5.6 (34) für die Einhängung eines Produkts von zwei Räumen auf mehrere Faktoren zu verallgemeinern. Dazu zunächst:

Hilfssatz 17. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte x_0 bzw. y_0, so ist auch der Grundpunkt (x_0, y_0) von $X\times Y$ nicht ausgeartet.*

[Beweis. Nach Voraussetzung [vgl. 5.4 d)] gibt es Umgebungen U, V von x_0 bzw. y_0, die sich in X bzw. Y zusammenziehen lassen, und stetige Funktionen $u:X\to I$, $v:Y\to I$ mit

$$u(x_0)=1,\quad u(x)=0\qquad\text{für } x\notin U$$
$$v(y_0)=1,\quad v(y)=0\qquad\text{für } y\notin V.$$

Die Umgebung $W=U\times V$ von (x_0, y_0) und die durch $w(x, y)=u(x)\cdot v(y)$ definierte Funktion $w:X\times Y\to I$ leisten dann das Entsprechende für $X\times Y$.]

Seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ topologische Räume mit nicht ausgearteten Grundpunkten. [Interessiert nur der freie Homotopietyp, nicht aber der Grundpunkt, so ist das wegen 5.5 D) keine Einschränkung.] Unter Beachtung von $SX=S^1\wedge X$ [vgl. 5.3 (33)] läßt sich 5.6 (34) in der Form

$$S^1\wedge(X\times Y)\equiv(S^1\wedge X)\vee(S^1\wedge Y)\vee(S^1\wedge X\wedge Y) \tag{39}$$

schreiben. Wegen 5.8 Satz 18 ist es nicht nötig im letzten Glied weitere Klammern zu setzen. Nach Hilfssatz 17 ist (39) auf $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}$, $Y=X_n$ anwendbar und ergibt

$$S^1\wedge(X_1\times\cdots\times X_n)$$
$$\equiv\big(S^1\wedge(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\big)\vee(S^1\wedge X_n)\vee\big(S^1\wedge(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\wedge X_n\big).$$

Das ist eine Rekursionsformel zur Berechnung von $S^1\wedge(X_1\times\cdots\times X_n)$, aus der man leicht schließt — wir schreiben wieder SX für $S^1\wedge X$:

Satz 19. *Haben die Räume $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist*

$$S(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\equiv\bigvee_N S\bigwedge_{i\in N}X_i, \tag{40}$$

worin N alle nichtleeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft.

Für Sphären S^p, S^q ist $S^p \wedge S^q = S^{p+q}$. [$S^p \times S^q$ besitzt nämlich eine Zellenzerlegung, bei der das Komplement von $S^p \vee S^q$ eine einzige $(p+q)$-Zelle ist, also besteht $S^p \wedge S^q = (S^p \times S^q)/(S^p \vee S^q)$ aus einer $(p+q)$-Zelle und einer 0-Zelle.] Man erhält daher aus Satz 19:

Satz 20[6]). *Haben die Sphären S_i die Dimensionen k_i $(0 \leqq k_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n)$, so ist*

$$S(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n) \equiv \bigvee_N S_N,$$

wobei N alle nicht leeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft und S_N eine Sphäre der Dimension $1 + \sum_{i \in N} k_i$ ist.

Bemerkung. Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ abzählbare CW-Komplexe, so vereinfacht sich der Beweis von (40) erheblich. Man kommt ohne die Abschnitte 5.4 bis 5.8 aus: $\wedge$-Produkte von abzählbaren CW-Komplexen sind nämlich wieder abzählbare CW-Komplexe (vgl. den Schluß von 5.3) und das $\wedge$-Produkt ist für sie sogar streng assoziativ, weil (wie aus Milnor [*11*] 2.9 leicht folgt) die natürliche Abbildung $X \times Y \times Z \to (X \wedge Y) \wedge Z$ eine Identifizierung ist. Außerdem wird nur noch die Formel (34) bzw. (39) gebraucht, die man in diesem Fall aus 5.1 Satz 15 und der Schlußbemerkung in 5.3 entnehmen kann.

5.10. Die $\wedge$-Multiplikation mit einem festen Raum Z hat die bemerkenswerte Eigenschaft, eine Abbildungsfolge im Sinne von 1.11 (bis auf Homotopieäquivalenz) wieder in eine Abbildungsfolge überzuführen. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 18. *Für jede Abbildung $f: X \to Y$ und jeden Raum Z gibt es Homotopieäquivalenzen*

$$\varphi : C_f \wedge Z \to C_{f \wedge 1} \quad \text{und} \quad \psi : C_{f \wedge 1} \to C_f \wedge Z,$$

so daß die Diagramme

(41a)
$$\begin{array}{ccc} & & C_f \wedge Z \\ & \overset{Pf\wedge 1}{\nearrow} & \downarrow \varphi \\ Y \wedge Z & & \\ & \underset{P(f\wedge 1)}{\searrow} & \\ & & C_{f\wedge 1} \end{array}$$

(41b)
$$\begin{array}{ccc} & \overset{Pf\wedge 1}{\nearrow} & C_f \wedge Z \\ & & \uparrow \psi \\ Y \wedge Z & & \\ & \underset{P(f\wedge 1)}{\searrow} & \\ & & C_{f\wedge 1} \end{array}$$

kommutativ sind. 1 bezeichnet dabei die Identität $1 = 1_Z : Z \to Z$.

Satz 21. *Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$ (vgl. 1.11) ist mit der Folge*

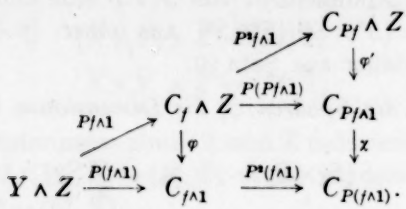
$$\mathfrak{A} f \wedge 1_Z : X \wedge Z \overset{f\wedge 1}{\dashrightarrow} Y \wedge Z \overset{Pf\wedge 1}{\longrightarrow} C_f \wedge Z \overset{Qf\wedge 1}{\longrightarrow} SX \wedge Z \overset{Sf\wedge 1}{\longrightarrow} SY \wedge Z \to \cdots$$

homotopieäquivalent.

Hilfssatz 18 wird in 5.12 bewiesen.

[6]) Dieser Satz wurde mit anderen Methoden zuerst von K. A. Hardie bewiesen und mir durch P. Hilton brieflich mitgeteilt.

Beweis von Satz 21. Wir ergänzen das Diagramm (41a) zu

(42)


Darin ist φ' eine zu φ analoge Homotopieäquivalenz mit Pf an Stelle von f. $\chi = C(1_{Y\wedge Z}, \varphi)$ wird durch die Transformation $(1_{Y\wedge Z}, \varphi)$ von $Pf\wedge 1$ in $P(f\wedge 1)$ induziert (vgl. 2.2), ist also auch eine Homotopieäquivalenz (2.4 Hilfssatz 7). Man entnimmt daher aus (42), daß nicht nur

$$[f\wedge 1, Pf\wedge 1] \equiv [f\wedge 1, P(f\wedge 1)]$$

ist, wie schon aus (41a) hervorgeht, sondern sogar

$$[f\wedge 1, Pf\wedge 1, P^2 f\wedge 1] \equiv [f\wedge 1, P(f\wedge 1), P^2(f\wedge 1)]$$

(vgl. 1.2 zur Definition der Homotopieäquivalenz zwischen Folgen von Abbildungen). Analog schließt man weiter und erhält

$$\mathfrak{P} f\wedge 1_Z \equiv \mathfrak{P}(f\wedge 1_Z) \tag{43}$$

(zur Definition von $\mathfrak{P} f$ vgl. 1.11). Nach 1.11 Satz 5 ist $\mathfrak{P} f \equiv \mathfrak{A} f$ und $\mathfrak{P}(f\wedge 1_Z) \equiv \mathfrak{A}(f\wedge 1_Z)$. Aus ersterem gewinnt man $\mathfrak{P} f\wedge 1_Z \equiv \mathfrak{A} f\wedge 1_Z$ durch $\wedge$-Multiplikation aller vorkommenden Abbildungen mit 1_Z. Also folgt aus (43)

$$\mathfrak{A} f\wedge 1_Z \equiv \mathfrak{A}(f\wedge 1_Z)$$

und damit Satz 21.

Bemerkungen. 1. Nach Satz 21 ist insbesondere $S(X\wedge Z) \equiv SX\wedge Z$, d.h. [vgl. 5.3 (33)]

$$S^1\wedge(X\wedge Z) \equiv (S^1\wedge X)\wedge Z$$

ohne jede Voraussetzung über X und Z (vgl. im Gegensatz dazu 5.8). Entscheidend für dieses besondere Verhalten, das mit Hilfssatz 16 zusammenhängt, ist die Kompaktheit von S^1.

2. Mit $\bar\wedge$ an Stelle von $\wedge$ wäre Satz 21 im allgemeinen falsch. Insbesondere ist nicht immer $S(X\,\bar\wedge\, Z) \equiv SX\,\bar\wedge\, Z$. Gegenbeispiel: $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\right\} \cup \{0\}$ mit 0 als Grundpunkt, $Z = S^0$.

5.11. Induziert $f: X \to Y$ Monomorphismen $f^*: \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ für jeden Bildraum V, so ist wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} f$ (1.12 Satz 6) $(Pf)^* = 0$ für alle V und daher $Pf \simeq 0$ [vgl. 3.1 A)]. Dann ist auch $Pf\wedge 1_Z \simeq 0\wedge 1_Z = 0$ für alle Z. (0 bezeichnet darin die konstante Abbildung, die den ganzen Urbildraum in den Grundpunkt des Bildraumes überführt.) Wegen $Pf\wedge 1_Z \equiv P(f\wedge 1_Z)$ (5.10 Satz 21) folgt $P(f\wedge 1_Z) \simeq 0$. Also ist $(P(f\wedge 1_Z))^* = 0$, und mit Hilfe der Exaktheit von $\mathfrak{A}(f\wedge 1_Z)$ schließt man auf die Monomorphie von $(f\wedge 1_Z)^*$.

Etwas allgemeiner betrachten wir $f\wedge f' : X\wedge X' \to Y\wedge Y'$ (mit $f' : X' \to Y'$). Wegen $f\wedge f' = (f\wedge 1_{Y'})\circ(1_X \wedge f')$ erhält man durch zweimalige Anwendung dieser Schlußweise:

Satz 22. *Induzieren $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ Monomorphismen der Homotopiemengen $f^* : \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$, $f'^* : \pi(Y', V) \to \pi(X', V)$ (zur Definition s. 1.3) für jeden Bildraum V, so ist auch $(f\wedge f')^*$ monomorph.*

Eine Anwendung dieses Satzes in Verbindung mit 5.1 Satz 14 werden wir im zweiten Teil der Arbeit angeben (vgl. [12] 6.4 Satz 4).

5.12. Beweis von Hilfssatz 18. Der Grundgedanke des Beweises ist ähnlich wie bei 5.8 Satz 18.

Wie in 3.6 sei $\widetilde{C}X = (X\times I)/(X\times 0)$ und $\widetilde{C}_f$ entstehe aus $\widetilde{C}X + Y$ durch die Identifizierungen

$$\widetilde{C}X \ni (x, 1) = f(x) \in Y \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist offenbar (vgl. 1.4)

$$C_f = \widetilde{C}_f/\{(x_0, s)\,|\,s\in I\}. \tag{44}$$

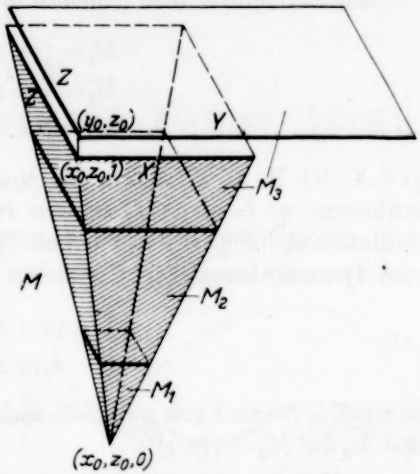


Fig. 13. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen. Die schraffierten Teile stehen für die „vertikale" Strecke I_0

Sei M die Menge der Punkte von $\widetilde{C}_{f\wedge 1}$ ($1 = 1_Z : Z \to Z$) und $\mathfrak{T}_2$ die Topologie. M kann man auch aus $\widetilde{C}_f \times Z$ durch die Identifizierungen

$$(x_0, z, s) = (x, z_0, s)^7) \qquad \text{für alle } x\in X,\ z\in Z,\ s\in I$$
$$(y_0, z) = (y, z_0) \qquad \text{für alle } y\in Y,\ z\in Z$$

erhalten (Fig. 13). $\mathfrak{T}_1$ sei die Identifizierungstopologie. Mit der Abkürzung

$$I_0 = \{(x_0, z_0, s)\,|\,s\in I\} < M$$

gilt

$$(M, \mathfrak{T}_1)/I_0 = C_f \wedge Z, \tag{45}$$

$$(M, \mathfrak{T}_2)/I_0 = C_{f\wedge 1}. \tag{46}$$

(46) geht aus (44) hervor, wenn man f durch $f\wedge 1$ ersetzt. Beweis von (45) Mit der natürlichen Projektion $p : \widetilde{C}_f \to C_f$ [vgl. (44)] ist auch $p\times 1_Z : \widetilde{C}_f \times Z \to C_f \times Z$ eine Identifizierung, weil bei p lediglich eine kompakte Teilmenge von $\widetilde{C}_f$ zu einem Punkt identifiziert wird (5.7 Hilfssatz 16). $C_f \wedge Z$ trägt daher die Identifizierungstopologie bezüglich

$$\widetilde{C}_f \times Z \xrightarrow{p\times 1} C_f \times Z \longrightarrow C_f \wedge Z.$$

---

7) Die Punkte von $\widetilde{C}_f \times Z$ müßten eigentlich mit (x, s, z) bzw. (y, z) ($x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$, $s\in I$) bezeichnet werden. Um die Übereinstimmung mit M zu erreichen, haben wir hier (x, s, z) durch (x, z, s) ersetzt.

Hierbei werden im Endglied dieselben Punkte gleichgesetzt wie bei

$$\widetilde{C}_f \times Z \longrightarrow (M, \mathfrak{T}_1) \longrightarrow (M, \mathfrak{T}_1)/I_0$$

(natürliche Projektionen). Da es sich wieder um Identifizierungen handelt, folgt (45).

Wir betrachten nun folgende drei Teilmengen von M (vgl. Fig. 13):

$$M_1 = \{(x, z, s) \mid s \leqq \tfrac{1}{4}\}$$
$$M_2 = \{(x, z, s) \mid \tfrac{1}{4} \leqq s \leqq \tfrac{3}{4}\}$$
$$M_3 = \{(x, z, s) \mid s \geqq \tfrac{3}{4}\} \cup \{(y, z)\}$$

($x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $s \in I$). Sie sind in beiden Topologien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ abgeschlossen. $\eta_t : I \to I$ ($t \in I$) sei eine Homotopie der Identität η_0 von I, die das Teilintervall $[0, \frac{1}{4}] < I$ auf 0 und $[\frac{3}{4}, 1] < I$ auf 1 (unter Festhaltung von 0 und 1) zusammenzieht. Definieren wir $h_t : M \to M$ durch

$$(47) \qquad \begin{cases} h_t(x, z, s) = (x, z, \eta_t(s)) \\ h_t(y, z) = (y, z), \end{cases}$$

so zieht h_t (wenn t von 0 nach 1 läuft) M_1 auf den Punkt $(x_0, z_0, 0)$ zusammen und M_3 auf $M_3' = \{(y, z)\}$.

1.1 Hilfssatz 1 liefert: h_t ist eine Homotopie von $(M, \mathfrak{T}_i)$ in sich für $i = 1, 2$. Wir werden ferner zeigen:

(48) *$\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ induzieren sowohl in M_2 als auch in M_3' dieselbe Topologie.*

Daraus folgt, daß h_1 auch als Abbildung von $(M, \mathfrak{T}_1)$ in $(M, \mathfrak{T}_2)$ und von $(M, \mathfrak{T}_2)$ in $(M, \mathfrak{T}_1)$ stetig ist; denn diese Abbildungen sind auf den drei abgeschlossenen Teilmengen M_1, M_2, M_3, die M überdecken stetig: $h_1(M_1)$ ist ein einziger Punkt, auf M_2 sind die Topologien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gleich, und M_3 wird durch h_1 in M_3' abgebildet, wo $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ebenfalls gleich sind.

Da h_1 die Teilmenge I_0 in sich abbildet, induziert h_1 stetige Abbildungen

$$\varphi : C_f \wedge Z \to C_{f \wedge 1}$$
$$\psi : C_{f \wedge 1} \to C_f \wedge Z$$

[vgl. (45), (46)]. $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ werden durch $h_1 \circ h_1 : (M, \mathfrak{T}_i) \to (M, \mathfrak{T}_i)$ mit $i = 1$ bzw. 2 induziert. Vermöge $h_t \circ h_t : (M, \mathfrak{T}_i) \to (M, \mathfrak{T}_i)$ ist $h_1 \circ h_1 \simeq h_0 \circ h_0 = 1_M$ (bezüglich $\mathfrak{T}_i$). Wegen $h_t(I_0) < I_0$ ist $h_t \circ h_t$ mit dem Identifizieren von I_0 zu einem Punkt verträglich und liefert (vgl. 1.1 Hilfssatz 1)

$$\psi \circ \varphi \simeq 1, \qquad \varphi \circ \psi \simeq 1.$$

Nach Konstruktion von φ und ψ [vgl. (47)] sind die Diagramme (41a) und (41b) von Hilfssatz 18 kommutativ.

Es ist also nur noch (48) zu beweisen: Wie man (unter Benutzung der Stetigkeit von f) leicht bestätigt, wird Y bei der Identifizierung $\widetilde{C}X + Y \to \widetilde{C}_f$ topologisch auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\widetilde{C}_f$ abgebildet, die wir mit

Y identifizieren. Auf $f \wedge 1$ angewandt, besagt das:

$$(M_3', \mathfrak{T}_2) = Y \wedge Z.$$

Andererseits ist $Y \times Z$ ein abgeschlossener Teilraum von $\widetilde{C}_f \times Z$ (mit der induzierten Topologie), der bezüglich der Identifizierung $\widetilde{C}_f \times Z \to (M, \mathfrak{T}_1)$ saturiert[8]) ist. Daraus folgt nach BOURBAKI [2] § 9, No. 5, Corr. 1, daß $(M_3', \mathfrak{T}_1)$ durch Identifizieren aus $Y \times Z$ entsteht, d.h.

$$(M_3', \mathfrak{T}_1) = Y \wedge Z.$$

Der Beweis für M_2 verläuft analog: Mit der Abkürzung $I' = \{s \mid s \in I, \frac{1}{4} \leqq s \leqq \frac{3}{4}\}$ ist offenbar

$$(M_2, \mathfrak{T}_2) = (X \wedge Z) \times I'.$$

Andererseits ist $X \times Z \times I'$ ein abgeschlossener Teilraum von $\widetilde{C}_f \times Z$[9]), der bezüglich der Identifizierung $\widetilde{C}_f \times Z \to (M, \mathfrak{T}_1)$ saturiert ist, und daraus folgt, daß $(M_2, \mathfrak{T}_1)$ durch Identifizieren aus $X \times Z \times I'$ entsteht, d.h. (unter Beachtung von 1.1 Hilfssatz 1)

$$(M_2, \mathfrak{T}_1) = (X \wedge Z) \times I'.$$

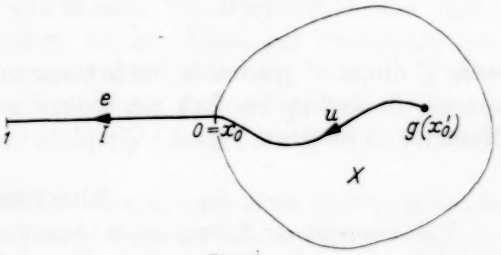


Fig. 14

5.13. Anhang. Beweis von 5.5 E). Seien $f: X \to X'$, $g: X' \to X$ frei homotopieinvers zueinander. Wir werden f zu einer gebundenen Homotopieäquivalenz $\check{f}: \check{X} \to \check{X}'$ fortsetzen. Wegen der Voraussetzung $X \equiv \check{X}$, $X' \equiv \check{X}'$ [vgl. 5.4 a)] genügt das zum Beweis von 5.5 E).

Seien $u: I \to X$, $v: I \to X'$ Wege, die $g(x_0')$ mit x_0 bzw. $f(x_0)$ mit x_0' verbinden (x_0, x_0' = Grundpunkte von X bzw. X', vgl. Fig. 14, die den ersten der beiden Fälle veranschaulicht). $e: I \to I$ sei die Identität. Wie üblich wird die Zusammensetzung $w \cdot w'$ zweier Wege w, w' [falls $w(1) = w'(0)$] durch

$$(w \cdot w')(s) = \begin{cases} w(2s), & s \leqq \frac{1}{2} \\ w'(2s-1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (s \in I)$$

und der inverse Weg w^{-1} durch

$$w^{-1}(s) = w(1-s), \qquad s \in I$$

definiert. Fortsetzungen $\check{f}: \check{X} \to \check{X}'$, $\check{g}: \check{X}' \to \check{X}$ von f bzw. g, die Grundpunkte in Grundpunkte abbilden, erhält man nun, wenn man

$$\check{f} \mid I = v \cdot e, \qquad \check{g} \mid I = u \cdot e$$

setzt (Fig. 14).

[8]) Eine Menge $A \subset X$ heißt *saturiert* bezüglich der Identifizierung $p: X \to \overline{X}$, wenn $p^{-1}(p(A)) = A$ ist.

[9]) Statt $X \times Z \times I'$ müßte es eigentlich $X \times I' \times Z$ heißen, vgl. aber Fußnote[7]), S. 341.

Nach Voraussetzung bestehen die freien Homotopien $g \circ f \simeq 1_X$ und $f \circ g \simeq 1_{X'}$. Die Grundpunkte x_0 bzw. x_0' mögen bei diesen Homotopien die Wege w bzw. w' durchlaufen. Kann man u und v so wählen, daß der Weg

$$\check{g} \circ \check{f} \,|\, I = (\check{g} \circ v) \cdot (\check{g} \circ e) = (g \circ v) \cdot (u \cdot e)$$

mit $w \cdot e$, d.h. $(g \circ v) \cdot u$ mit w homotop ist (Fig. 15), so läßt sich die freie Homotopie $g \circ f \simeq 1_X$ zu einer gebundenen Homotopie $\check{g} \circ \check{f} \simeq 1_{\check{X}}$ fortsetzen.

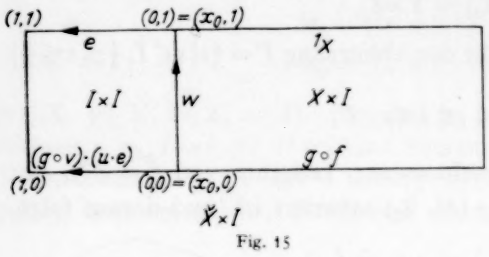


Fig. 15

Analog erhält man $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$, wenn $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$ ist.

Wir wählen nun für u irgendeinen Weg von $g(x_0')$ nach x_0. Dann setzen wir $v = (f \circ u)^{-1} \cdot w'$, wodurch $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$ und daher $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$ erfüllt wird. Dann setzen wir $u' = (g \circ v)^{-1} \cdot w$ und erhalten $(g \circ v) \cdot u' \simeq w$, also $\check{g}' \circ \check{f} \simeq 1_{\check{X}}$, wenn $\check{g}'$ die zu u' gehörende Fortsetzung von g bezeichnet. $\check{f}$ besitzt demnach sowohl ein Rechts- als auch ein Links-Homotopieinverses und ist daher eine Homotopieäquivalenz [vgl. 2.5 C)].

Literatur

[1] BARRATT, M. G.: Track groups I. Proc. London Math. Soc. (3) **5**, 71–106 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I, Structures topologiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. X, Espaces fonctionnels. Paris 1949. — [4] EILENBERG, S.: On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. **32**, 167–175 (1939). — [5] EILENBERG, S., and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952. — [6] HILTON, P. J.: An introduction to homotopy theory. Cambridge Univ. Press 1953. — [7] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637–665 (1931). — [8] FOX, R. H.: On homotopy type and deformation retracts. Ann. of Math. **44**, 40–50 (1943). — [9] JAMES, I. M.: Reduced product spaces. Ann. of Math. **62**, 170–197 (1955). — [10] JAMES, I. M.: On the suspension triad. Ann. of Math. **63**, 191–247 (1956). — [11] MILNOR, J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. **63**, 272–284 (1956). — [12] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen II. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in Math. Z. **69**, Schlußheft (1958). — [13] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934. — [14] SERRE, J. P.: Sur la suspension de Freudenthal. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1340–1342 (1952). — [15] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [16] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460–475 (1946). — [17] WHITEHEAD, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. Ann. of Math. **51**, 192–237 (1950). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: On adding relations to homotopy groups. Ann. of Math. **42**, 409–428 (1941). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213–245 (1949). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On certain theorems of G. W. WHITEHEAD. Ann. of Math. **58**, 418–428 (1953).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 345 (1958)

Eine Distributivitätseigenschaft konjugierter Untergruppen

Von

HELMUT WIELANDT

OTTO GRÜN zum 70. Geburtstag am 26. Juni 1958 gewidmet

Herr GRÜN hat die folgende Vermutung ausgesprochen und in abgeschwächter Form bewiesen[1]): *Wenn in der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{H}$ mit ihrem Normalisator $N(\mathfrak{H})$ übereinstimmt und wenn alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die auch in zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen liegen, in einem Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ enthalten sind, so gibt es in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit den Eigenschaften* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Kürzlich ist mit Hilfe der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere bestätigt worden, daß diese Vermutung ohne Einschränkung richtig ist[2]). Daraus ergibt sich ein bemerkenswert voraussetzungsarmer Satz über Durchschnittsbildung $\cap$ und Erzeugnisbildung $\cup$ bei konjugierten Untergruppen:

Es seien $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ die sämtlichen Konjugierten einer Untergruppe von endlichem Index n in einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ (so daß jede von ihnen $N(\mathfrak{H}_1):\mathfrak{H}_1$-mal auftritt). Dann ist

$$\mathfrak{H}_1 \cap \bigcup_{\beta \neq \gamma}^{1 \ldots n} (\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma) = \bigcup_{\gamma=2}^{n} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_\gamma).$$

Beweis. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller n Konjugierten ist normal und von endlichem Index in $\mathfrak{G}$; daher können wir durch Übergang zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{G}$ endlich ist. Ferner können wir $\mathfrak{H}_1 = N(\mathfrak{H}_1)$ annehmen; denn sonst stimmt offenbar die linke Seite $\mathfrak{L}$ wie die rechte Seite $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{H}_1$ überein. Nun erfüllen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{N}$ die Voraussetzungen des erwähnten Satzes. Es gibt also einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Dieser enthält alle Durchschnitte $G^{-1}(\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_\gamma)G$ $(\gamma \neq 1,\ G \in \mathfrak{G})$, also enthält er alle Durchschnitte $\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma$ $(\beta \neq \gamma)$ und damit auch deren Erzeugnis $\mathfrak{F}$. Nun folgt $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Die Umkehrung $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$ ist trivial.

Die bewiesene Gleichung ergibt nach leichter Umformung eine merkwürdige *Distributivitäts-Aussage für die n Konjugierten $\mathfrak{H}_\alpha$ einer Untergruppe vom Index n:*

$$\mathfrak{H}_\alpha \cap \bigcup_{\beta \neq \gamma} (\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma) = \bigcup_{\beta \neq \gamma} (\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma).$$

[1]) GRÜN, O.: Beiträge zur Gruppentheorie II. J. reine angew. Math. **186**, 165–169 (1948).

[2]) WIELANDT, H.: Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen. Math. Nachr. **18**, 274—280 (1958).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. März 1958)

KRABBE, G. L.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 346–350 (1958)

Convolution Operators which are not of Scalar Type

By
G. L. KRABBE

1. Introduction. This note is to be followed by an article which attempts to extend the scope of the Spectral Theorem beyond DUNFORD's class of scalar type operators. Additional motivation for such an extension is presented here. Let $G=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ and let T be a bounded operator on $l_p=L^p(G)$, $1<p\neq 2$; consider the relation

$$T=\int \lambda \cdot E(d\lambda), \tag{1}$$

where E is a projector-valued, finitely additive set function. To DUNFORD is due the theory of spectral operators (see § 3 and [1]); T is said to be of "scalar type" if it is a spectral operator satisfying (1), where E is the resolution of the identity for T (see [1, p. 325]). To any "uniformly bounded transformation" (in the sense of LORCH [6, 5]) corresponds a family $\{E_\lambda : \lambda\}$ of projectors; the question of the existence of a relation of type (1) for such operators T has not yet been settled [6, pp. 263–264].

Set $\alpha=\pm 1$, and let $\tau_\alpha x$ be the translate $\{x_{n+\alpha}\}_{n\in G}$ of the sequence $x=\{x_n\}_{n\in G}$. It will be shown that the operator $x\to\tau_\alpha x$ defined on l_p is not a scalar type operators, although it is a uniformly bounded transformation of the simplest kind. Furthermore, it turns out that the Hilbert-transformation H defined on l_p by the matrix

$$\left(\frac{1}{n-\nu}\right)_{(n,\nu)\in G\times G}$$

is not of scalar type either.

Nevertheless, both H and τ_α belong to a class of convolution operators T which satisfy (1) [1]; this will be established in the subsequent article (in preparation).

2. Preliminaries. If B is a bounded and measurable function on $S=[0,1]$, then YB will denote the sequence $\{[YB]_n\}_{n\in G}$ defined by

$$[YB]_n=\int_0^1 e^{-2\pi i n\vartheta} B(\vartheta)\, d\vartheta.$$

As usual, $\|a\|_p=(\sum|a_n|^p)^{1/p}$, $n\in G$. Let $\mathfrak{C}$ be the Banach algebra of all continuous functions defined on S, with the topology of the norm $B\to\|B\|_\infty=\sup\{|B(\vartheta)|:\vartheta\in S\}$. Let $\mathfrak{P}$ be the set of all polynomials defined on S.

[1] Provided that (1) is interpreted in the weak topology.

2.1. LEMMA. *Suppose* $1<u<2$. *There does not exist a number* $k_u>0$ *such that*

$$\|YB\|_u \leqq k_u \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}. \tag{2}$$

PROOF. By way of contradiction, suppose that (2) holds. Then Y is a bounded linear mapping of $\mathfrak{P}$ into l_u. Since $\mathfrak{P}$ is dense in $\mathfrak{C}$, then Y admits a unique continuous extension F which maps $\mathfrak{C}$ into l_u. But Y is defined on $\mathfrak{C}$, and therefore $F=Y$, whence $Y(\mathfrak{C})\subset l_u$. This gives a contradiction, since there exists a function f in $\mathfrak{C}$ such that $\|Yf\|_u=\infty$ [8, p. 190, (i)].

2.2. DEFINITIONS. The letter p is fixed throughout; $1<p\neq 2$ and $p\neq\infty$. Suppose that B is of finite variation on S, and let $B_{\#p}$ denote the operator $x\to x\ast(YB)$ defined on l_p. More precisely: if $x=\{x_\nu\}_{\nu\in G}$, then $B_{\#p}x=\{b_n\}_{n\in G}$, where

$$b_n=\sum_{\nu\in G} x_\nu [YB]_{n-\nu}.$$

If $n\in G$, let I^n be the function defined on S by $I^n(\vartheta)=\vartheta^n$; thus $I^0(\vartheta)=1$ and $I^1(\vartheta)=\vartheta$. We shall write $J=(I^1)_{\#p}$. If $H=-2\pi i J$, then $Hx=\{[Hx]_n\}_{n\in G}$ for x in l_p, where

$$[Hx]_n=\sum_{n\in G} x_\nu \frac{1}{n-\nu} \qquad (\nu\neq n).$$

2.3. NOTATION. The Banach algebra of all bounded operators on l_p is denoted $\mathfrak{E}_p$; its topology is defined by the norm $T\to|T|_p$. The identity-operator $\boldsymbol{I}$ satisfies $\boldsymbol{I}x=x$ for all x in l_p.

2.4. LEMMA. *If* $B\to B(J)$ *is a continuous homomorphism of* $\mathfrak{P}$ *into* $\mathfrak{E}_p$ *such that* $I^0(J)=\boldsymbol{I}$, *then* $I^1(J)\neq J$.

PROOF. By hypothesis, there exists a number $k_p>0$ such that

$$|B(J)|_p \leqq k_p \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}. \tag{3}$$

By way of contradiction, assume $I^1(J)=J$. If $B\in\mathfrak{P}$, then $B=\sum\alpha_n I^n$, and $B(J)=\sum\alpha_n I^n(J)=\sum\alpha_n J^n$. But $B\to B_{\#p}$ is a homomorphism on $\mathfrak{P}$ (see [4, § 3.2]); therefore $B_{\#p}=\sum\alpha_n J^n$ and $B_{\#p}=B(J)$. For any $u=p$, it thus follows from (3) that

$$|B_{\#u}|_u \leqq k_p \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}. \tag{4}$$

If $P\in\mathfrak{P}$, define $B(\vartheta)=P(1-\vartheta)$. It has been proved in [3, § 5.3] that $P_{\#p'}=(B_{\#p})^*$, where $p'=p/(p-1)$. Accordingly, if we use (4) with $u=p'$:

$$|P_{\#p'}|_{p'}=|B_{\#p}|_p \leqq k_p\|B\|_\infty = k_p\|P\|_\infty \quad (\text{when } P\in\mathfrak{P}).$$

The first equality follows from $|T|_{p'}=|T^*|_p$ (see [7, p. 169]). Therefore (4) holds for both $u=p$ and $u=p'$. Hence, if $u=\min\{p,p'\}$, then

$$\|B_{\#u}x\|_u \leqq k_p\|x\|_u\|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}. \tag{5}$$

Choose $x=\{\delta_n^0\}_{n\in G}$ (where δ_n^0 is the Kronecker delta) and note that $B_{\#u}x=x\ast(YB)=YB$ and $\|x\|_u=1$. From (5) therefore follows that $\|YB\|_u\leqq k_p\|B\|_\infty$, which contradicts 2.1.

3. Some results of Dunford. The terminology in this paragraph comes from [1]. Set $\mathfrak{X}=l_p$ and consider a manifold Γ which is total in $\mathfrak{X}^*$. Let M be a compact subset of the plane. Let $\mathscr{B}=\mathscr{B}_M$ denote the σ-ring of subsets of M, and let $\mathscr{B}(M)$ be the space of all bounded complex-valued functions on M which are $\mathscr{B}$-measurable; $\mathscr{B}(M)$ is normed by $F\to\sup\{|F(m)|:m\in M\}$. If E is a spectral measure of class $(\mathscr{B},\Gamma)$, then the integral

$$\int_M f(m)\,E(dm)$$

can be defined [1, p. 341]; it will be denoted $f(M,E)$, although Dunford writes it $S(f)$.

3.1. LEMMA. *The mapping $f\to f(M,E)$ is a continuous homomorphism of $\mathscr{B}(M)$ into $\mathfrak{E}_p$ (see [1, pp. 341—342]). Note that $I^0(M,E)=\boldsymbol{I}$.*

3.2. REMARKS. If T is a spectral operator of class $(\mathscr{B},\Gamma)$ (see [1, p. 325]), then there exists a unique spectral measure E of class $(\mathscr{B},\Gamma)$ commuting with T and which is such that

(i) $$\sigma\big(T|E(a)\mathfrak{X}\big)\subset\text{closure }(a)\qquad\text{for any } a \text{ in } \mathscr{B}.$$

Here $T|E(a)\mathfrak{X}$ denotes the restriction of T to the range of $E(a)$, while $\sigma(T)=$spectrum of T. The unique such spectral measure ("*resolution of the identity*" for T) will be denoted E^T. From [1, p. 325, Theorem 1] follows immediately that

(ii) $$E^T\big(a\cap\sigma(T)\big)=E^T(a)\qquad\text{for any } a \text{ in } \mathscr{B}.$$

3.3. LEMMA. If T is a scalar type operator of class (Γ) (see [1, p. 332]), then it is easily shown that $I^1\big(\sigma(T),E^T\big)=T$. In view of 3.1, we see that

(iii) *the mapping $f\to f\big(\sigma(T),E^T\big)$ is a continuous homomorphism of $\mathscr{B}\big(\sigma(T)\big)$ into $\mathfrak{E}_p$ such that $I^0\big(\sigma(T),E^T\big)=\boldsymbol{I}$ and $I^1\big(\sigma(T),E^T\big)=T$.*

Suppose that $f\in\mathscr{B}\big(\sigma(T)\big)$, and write $(f\in a)=\big\{m\in\sigma(T):f(m)\in a\big\}$. From [1, pp. 341—342], we see that

(iv) *the operator $Q=f\big(\sigma(T),E^T\big)$ is a scalar type operator of class (Γ), and E^Q is defined on the ring $\mathscr{B}_0$ of Borel sets of the plane by the relation $E^Q(a)=E^T(f\in a)$.*

4. The main results. As before, Γ is an arbitrary manifold which is total in $\mathfrak{X}^*$, and $\mathfrak{X}=l_p$. Let $\mathfrak{S}(\Gamma)$ be the set of all the members of $\mathfrak{E}_p$ which are scalar type operators of class (Γ). If the operator J (defined in 2.2) belongs to $\mathfrak{S}(\Gamma)$, then the mapping $f\to f\big(\sigma(J),E^J\big)$ is a homomorphism of $\mathfrak{P}$ into $\mathfrak{E}_p$ which [in view of (iii)] contradicts the conclusion of 2.4. Thus

(a) $$J\notin\mathfrak{S}(\Gamma).$$

Let $\tau_1=U$ be the operator defined in § 1; it is easily seen that $U=\Phi_{\#p}$, where $\Phi(\vartheta)=\exp(-2\pi i\vartheta)$. If $R\in\mathfrak{E}_p$, then we define

(6) $$\Phi(R)=\exp(-2\pi iR)=\lim\sum_{\nu=0}^{m}(-2\pi iR)^\nu/\nu!,\qquad m\to\infty,$$

the limit being taken in the topology of $\mathfrak{E}_p$.

4.1. LEMMA. *Suppose that* $R_1 \in \mathfrak{E}_p$. *If* $\sigma(R_1) < [0, 1]$ *and* $\Phi(R_1) = U$, *then* $R_1 = J$.

PROOF. Since $f \to f_{\#p}$ is a homomorphism of $\mathfrak{P}$ into $\mathfrak{E}_p$, it follows easily that $\sigma(f_{\#p})$ is included in the range of f (see [4, § 3.2 and § 4.2]); but $J = (I^1)_{\#p}$, and therefore $\sigma(J) < [0, 1]$. Now $U = \Phi_{\#p}$, and from [4, § 5.1] follows that $U = \Phi(J)$. Set $R_2 = J$, $n = 1, 2$. Hence $\sigma(R_n) < [0, 1]$ and $\Phi(R_n) = U$. Next, note that $\exp(i T_n) = iU$ when $T_n = -2\pi R_n + \pi \boldsymbol{I}$. Since $U = \tau_1$, we have $|(iU)^k|_p = |U^k|_p = 1$ when $k \in G$; therefore iU is uniformly bounded [2]. Finally, $\sigma(T_n) < [-\pi, \pi]$ (using $\sigma[f(R_n)] = f[\sigma(R_n)]$; see [2, § 6.2]), and since $iU = \exp(i T_n)$, it can be inferred from [2, Theorem VI] that $T_1 = T_2$, whence $R_1 = R_2$. This concludes the proof; note that iU has no point spectrum, since $iU = (i\Phi)_{\#p}$ and [4, § 7.1].

4.2. THEOREM. $\tau_1 \notin \mathfrak{S}(\Gamma)$.

PROOF. Suppose $\tau_1 = U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. It is easy to see that $\sigma(U) = K = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ (see [4, § 6.3]). Let φ denote the one-to-one mapping $\vartheta \to \Phi(\vartheta)$ of $M = \{\vartheta : 0 \leqq \vartheta < 1\}$ onto K, and let ψ be the inverse of φ:

$$(\psi \in M) = K \quad \text{and} \quad (\psi \in (\varphi \in a)) = a \cap K. \tag{7}$$

Since $\psi \in \mathscr{B}(K)$, it follows from (iv) that $\psi(K, E^U)$ is an operator R such that

$$R \in \mathfrak{S}(\Gamma) \quad \text{and} \quad E^R(b) = E^U(\psi \in b) \quad \text{for all } b \text{ in } \mathscr{B}_0. \tag{8}$$

Setting $b = M$, we obtain $E^R(M) = E^U(\sigma(U)) = \boldsymbol{I}$ from (8), (7), and [1, Theorem 1]. From (i) therefore follows

$$\sigma(R) < [0, 1]. \tag{9}$$

Since $\varphi \in \mathscr{B}(\sigma(R))$, we see from (iv) that $\varphi(\sigma(R), E^R)$ is a member V of $\mathfrak{S}(\Gamma)$ which satisfies the relations

$$E^V(a) = E^R(\varphi \in a) = E^U(\psi \in (\varphi \in a)) = E^U(a \cap K) = E^U(a)$$

for any a in $\mathscr{B}_0$ [this is seen by successively applying (iv), (8), (7), and (ii)]. Therefore $E^V = E^U$, whence

$$V = \int \lambda \cdot E^V(d\lambda) = \int \lambda \cdot E^U(d\lambda) = U.$$

Thus $\varphi(\sigma(R), E^R) = U$. But φ is the limit in $\mathscr{B}(\sigma(R))$ of a sequence of polynomials, and it follows from (iii) and (6) that $\varphi(\sigma(R), E^R) = \Phi(R)$. Therefore $\Phi(R) = U$, and it results from (9), 4.1, and (8) that $R = J \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. This contradicts (a) and accordingly concludes the proof.

4.3. THEOREM. *Neither* H *nor* τ_{-1} *belong to* $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

PROOF. If $H \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ and $f(\lambda) = i(2\pi)^{-1}\lambda$, then $f(\sigma(H), E^H) = i(2\pi)^{-1}H = J \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, which contradicts (a) [this comes from (iv); recall that $H = -2\pi i J$]. If $T = \tau_{-1} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ and $g(m) = m^{-1}$, then $g(\sigma(T), E^T) = T^{-1}$ (see [1, Theorem 7]); from (iv) therefore $T^{-1} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, which contradicts 4.2, since $T^{-1} = (\tau_{-1})^{-1} = \tau_1$.

5. Conclusion. Let T now denote any one of the four operators J, H, τ_1, and τ_{-1}. Having shown that $T \notin \mathfrak{S}(\Gamma)$ does not exclude the possibility that T be a spectral operator. In that case, however, the "scalar part" of T (see [1, p. 335]) cannot be of the form $B_{\#p}$, where B is in the class (BV) of functions of finite variation. This can be seen as follows. If T is a spectral operator of some class (Γ), then $T = S + N$, where $S \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ and $\sigma(N) = \{0\}$ (see [1, p. 333]); note that $N \neq \boldsymbol{O}$ [since $T \notin \mathfrak{S}(\Gamma)$]. It is easily verified that the algebra $\mathfrak{A} = \{B_{\#p} : B \in (BV)\}$ has no radical [3, § 5.6]; therefore $N \notin \mathfrak{A}$, and since $T \in \mathfrak{A}$ we therefore cannot have $S \in \mathfrak{A}$.

References

[1] DUNFORD, N.: Spectral operators. Pacific J. of Math. **4**, No. 2, 321–354 (1954). — [2] KRABBE, G. L.: On the logarithm of a uniformly bounded operator. Trans. Amer. Math. Soc. **81**, No. 1, 155–166 (1956). — [3] KRABBE, G. L.: Vaguely normal operators on a Banach space. To appear in the Quart. J. Math., Oxford. — [4] KRABBE, G. L.: Abelian rings and spectra of operators on l_p. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, No. 5, 783–790 (1956). — [5] LORCH, E. R.: The integral representation of weakly almost periodic transformations in a reflexive vector space. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 18–40 (1941). — [6] LORCH, E. R.: The spectral theorem and classical analysis. Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems. Oklahoma Agric. and Mech. College, Oklahoma 1955, pp. 259–265. — [7] ZAANEN, A. C.: Linear Analysis. Interscience 1953. — [8] ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warszawa 1935.

Dept. of Math., Purdue University, Lafayette, Indiana (U.S.A.)

(Eingegangen am 20. Februar 1958)

ZAUBEK, O.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 351–362 (1958)

Über einige mit dem Zwischenwertsatz verwandte Entwicklungen

Von

OTHMAR ZAUBEK

§ 1. Vorbemerkungen

Der von BOLZANO zuerst bewiesene Zwischenwertsatz für reelle stetige Funktionen mit zusammenhängenden Erklärungsbereichen läßt, wie bekannt ist, eine Verallgemeinerung auf gewisse Funktionen der ersten Baireschen Klasse zu[1]). Eine, insbesondere für die folgenden Entwicklungen wichtige andere Verallgemeinerung erhält man aus bekannten Sätzen über halbstetige Abbildungen und dem Satze, wonach die Hülle einer reellen Funktion eine nach oben halbstetige Abbildung ist[2]). Diese letztere Verallgemeinerung kann man auch in anderer Weise und ohne Benützung dieser Sätze beweisen und aus der Beweisanordnung kann man durch eine entsprechende Modifikation derselben, auf weitere Sätze schließen, welche in gewisser Hinsicht weitere Verallgemeinerungen des Ausgangszwischenwertsatzes sind. Die Einzelheiten hierzu werden durch die in den folgenden Entwicklungen aufgestellten Sätze und Beweise unmittelbar gegeben. Auch ein mit diesen Sätzen zusammenhängendes Umkehrproblem wird in den folgenden Entwicklungen mit Hilfe eines, meines Wissens neuen Begriffes, nämlich des Begriffes der (unteren, bzw. oberen) Grenzdistanz einer Funktion behandelt.

Die in den folgenden Ausführungen verwendeten Begriffe und Bezeichnungen sollen, soweit diese nicht näher erklärt werden oder durch Hinweise festgelegt werden, wie meist üblich verstanden werden und im Zweifelsfalle genau so verstanden werden, wie diese in dem Werke HAUPT, AUMANN und PAUC, Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., Berlin 1948 usw. (im folgenden kurz als HAUPT angeführt) erklärt und verwendet werden.

Den reellen Zahlenraum bezeichnen wir mit R_1 und den durch die uneigentlichen Zahlen $+\infty$ und $-\infty$ erweiterten reellen Zahlenraum bezeichnen wir mit R_1^0. Um eine deutlichere Unterscheidung vom Limes durchzuführen, wird die jetzt häufig gebrauchte Bezeichnung Limeswert und Limeswertmenge nicht verwendet und dafür die Bezeichnung Häufungswert und Hüllenwert, bzw. Häufung und Hülle verwendet. Da ferner in der Punktmengenlehre die Bezeichnung Berührungspunkt in anderer Weise derzeit verwendet wird als seit Jahrtausenden in der Geometrie und diese daher bei der Anwendung

[1]) Man vgl. hierzu z. B. HAUSDORFF: Mengenlehre, Berlin u. Leipzig 1935, S. 255–256. Dieses Werk wird kurz als HAUSDORFF angeführt.

[2]) Man vgl. hierzu z. B. H. HAHN: Reelle Funktionen, Leipzig 1932, S. 151, Satz 21.4.1 und Satz 21.4.2 und S. 189 Satz 26.1.5. Dieses Werk wird kurz als HAHN angeführt.

der Punktmengenlehre auf die Geometrie zu Verwechslungen Anlaß geben kann, verwende ich an dessen Stelle die meines Wissens noch freie Bezeichnung „Anpunkt" einer Punktmenge. Es werden also folgende Begriffe und Bezeichnungen verwendet:

ERKLÄRUNG 1. *Ist A eine Punktmenge des topologischen*[3]) *Raumes T, dann heiße der Punkt a von T ein Anpunkt von A, wenn für jede Umgebung U von a der Durchschnitt AU nicht leer ist.*

Sind T und T^* topologische Räume, $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge aus T und deren Wertmenge eine Punktmenge aus T^* ist, und ist a ein Anpunkt von A, dann heiße der Punkt h aus T^* dann und nur dann ein Hüllenwert $h(f|A; a)$, bzw. ein Häufungswert $h'(f|A; a)$ von $f|A$ in a, wenn es zu jeder Umgebung V von h in T^* und zu jeder Umgebung U von a, bzw. zu jeder reduzierten Umgebung U' von a in T in AU, bzw. in AU' mindestens einen Punkt b gibt, so daß mindestens ein Funktionswert von f in b ein Punkt von V ist.

Für jeden Anpunkt a von A heiße die Menge aller $h(f|A; a)$, bzw. aller $h'(f|A; a)$ die Hülle $H(f|A; a)$, bzw. die Häufung oder reduzierte Hülle $H'(f|A; a)$ von $f|A$ in a.

Da eine Reihe von Sätzen über kompakte Punktmengen, bzw. über Funktionen mit kompakten Erklärungsbereichen bei der jetzt meist üblichen Erklärung der kompakten Punktmengen nur in Fréchetschen Räumen bewiesen werden, halte ich es für zweckmäßig, neben oder an Stelle des jetzt üblichen Begriffes der kompakten Menge den älteren, auf dem Begriff des Häufungspunktes im älteren und ursprünglichen Sinne basierenden Kompaktbegriff zu verwenden. Wir setzen daher für die folgenden Entwicklungen fest:

ERKLÄRUNG 2. *Ist A eine Punktmenge des topologischen Raumes T dann heiße der Punkt h dann und nur dann mindestens ein schwacher Häufungspunkt oder kurz ein Schwachpunkt, bzw. ein Häufungspunkt für A, wenn für jede reduzierte Umgebung U' von h der Durchschnitt AU' nicht leer, bzw. eine unendliche Punktmenge ist.*

Die Punktmenge A heiße schwachkompakt bzw. kompakt, wenn entweder A eine endliche Menge ist oder wenn jede unendliche Teilmenge derselben einen Schwachpunkt, bzw. Häufungspunkt in T hat.

Ganz entsprechend werden die Begriffe insichschwachkompakt und insichkompakt gebildet.

Für unsere Entwicklungen benötigen wir noch einen allgemeineren Durchschnittssatz, welchen ich bisher bei anderen Autoren zumindest nicht ausdrücklich ausgesprochen vorfand[4]).

DURCHSCHNITTSSATZ. *Ist $\mathfrak{S}$ ein nicht leeres System von Mengen eines topologischen Raumes T, für welches es zu jeder Menge A aus $\mathfrak{S}$ endlich viele Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{S}$ gibt, so daß der Durchschnitt $D(A) = AA_1A_2 \ldots A_n$*

[3]) HAUPT I, S. 178/179. Nach G. NÖBELING, Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin 1954, S. 47 heißt ein derartiger Raum klassisch topologisch.

[4]) Man vgl. hierzu auch das Werk bei [3]) S. 98, Satz 12.3.

kompakt und abgeschlossen ist, und ist ferner für mindestens eine Menge B aus $\mathfrak{S}$ $D(B)$ rational, so ist der Durchschnitt D^* aller Mengen aus $\mathfrak{S}$ dann und nur dann nicht leer, wenn der Durchschnitt aller Mengen eines jeden endlichen und nicht leeren Teilsystems $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ nicht leer ist.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend: Ist $\mathfrak{S}^*$ das System aller $D(A)$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{S}^*$ gleich D^*. In $\mathfrak{S}^*$ gibt es eine rationale Menge B^*. Wir betrachten nun das nicht leere System $\mathfrak{D}$ der Durchschnitte der Mengen von $\mathfrak{S}^*$ mit B und beziehen uns weiter auf den durch T in B erzeugten rationalen topologischen Raum B^*. Nach der Erklärung des rationalen Raumes ist daher D^* gleich dem Durchschnitte abzählbar vieler Mengen $C_1, C_2, \ldots$ aus $\mathfrak{D}$. Setzen wir $D_n = C_1 C_2 \ldots C_n$, so ist der Durchschnitt aller D_n gleich D^*. Da jede Menge aus $\mathfrak{D}$ Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{S}$ ist, hat daher auch D_n für jedes natürliche n diese Eigenschaft. Nach dem Cantorschen Durchschnittssatze ist daher D^* nicht leer. Daß die Bedingung des Satzes notwendig ist, ergibt sich unmittelbar.

Da nun nach bekannten Sätzen jede insichkompakte metrische Menge abgeschlossen und rational ist, ergeben sich aus diesem Durchschnittssatze für den metrischen Raum und für den R_1^0 noch folgende, leicht anwendbare Verallgemeinerungen des Cantorschen Durchschnittssatzes:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{S}$ ein beliebiges nicht leeres System insichkompakter Mengen eines metrischen Raumes, so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{S}$ dann und nur dann nicht leer, wenn jeder Durchschnitt aus je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{S}$ nicht leer ist.*

Satz 2. *Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges nicht leeres System abgeschlossener Mengen des R_1^0, so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{A}$ dann und nur dann nicht leer, wenn jeder Durchschnitt aus je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{A}$ nicht leer ist.*

§ 2. Ein Zwischenhüllenwertsatz

Zwischenhüllenwertsatz. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist, und $\bar{A}$ die (in T) abgeschlossene Hülle von A und ist ferner B eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

1. B ist der Durchschnitt von A mit einer offenen Menge 0,

2. es gibt eine zusammenhängende Menge Z, so daß $B \subseteq Z \subseteq \bar{A}0$ ist,

3. in jedem Punkte x von Z ist die Hülle $H(f|A; x)$ zusammenhängend, dann ist jede reelle Zahl r, welche zwischen der unteren Grenze g und der oberen Grenze G der auf B eingeschränkten Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ liegt, Hüllenwert der Teilfunktion $f|B$, d.h. es gibt mindestens einen Punkt p der abgeschlossenen Hülle $\bar{B}$ von B, so daß r Hüllenwert $h(f|B; p)$ von $f|B$ in p ist.

g, bzw. G ist unabhängig von den Voraussetzungen 1. bis 3. für jede Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ Hüllenwert von $f|B$, wenn es ein $m > g$; bzw. ein $n < G$ gibt, so daß die Punktmenge $B[f < m]$, bzw. $B[f > n]$ kompakt ist.

BEWEIS. Ist x ein beliebiger Punkt von Z, so ist, da $Z \leqq 0$ ist, x Punkt von 0 und da 0 offen ist, ist daher $H(f|A0; x) = H(f|A; x)$. Da $A0 = B$ ist, ist also nach 3. für jedes $x \in Z$ $H(f|B; x)$ zusammenhängend. Ist nun $g < r < G$, dann bilden wir die Menge Z_r aller und nur der Punkte z aus Z, für welche jeder Hüllenwert $h(f|B; z) > r$ ist. Z_r ist offen in Z. Denn wäre ein Punkt z_0 von Z_r Häufungspunkt von $Z - Z_r$, so gäbe es in jeder Umgebung U von z_0 mindestens einen Punkt q mit einem Hüllenwert $h(f|B; q) \leqq r$. Daher gäbe es nach den Eigenschaften eines topologischen Raumes eine Umgebung V von q, welche Teilmenge von U ist, so daß es zu jedem $\sigma > 0$ einen Punkt q' aus AV gäbe, für welchen mindestens ein Funktionswert $f(q') < r + \sigma$ ist. Also würde für jede Umgebung U von z_0 die im R_1^0 abgeschlossene Hülle $W^0(f|BU)$ der Wertmenge $W(f|BU)$ der auf BU eingeschränkten Teilfunktion $f|BU$ von $f|B$ mindestens eine Zahl $\varrho \leqq r$ enthalten. Es wäre daher der Durchschnitt $[-\infty, r]\, W^0(f|BU)$ für jede Umgebung U von z_0 nicht leer. Sind $U_1, U_2, \ldots, U_s$ endlich viele Umgebungen von z_0, so ist nach den Eigenschaften eines topologischen Raumes auch der Durchschnitt $U_1 U_2 \ldots U_s = U^*$ eine Umgebung von z_0 und da $W^0(f|BU^*) \leqq W^0(f|BU_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ ist, wäre daher der Durchschnitt aller $[-\infty, r]\, W^0(f|BU)$ für alle möglichen Umgebungen U von z_0 nach dem Satze 2 nicht leer. Da nun der Durchschnitt aller $W^0(f|BU)$ für alle möglichen Umgebungen U von z_0 gleich der Hülle $H(f|B; z_0)$ ist[5]), enthielte daher $H(f|B; z_0)$ eine Zahl $r' \leqq r$. Dies stünde aber im Widerspruch damit, daß $z_0 \in Z_r$ ist. Genau entsprechend kann man zeigen, daß die Menge Z'_r aller und nur der Punkte z aus Z, für welche jeder Hüllenwert $h(f|B; z) < r$ ist, offen in Z ist. Da $g < r < G$ ist, ist in mindestens einem Punkte a von B mindestens ein Funktionswert $f(a) < r$ und in mindestens einem $b \in B$ ein Funktionswert $f(b) > r$. Es kann daher weder Z_r noch Z'_r gleich Z sein. Da nun Z_r und Z'_r zueinander fremd und offen in Z sind und Z zusammenhängend nach 2. ist, ist daher die Menge $Z' = Z - (Z_r + Z'_r)$ nicht leer. Ist $p \in Z'$, so ist, wie am Anfange des Beweises festgestellt wurde, $H(f|B; p)$ zusammenhängend und enthält daher die Zahl r, w. z. b. w. Der Beweis des letzten Teiles des Satzes bietet keine Schwierigkeiten.

Um die Allgemeinheit des Zwischenhüllenwertsatzes zu überprüfen, betrachten wir folgendes Beispiel: Es sei $E = E_2$ die kartesische Ebene, $(x > 0)$ und $(y \leqq 0)$ die entsprechenden Halbebenen derselben, $A = E - (x > 0)(y \leqq 0)$ und $f|A$ die eindeutige Punktfunktion auf A, für welche $f(x, y) = 1$ für $x \leqq 0$, $f(x, y) = 0$ für $0 < y \leqq x$ und $f(x, y) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{4}\right)$ für $0 < x < y$ ist. Dabei soll unter $\operatorname{arc\,tg} z$ diejenige Bestimmung des Arkustangens verstanden werden, für welche $0 \leqq \operatorname{arc\,tg} z < \pi$ ist. $f|A$ ist dann mit Ausnahme des Punktes (0, 0) stetig und hat im Punkte (0, 0) die Hülle $[0, 1]$. Man sieht sogleich, daß für jeden Punkt x der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A in E die Hülle $H(f|A; x)$ zusammenhängend ist. Ist nun B die Menge $(x < 0) + (0 < y < x)$ aus E, so ist B offen und eine Teilmenge von A. Ferner ist die Menge $Z = B +$

[5]) HAUPT I, S. 200.

$\{(0, 0)\}$ eine zusammenhängende Obermenge von B, für welche sogar $Z \subseteqq \overline{B}$ ist. Jede offene Menge 0 aus E, für welche $A0 = B$ ist, enthält den Punkt $(0, 0)$ nicht, daher kann Z nicht Teilmenge von $\bar{A}0$ sein. Betrachten wir nun die Teilfunktion $f|B$ von $f|A$, so sind alle Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes mit Ausnahme der Bedingung $Z \subseteqq \bar{A}0$ für $f|B$ erfüllt, und zwar ist diese letztere Bedingung bloß für einen einzigen Punkt von Z nicht erfüllt. $f|B$ nimmt trotzdem nur die Werte 0 und 1 an. Man sieht aus diesem Beispiele, daß bei der Verwendung der im Satze auftretenden Begriffe dieser Satz bereits sehr allgemein ist. Wir werden später sogar bei engeren Voraussetzungen eine gewisse Umkehrung dieses Satzes beweisen können.

Wir können nun aus dem Zwischenhüllenwertsatz eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes gewinnen. Zu diesem Zwecke verwenden wir folgende Ausdrucksweise:

ERKLÄRUNG 3. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion mit dem Erklärungsbereich A und B eine beliebige Punktmenge, dann heiße die Menge aller und nur der Punkte z des Wertraumes T^* von $f|A$, zu welchen es mindestens einen Punkt b aus B gibt, so daß $z \in H'(f|A; b)$ und außerdem für jeden Punkt $x \in AB$ jeder Funktionswert $f(x) \neq z$ ist, der Häufungswerteüberschuß $\dot{U}(f|A; B)$ von $f|A$ für die Menge B.*

Dann haben wir den Satz:

VERALLGEMEINERTER ZWISCHENWERTSATZ. *Bei den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes nimmt $f|B$ genau alle Werte zwischen ihrer unteren und oberen Grenze mit Ausnahme des Häufungswerteüberschusses von $f|B$ für die Menge Z an.*

Da der Häufungswerteüberschuß einer Funktion $f|A$ für jede Obermenge C von A eine Randmenge im Wertraum der Funktion ist, ergibt sich noch folgender Zusatz:

ZUSATZ. *Bei den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes nimmt $f|B$ alle Werte zwischen ihrer unteren und oberen Grenze mit Ausnahme (höchstens) einer Randmenge im R_1^0 an.*

§ 3. Ein Zwischenwertnäherungssatz

Für manche Untersuchungen ist es zweckmäßig, neben dem Begriff der zusammenhängenden Menge und der Komponente einen Begriff zu verwenden, welcher von der Distanz zweier Punkte in einer metrischen Punktmenge abgeleitet werden kann. Es handelt sich dabei um den folgenden Begriff:

ERKLÄRUNG 4[6]). *Die obere Grenze der Distanzen[7]) je zweier Punkte einer mehrpunktigen metrischen oder allgemeiner halbmetrischen Menge heiße die innere Distanz dieser Punktmenge. Die innere Distanz einer höchstens einpunktigen metrischen (halbmetrischen) Menge wird Null gesetzt.*

Für den R_1^0 erweitern wir diesen Begriff mit Hilfe der

[6]) Man vgl. hierzu auch O. ZAUBEK: Math. Ann. **128**, 293 (1954).

[7]) HAUSDORFF, S. 158.

ERKLÄRUNG 5. *Sind a und b zwei verschiedene Punkte einer Menge A des R_1^0, dann heiße a mit b in A für $0<\varkappa\leqq+\infty$ durch eine $\varkappa$-Kette verbunden oder verbindbar, wenn es eine abzählbare Teilmenge $K=\{a_1, a_2, \ldots\}$ aus A gibt, so daß die Entfernung $\|a_i, a_{i+1}\|\leqq\varkappa$ für $i=1, 2, \ldots$ ist und a und b Anpunkte von K im R_1^0 sind. Die untere Grenze aller Zahlen $\varkappa$, für welche a und b in A durch eine $\varkappa$-Kette verbunden sind, heiße die Distanz $d(a, b; A)$ der Punkte a und b in A.*

Man zeigt nun leicht, daß die Distanz zweier Punkte einer Menge des R_1 nach der Erklärung 5 den gleichen Wert hat wie im bisherigen Sinne, so daß durch den Begriff der Erklärung 5 eine zulässige Erweiterung des Begriffes der Distanz auf den R_1^0 gegeben wird.

Mit Hilfe dieses erweiterten Begriffes der Distanz $d(a, b; A)$ erklären wir ganz entsprechend der Erklärung 4 die innere Distanz $i(A)$ einer Punktmenge A des R_1^0.

Man beweist ohne Schwierigkeiten den für die Anwendungen wichtigen

SATZ 3. *Damit die Menge A des R_1^0 zusammenhängend ist, ist notwendig, daß $i(A)=0$ ist. Ist A abgeschlossen, so ist diese Bedingung auch hinreichend.*

Diese Begriffe können unmittelbar auf den Raum der Analysis für eine oder mehrere komplexe Veränderliche übertragen werden. Auch ein dem Satze 3 entsprechender Satz gilt für die Punktmengen dieser Räume.

Wir wollen ferner noch folgende Ausdrucksweise verwenden:

ERKLÄRUNG 6. *Die endliche Zahl z heiße durch die Zahlenmenge A mit höchstens der Ungenauigkeit oder kurz mit der Ungenauigkeit γ angenähert, wenn es zu jedem $\sigma>0$ mindestens eine Zahl x aus A gibt, so daß $|z-x|<\gamma+\sigma$ ist. z heiße durch die Funktion f mit der Ungenauigkeit γ angenähert, wenn z durch die Wertmenge von f mit der Ungenauigkeit γ angenähert wird.*

Es gilt dann der

ZWISCHENWERTNÄHERUNGSSATZ. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist, und $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A, ist ferner B eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

1. B ist der Durchschnitt von A mit einer offenen Menge 0,

2. es gibt eine zusammenhängende Menge Z, so daß $B\subseteqq Z\subseteqq\bar{A}0$ ist,

3. in jedem Punkte x von Z ist $i[H(f|A; x)]\leqq j$,

dann wird jede Zahl r zwischen der oberen und unteren Grenze der Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ mit der Ungenauigkeit $j/2$ angenähert. Oder kürzer: Bei den vorhergehenden Voraussetzungen ist $i[W(f|B)]\leqq j$.

BEWEIS. Der Beweis dieses Satzes kann weitgehend analog dem Beweise des Zwischenhüllenwertsatzes geführt werden. Wir verwenden daher die beim Beweise des Zwischenhüllenwertsatzes verwendeten Mengen und Bezeichnungen. Zunächst ergibt sich durch die entsprechenden Schlußweisen wie bei jenem Beweise, daß Z' nicht leer ist. Ist $c\in Z'$, so ist, wie dort gezeigt wurde,

$H(f|A; c) = H(f|B; c) = H$. Also ist nach der Voraussetzung 3. $i(H) \leqq j$. H enthält nach ihrer Erklärung mindestens eine Zahl $\lambda \geqq r$ und mindestens eine Zahl $\mu \leqq r$. Ist nun λ_0 die untere Grenze aller $\lambda \geqq r$ von H und μ_0 die obere Grenze aller Zahlen $\mu \leqq r$ aus H, so ist, da $i(H) \leqq j$ ist, $\lambda_0 - \mu_0 \leqq j$. r ist Zahl des abgeschlossenen Intervalls $[\mu_0, \lambda_0]$ und daher wird r durch $f|B$ mit der Ungenauigkeit $j/2$ angenähert.

Bemerkung. Ist bei den Voraussetzungen des Zwischenwertnäherungssatzes in jedem Punkte x von Z $i[H(f|A; x)] = 0$, so ist nach diesem Satze $i[W(f|B)] = 0$. Aus $i[W(f|B)] = 0$ kann aber im allgemeinen nicht geschlossen werden, daß jeder Zwischenwert zwischen der unteren und oberen Grenze von $f|B$ ein Hüllenwert von $f|B$ ist. Diese Folgerung kann man dagegen z.B. machen, wenn B kompakt ist. Anderseits folgt aus dem Satze 3 aus $i[H(f|A; x)] = 0$, daß $H(f|A; x)$ zusammenhängend ist, so daß bei den vorhergehenden Voraussetzungen auch diejenigen des Zwischenhüllenwertsatzes erfüllt sind. Der Zwischenhüllenwertsatz ist daher im allgemeinen Falle keine Folge des Zwischenwertnäherungssatzes. Dagegen folgt der vorhin erwähnte Zusatz auch aus dem Zwischenwertnäherungssatze.

Unsere bisherigen Aussagen bezogen sich auf Funktionen bzw. Teilfunktionen, für welche die abgeschlossene Hülle des Erklärungsbereiches derselben zusammenhängend war. Man kann nun für Funktionen mit metrischen Erklärungsbereichen allgemeinere Hüllen einführen und mit deren Hilfe einen allgemeineren Zwischenwertnäherungssatz für diese Klasse von Funktionen beweisen. Wir wollen jedoch hier der Kürze halber auf diese Hüllen und den entsprechenden Zwischenwertnäherungssatz nicht eingehen.

§ 4. Die untere und obere Grenzdistanz einer Funktion mit einigen Anwendungen. Zwischenwertumkehrsatz

Die bisherigen Ergebnisse gestatten aus gewissen Zusammenhangseigenschaften, bzw. Aussagen über die innere Distanz der Hülle einer Funktion f auf gewissen, mit dem Erklärungsbereich von f in Beziehung stehenden Mengen, Schlüsse über Zusammenhangseigenschaften, bzw. über die innere Distanz der Wertmenge $W(f)$ zu machen.

Für manche Untersuchungen ist es auch zweckmäßig, Schlußfolgerungen in umgekehrter Richtung machen zu können. Wir wollen dies mit Hilfe des folgenden Begriffes machen:

ERKLÄRUNG 7. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T und deren Wertmenge $W(f|A)$ eine Punktmenge eines metrischen Raumes M oder des R_1^0 ist, und ist x_0 ein Anpunkt von A, dann heiße die untere (obere) Grenze aller reellen Zahlen z, zu welchen es zu jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung V von x_0 gibt, so daß $V \leqq U$ und die innere Distanz der Wertmenge $W(f|AV)$ der Teilfunktion $f|AV$ von $f|A$ nicht größer (nicht kleiner) als z ist, die untere (obere) Grenzdistanz $\underline{\delta}(f|A; x_0)$ $(\overline{\delta}(f|A; x_0))$ von $f|A$ in x_0. Ist x_0 ein Schwachpunkt*

von A und wird statt der Umgebung U von x_0 eine reduzierte Umgebung U' von x_0 genommen usw., so heiße die analog gebildete Größe $\underline{\delta}'(f|A; x_0)$ $(\overline{\delta}'(f|A; x))$ reduzierte untere (obere) Grenzdistanz von $f|A$ in x_0.

Für Funktionen einer reellen Veränderlichen kann man mit Hilfe der Rechts- und Linksumgebungen analog rechte und linke untere (obere), bzw. reduzierte Grenzdistanzen erklären.

Für die Anwendungen der Grenzdistanz sind nun die beiden folgenden Sätze von Bedeutung.

SATZ 4. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge W eine kompakte Menge eines metrischen Raumes ist, so ist in jedem Anpunkte a von A $\overline{\delta}(f; a) = \underline{\delta}(f; a) = i[H(f; a)]$ und wenn a ein Schwachpunkt für A ist, ist auch $\overline{\delta}'(f; a) = \underline{\delta}'(f; a) = i[H'(f; a)]$.*

BEWEIS. Da W eine kompakte metrische Menge ist, ist die abgeschlossene Hülle $\overline{W}$ von W nach einem bekannten Satze[8]) insichkompakt. Wir legen nun für die Wertmenge W von $f|A$ die insichkompakte Menge $\overline{W}$ als Raum zugrunde. Da jede kompakte metrische Menge rational ist, zeigt man ziemlich leicht, daß es eine Folge $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$ von Umgebungen U_n von a gibt, so daß $H(f; a) = \underset{n}{D}\overline{W}(f|AU_n) = D$ ist, wobei $\overline{W}(f|AU_n)$ die abgeschlossene Hülle der Wertmenge $W(f|AU_n)$ ist. Setzen wir zur Abkürzung $\overline{W}_n = \overline{W}(f|AU_n)$, so ist $\overline{W}_{n+1} \subseteq \overline{W}_n$ für jedes natürliche n und da der Raum $\overline{W}$ insichkompakt ist, ist D gleich dem metrischen Limes[9]) der Folge $((W_n))$. Nach einem weiteren Satze[10]) ist daher $\lim\limits_{n\to+\infty} i(W_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} i(\overline{W}_n) = i[H(f|A; a)]$. Ist anderseits $\underline{\delta} = \underline{\delta}(f; a)$ und $\sigma > 0$, so gibt es nach der Erklärung von $\underline{\delta}(f; a)$ zu jeder der obigen Umgebungen U_n von a eine Umgebung V_n von a, so daß $V_1 \subseteq U_1$ und $V_n \subseteq U_n V_{n-1}$ für $n \geqq 2$ und $|i[W(f|AV_n; a)] - \underline{\delta}| < \sigma$ ist. Da anderseits $V_n \subseteq U_n$ ist, ist daher $\underset{n}{D}\overline{W}(f|AV_n) = D$. Da die Folge $((\overline{W}(f|AV_n)))$ monoton abnehmend ist, ist daher, da der Raum $\overline{W}$ insichkompakt ist, D wieder gleich dem metrischen Limes dieser Folge, so daß sich schließlich wieder $\lim\limits_{n\to+\infty} i[W(f|AV_n)] = i(D)$ ergibt. Da $\sigma > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist daher $\underline{\delta} = i(D) = i[H(f|A; a)]$. Ganz entsprechend beweist man, daß $\overline{\delta} = i[H(f|A; a)]$ ist. Der Beweis der anderen Behauptungen des Satzes kann ganz entsprechend geführt werden.

Ein analoger Satz gilt für die rechten und linken unteren (oberen) Grenzdistanzen.

Nennen wir eine Punktfunktion $f|A$, also eine Funktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes ist, im Anpunkte a von A kompakt, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß die Wertmenge $W(f|AU)$ der Teilfunktion $f|AU$ von $f|A$ kompakt im Wertraume ist, so ergibt sich aus dem Satze 4 sogleich der

[8]) HAHN, S. 93, Satz 15.2.4.

[9]) HAUSDORFF, S. 146 u. S. 150, Satz V.

[10]) Man vgl. die Arbeit unter [6]) S. 293, Satz 4.

ZUSATZ. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge metrisch ist und ist f im Anpunkte a von A kompakt, so ist* $\bar{\delta}(f;a) = \underline{\delta}(f;a) = i[H(f;a)]$ *und wenn a ein Schwachpunkt von A ist, ist* $\bar{\delta}'(f;a) = \underline{\delta}'(f;a) = i[H'(f;a)]$.

Im R_1^0, welcher nach unserer Erklärung kein metrischer Raum ist, gilt der Satz 4 nicht im vollen Ausmaße, was später noch nachgewiesen wird. Doch gilt wenigstens der folgende, für die Anwendungen bedeutsame

SATZ 5. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, so ist in jedem Anpunkte a von A* $\bar{\delta}(f|A;a) \geqq \underline{\delta}(f|A;a) \geqq i[H(f|A;a)]$, *bzw. wenn a Schwachpunkt für A ist, ist auch* $\bar{\delta}'(f|A;a) \geqq \underline{\delta}'(f|A;a) \geqq i[H'(f|A;a)]$. *Die Gleichheitszeichen gelten in diesen Beziehungen höchstens dann nicht, wenn $H(f|A;a)$, bzw. $H'(f|A;a)$ nur eine einzige Zahl enthält, welche unendlich ist.*

Dieser Satz wird nun mit Hilfe des folgenden Satzes analog wie der Satz 4 bewiesen.

SATZ 6. *Ist $((A_n))$ eine nicht steigende Folge abgeschlossener Zahlenmengen des R_1^0, A der Durchschnitt aller Mengen der Folge und enthält A entweder keine unendliche Zahl oder wenn A eine unendliche Zahl u enthält, mindestens noch eine von u verschiedene (endliche oder unendliche) Zahl, so hat die Folge $((i(A_n)))$ einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert und es ist* $\lim\limits_{n\to+\infty} i(A_n) = i(A)$.

BEWEIS. Enthält A nur eine einzige endliche Zahl z, so enthalten für jedes $\sigma > 0$ nach dem Cantorschen Durchschnittssatze oder nach dem Satze 2 die abgeschlossenen Intervalle $[-\infty, z-\sigma]$ und $[z+\sigma, +\infty]$ des R_1^0 höchstens aus endlich vielen Mengen A_n Punkte. Es ist daher der Durchmesser von A_n für fast alle n nicht größer als 2σ, also ist $i(A_n) \leqq 2\sigma$ für fast alle n. Daraus folgt, daß $\lim\limits_{n\to+\infty} i(A_n) = 0 = i(A)$ ist. Enthält nun A mehr als bloß eine Zahl, so enthält A, da A abgeschlossen im R_1^0 ist, eine kleinste Zahl k und eine größte Zahl g. Ist dann $i(A) > 0$, so gibt es zu jeder reellen Zahl α, für welche $0 < \alpha < i(A)$ ist, ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ der Länge α, so daß A mindestens eine Zahl $c < a$ und mindestens eine Zahl $d > b$ enthält und daß außerdem der Durchschnitt $A[a, b]$ leer ist. Nach dem Cantorschen Durchschnittssatze ist dann auch $A_n[a, b]$ für fast alle n leer. Also ist, da A_n die Zahlen c und d enthält, $i(A_n) \geqq \alpha$ für fast alle n. Daher ist in diesem Falle $\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} i(A_n) \geqq i(A)$ und diese Beziehung ist auch richtig, wenn $i(A) = 0$ ist.

Ist nun $i(A) < +\infty$ und $\sigma > 0$, so kann k mit g durch eine $(i(A)+\sigma)$-Kette in A verbunden werden. Ist K diese Kette, so ist $K \subseteq A \subseteq A_n$ für jedes natürliche n. k ist daher mit g durch K in jedem A_n verbunden. Sind nun k und g beide endlich, so sind nach dem Cantorschen Durchschnittssatzes die Durchschnitte von A_n mit den abgeschlossenen Intervallen $[-\infty, k-\sigma]$ und $[g+\sigma, +\infty]$ für fast alle n leer. Also sind in diesem Falle je zwei Punkte von A_n für fast alle n durch eine $(i(A)+\sigma)$-Kette in A_n verbunden. Dies gilt auch, wie man sogleich sieht, wenn g oder k oder beide Zahlen unendlich sind. Es ist daher $\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} i(A_n) \leqq i(A)$, eine Beziehung, welche auch in dem bisher ausgeschlossenen Falle $i(A) = +\infty$ richtig ist. Dieses Ergebnis gibt mit dem

vorhergehenden über den unteren Limes von $((i(A_n)))$ die Behauptung des Satzes.

Man beachte, daß die einschränkenden Voraussetzungen des Satzes ohne einen entsprechenden Ersatz nicht weggelassen werden können. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Folge $((A_n))$ für welche A_n für jedes natürliche n aus allen natürlichen Zahlen $\geqq n$ und aus $+\infty$ besteht, dann ist A die aus $+\infty$ allein bestehende Menge und daher ist $i(A)=0$, während $i(A_n)=1$ für jedes n ist. Auf ähnliche Weise kann man Mengenfolgen aus dem R_1^0 bilden, für welche die Folge $((i(A_n)))$ keinem Grenzwert zustrebt. Ist N die Menge aller natürlichen Zahlen und $f|N$ die reelle eindeutige Funktion auf N, welcher jeder Zahl aus N diese Zahl selbst zuordnet, so ist im Anpunkte $+\infty$ von N $\bar{\delta}(f;+\infty)=+\infty$, $\underline{\delta}(f;+\infty)=1$ und $i[H(f;+\infty)]=0$. Wir sehen aus diesem einfachen Beispiele, daß es reelle Funktionen gibt, welche im fraglichen Anpunkte sogar einen (unendlichen) Grenzwert haben und für welche die Gleichheitszeichen im Satze 5 nicht gelten. Man kann daraus schließen, daß man mit Hilfe der unteren und oberen Grenzdistanz gewisse Zusammenhangseigenschaften der Wertmenge einer Funktion feiner beschreiben kann als mit Hilfe der Hülle bzw. dem Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff.

Wir wollen nun als wichtige Anwendung der Grenzdistanz die Frage einer Umkehrung des Zwischenwertnäherungssatzes und des Zwischenhüllenwertsatzes behandeln. Zu diesem Zwecke beweisen wir den

ZWISCHENWERTUMKEHRSATZ. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Funktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist und zu der es eine lokalzusammenhängende*[11]) *Menge L aus T gibt, so daß $A\subseteqq L\subseteqq\bar{A}$ ist, so ist, damit für jede Teilmenge B von A, für welche es ein Relativgebiet L_B*[12]) *in L gibt, so daß $B=AL_B$ ist, die innere Distanz $i[W(f|B)]$ der Wertmenge $W(f|B)$ der auf B eingeschränkten Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ im R_1^0 höchstens den Wert j hat, notwendig (und hinreichend), daß in jedem Punkte x von L $i[H(f|A;x)]\leqq j$ ist.*

BEWEIS. Wir beziehen unsere Überlegungen auf den durch T in L erzeugten topologischen Raum L^*. Ist dann x ein beliebiger Punkt von L, so gibt es, da L lokalzusammenhängend ist, zu jeder Umgebung U von x ein Gebiet $L_B=L_B(U)\subseteqq U$, welches x enthält. Wir betrachten nun die Punktmenge $B=B(U)=AL_B(U)$. Da L_B zusammenhängend und offen ist, ist daher nach den Voraussetzungen $i[W(f|B)]\leqq j$. Da nun U eine beliebige Umgebung von x ist, gibt es also zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung $V=L_B(U)$ von x, so daß $V\subseteqq U$ und $i[W(f|AV)]\leqq j$ ist. Nach der Erklärung der unteren Grenzdistanz ist daher $\underline{\delta}(f|A;a)\leqq j$. Nach dem Satz 5 ist daher $i[H(f|A;a)]\leqq j$. Daß die Bedingung des Satzes hinreichend ist, folgt sogleich aus dem Zwischenwertnäherungssatze.

Setzen wir in diesem Satze $j=0$, so erhalten wir aus diesem Satze und dem Satze 3 eine entsprechende Umkehrung des Zwischenhüllenwertsatzes.

[11]) HAUSDORFF, S. 155.

[12]) Das heißt L_B ist zusammenhängend und offen in L.

Wir haben den Zwischenwertnäherungssatz nur für reelle Funktionen ausgesprochen und bewiesen. Mit Hilfe der Grenzdistanz können wir einen entsprechenden Satz für Funktionen mit kompakten metrischen Wertmengen beweisen. Der Einfachheit halber wollen wir diesen Satz nur für engere Voraussetzungen aussprechen und beweisen.

SATZ 7. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge eine metrische Punktmenge ist und ist f in jedem Anpunkte von A kompakt, gibt es ferner zu je zwei Punkten p_1 und p_2 von A eine p_1 und p_2 enthaltende, insichkompakte, rationale und zusammenhängende Teilmenge K der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A und eine Teilfunktion $f|B$ von $f|A$, so daß $K \subseteq \bar{B}$ ist und für welche in jedem Punkte $x \in K$ $i[H(f|B; x)] \leqq j$ ist, so ist $i[W(f|A)] \leqq j$.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß für jedes $\sigma > 0$ je zwei verschiedene Punkte w_1 und w_2 der Wertmenge $W = W(f|A)$ durch eine $(j+\sigma)$-Kette in W verbunden sind. Ist $w_1 = f(p_1)$ und $w_2 = f(p_2)$, so gibt es nach den Voraussetzungen des Satzes eine insichkompakte, rationale und zusammenhängende Menge K, welche p_1 und p_2 enthält. Ist $f|B$ die im Satze näher erklärte Teilfunktion von $f|A$, so können wir nach dem Zusatze zum Satz 4 jedem Punkte x aus K eine Umgebung U_x so zuordnen, daß $i[W(f|BU_x)] < j + \sigma$ ist. Nach dem Borelschen Überdeckungssatze kann man nun endlich viele Punkte x_i aus K so wählen, daß die Vereinigungsmenge aller U_{x_i} die Menge K überdeckt. Da K zusammenhängend ist, kann man stets eine endliche Folge $U_1, U_2, \ldots, U_n$ aus den U_{x_i} so auswählen, daß KU_iU_{i+1} für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ nicht leer ist und außerdem $p_1 \in U_1$ und $p_2 \in U_n$ ist. Ist $\bar{x}_i$ ein Punkt von KU_iU_{i+1}, so ist der Durchschnitt $W(f|BU_i)\,W(f|BU_{i+1})$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ nicht leer. Da $w_1 = f(p_1)$ und ein Funktionswert $f(\bar{x}_1)$ zu $W(f|BU_1)$ gehören, können w_1 und $f(\bar{x}_1)$ durch eine $(j+\sigma)$-Kette in $W(f|BU_1)$ verbunden werden. Ebenso können $f(\bar{x}_1)$ und $f(\bar{x}_2)$ durch eine $(j+\sigma)$-Kette in $W(f|BU_2)$ verbunden werden usw. Da die Anzahl der $\bar{x}_i$ endlich ist, können daher auch w_1 und w_2 in $W(f|B)$ und daher auch in $W(f|A)$ durch eine $(j+\sigma)$-Kette verbunden werden. Nach der Erklärung der inneren Distanz ist daher $i[W(f|A)] \leqq j$, w. z. b. w.

Auf die Untersuchung der Punktfunktion $\underline{\delta}(f|A; x)|\bar{A}$ und $\bar{\delta}(f|A; x)|\bar{A}$ auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A hinsichtlich ihrer Eigenschaften gehen wir hier nicht näher ein. Man kann nun für diese Punktfunktionen wieder die untere und die obere Grenzdistanz bilden und auf diese Weise Grenzdistanzen zweiter Ordnung für die ursprüngliche Funktion $f|A$ erklären. Man kann auf diese Weise fortfahren und Grenzdistanzen höherer Ordnung von f bilden und versuchen, durch geeignete Grenzprozesse Grenzdistanzen transfiniter Ordnung zu bilden. Insbesondere wird dabei die Frage auftreten, wie weit dieser Prozeß der Bildung von Grenzdistanzen im allgemeinen, bzw. bei bestimmten Klassen von Funktionen fortgesetzt werden kann. Auf diese Frage, sowie auf weitere damit im Zusammenhang stehende Fragen kann ich derzeit jedoch nur hinweisen.

Anderseits kann man auch Grenzdistanzen bei Vernachlässigung von Teilmengen bilden.

Abschließend wollen wir noch einen Satz angeben, welcher für manche Anwendungen von Nutzen ist.

SATZ 8. *Sind $f|A$ und $g|A$ reelle oder allgemeiner komplexe Punktfunktionen und ist f im Punkte $a \in A$ lokal beschränkt und g in a eindeutig, endlich und stetig, so ist* $\delta(fg|A; a) = |g(a)|\,\delta(f|A; a)$[13]. *Sind $f|A$ und $g|A$ reelle Punktfunktionen und ist b ein Punkt, bzw. ein Schwachpunkt für A, ist ferner g in b eindeutig endlich und stetig und ist außerdem $g(b) \neq 0$, bzw. hat g in b einen von Null verschiedenen, endlichen und eindeutigen*[14] *(reduzierten) Grenzwert g^*, so ist* $i[H(fg|A; b)] = |g(b)| \cdot i[H(f|A; b)]$, *bzw.* $i[H'(fg|A; b)] = |g^*|\, i[H'(f|A; b)]$.

Ist insbesondere bei diesen Voraussetzungen $H(f|A; b)$, bzw. $H'(f|A; b)$ ein Kontinuum im R_1^0, so ist auch $H(fg|A; b)$, bzw. $H'(fg|A; b)$ ein Kontinuum im R_1^0.

Auf den Beweis dieses Satzes soll der Kürze halber nicht mehr eingegangen werden.

---

[13]) Ist $\underline{\delta}(f|A; a) = \overline{\delta}(f|A; a)$, so schreiben wir einfach $\delta(f|A; a)$.

[14]) Das heißt es gibt genau eine Zahl g^* des R_1^0, welche für die Funktion g in b die bekannte Grenzwerteigenschaft hat und nicht eine mehrelementige Menge aus dem R_1^0.

Wien VII, Kaiserstr. 79/16

(Eingegangen am 30. Januar 1958)

Suschowk, D.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 363–365 (1958)

Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale

Herrn Prof. Dr. Robert Sauer zu seinem 60. Geburtstag
am 16. September 1958 gewidmet

Von

Dietrich Suschowk

In der linearen Theorie der stationären Überschallströmungen verwendet man zur Darstellung des „Störströmungspotentials" Integrale der Wellengleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{1}{r} U_r - \frac{1}{r^2} U_{\omega\omega} = 0$$

von der Gestalt

$$(1) \qquad \left\{ U(t, r, \omega) = u^{(k)}(t, r) \begin{cases} \sin k\omega \\ \cos k\omega \end{cases} = \int_0^{t-r} \frac{T_k\left(\frac{t-\tau}{r}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} f_k(\tau)\, d\tau \begin{cases} \sin k\omega \\ \cos k\omega \end{cases} \right.$$

$$(t - r \geqq 0,\ r > 0;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(vgl. [1], S. 51, Formel (99) und (100) sowie [3], S. 341, Formel (6)), wo

$$T_k(\lambda) = \tfrac{1}{2}\left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})^k + (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})^k\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

das k-te Tschebyscheffsche Polynom und $f_k(\lambda)$ eine mit im Endlichen überall eigentlich Riemann-integrierbarer zweiter Ableitung versehene reelle Funktion mit $f_k(0) = 0$ ist. Die Funktionen $U(t, r, \omega)$ genügen auf dem charakteristischen Halbkegel $t^2 - r^2 = 0$, $t \geqq 0$ den Anfangsbedingungen

$$U = 0, \quad U_t = 0, \quad U_r = 0, \quad U_\omega = 0$$

und wachsen für $r \downarrow 0$ in bestimmter Weise (vgl. [3], Satz 3) über alle Grenzen. Die Bestimmung der „Singularitätendichten" $f_k(\lambda)$ aus der vorgegebenen Berandung des Strömungsfeldes ist bei nicht ebenen oder nicht drehsymmetrischen Feldern einigermaßen kompliziert (vgl. z. B. [2]).

Hier soll gezeigt werden, daß sich die Funktionen $f(\lambda)$ nach geeigneter Umformung des in (1) auftretenden Integrals in einfacher Weise aus $u^{(k)}(t, r)$ bestimmen lassen.

Satz. Es sei für $t - r \geqq 0$, $r > 0$

$$u^{(k)}(t, r) = \int_0^{t-r} \frac{T_k\left(\frac{t-\tau}{r}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} f(\tau)\, d\tau \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $T_k(\lambda)$ und $f(\lambda)$ die eingangs angegebenen Eigenschaften haben. Dann ist für $k = 0$

$$f(t) = -\lim_{r \downarrow 0} r\, u_r^{(0)}(t, r) \qquad (t \geqq 0)$$

und für $k=1,2,\ldots$

$$f(t)=\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{d^k}{dt^k}\left[\lim_{r\downarrow 0} r^k u^{(k)}(t,r)\right] \qquad (t\geqq 0).$$

Wir beweisen die Behauptung zunächst für die Fälle $k=1,2,\ldots$. In [3], Satz 2 wurde gezeigt, daß $u^{(k)}(t,r)$ dann in die Gestalt

$$(2)\qquad \begin{cases} u^{(k)}(t,r)=\dfrac{1}{2k\,r^k}\displaystyle\int_0^{t-r}\left(t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right)^k f'(\tau)\,d\tau- \\ \qquad -\dfrac{r^k}{2k}\displaystyle\int_0^{t-r}\frac{f'(\tau)}{\left(t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right)^k}\,d\tau \end{cases}$$

gebracht werden kann. A.a.O. findet sich auch der Nachweis, daß für $r\downarrow 0$ der zweite Summand in (2) endlich bleibt. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir ihn hier:

Da $t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}$ für $0\leqq\tau\leqq t-r$ positiv ist, hat man nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $0<\vartheta<1$

$$I_k(t,r):=\int_0^{t-r}\frac{f'(\tau)}{\left(t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right)}\,d\tau=f'\big(\vartheta\cdot(t-r)\big)\int_0^{t-r}\frac{d\tau}{\left(t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right)^k}.$$

Wegen $r\leqq t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\leqq t+\sqrt{t^2-r^2}$ ist

$$|I_k(t,r)|\leqq|f'(\vartheta\cdot(t-r))|\int_0^{t-r}\frac{d\tau}{r^k}=\frac{t-r}{r^k}\,|f'(\vartheta\cdot(t-r))|,$$

woraus

$$r^{2k}|I_k(t,r)|\leqq\frac{(t-r)\,r^k}{2k}\,|f'(\vartheta\cdot(t-r))|$$

folgt. Man hat also

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{2k}|I_k(t,r)|=0.$$

Demnach ist

$$\lim_{r\downarrow 0} r^k u^{(k)}(t,r)=\frac{2^k}{2k}\int_0^t(t-\tau)^k f'(\tau)\,d\tau.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, abgesehen von einem Faktor, das k-te iterierte Integral von $f(\lambda)$. Demnach ist [mit $f(0)=0$]

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\lim_{r\downarrow 0} r^k u^{(k)}(t,r)\right]=2^{k-1}(k-1)!\,f(t),$$

womit unsere Behauptung in den Fällen $k=1,2,\ldots$ bewiesen ist. Etwas anders verläuft der Beweis des Satzes für $k=0$:

Aus (1) ergibt sich nach Ausführung der Substitution $t-\tau=r\sigma$

$$u^{(0)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{f(t-r\sigma)}{\sqrt{\sigma^2-1}}\,d\sigma$$

und unter Beachtung von $f(0)=0$

$$-u_r^{(0)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}}f'(t-r\sigma)\,d\sigma,$$

oder nach Ausführung einer partiellen Integration

$$-u_r^{(0)}(t,r)=\frac{1}{r}\sqrt{t^2-r^2}\,f'(0)+r\int_1^{t/r}\sqrt{\sigma^2-1}\,f''(t-r\sigma)\,d\sigma.$$

Führt man hier wieder $\tau=t-r\sigma$ als Integrationsvariable ein[1]), so erhält man nach Multiplikation mit r

$$-r\,u_r^{(0)}(t,r)=\sqrt{t^2-r^2}\,f'(0)+\int_0^{t-r}\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\,f''(\tau)\,d\tau$$

und

$$\begin{aligned}-\lim_{r\downarrow 0} r\,u_r^{(0)}(t,r)&=t\,f'(0)+\int_0^t(t-\tau)\,f''(\tau)\,d\tau\\&=t\,f'(0)+(t-\tau)\,f'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+\int_0^t f'(\tau)\,d\tau\\&=f(t).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz auch für $k=0$ bewiesen.

Wir wollen noch bemerken, daß die unter (1) stehenden Integrale auch für beliebige reelle Werte des Separationsparameters k Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten sind, denn bei dem in [3] für Satz 1 gegebenen Beweis wird nicht benutzt, daß k ganz ist. Wegen $u^{(k)}(t,r)=u^{(-k)}(t,r)$, eine Beziehung, die in (1) weniger deutlich wird, aus (2) hingegen sofort abgelesen werden kann, kann man k jedoch auf nichtnegative, reelle Werte beschränken. Die in diesen Fällen der zweiten der in dem obigen Satz angegebenen Umkehrformeln entsprechenden Beziehungen können unter Verwendung der bekannten Integraldarstellung für die Ableitung nichtganzer Ordnung sofort angeschrieben werden.

Literatur

[1] Sauer, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Berlin 1951. — [2] Sauer, R.: Supersonic flow past slender bodies of arbitrary shape, ARDC Contract No. AF 61 (514)—1080, Technical note no. 1. München 1957. — [3] Suschowk, D.: Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung usw. Math. Z. **68**, 340—361 (1958).

[1]) Man kann diese und die vorangehende Substitution vermeiden und die r-Differentiation an (1) direkt ausführen, wenn man die Hadamardschen „parties finies" divergenter Integrale oder etwa die Theorie der Distributionen heranzieht. Wir glauben aber, hier auf diese Hilfsmittel verzichten zu können.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

NASTOLD, H.-J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 366–394 (1958)

Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. I

Von
HANS-JOACHIM NASTOLD

Einleitung

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil (§ 1 und § 2) wird am Beispiel der in engem Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf Riemannschen Flächen stehenden Riemannschen Funktionssysteme — das sind gewisse auf der universellen Überlagerungsfläche einer punktierten Riemannschen Fläche meromorphe Funktionenvektoren, die bei Anwendung einer Deckbewegung sich mit einer konstanten, zu einem vorgegebenen Homomorphismus der Deckbewegungsgruppe in die lineare Gruppe gehörenden Matrix multiplizieren — dargelegt, wie Fragen der klassischen Funktionentheorie sich entsprechenden Fragen über komplex-analytische Vektorraumbündel unterordnen lassen.

Schon verschiedentlich wurde ein Teil der Theorie der algebraischen Funktionen, man kann ihn den additiven Teil nennen, auf allgemeinere Klassen von Funktionen bzw. Funktionenvektoren übertragen. Stets sind dies Vektorräume über einem Körper K auf einer kompakten Riemannschen Fläche meromorpher Funktionen, und zu jeder solchen Klasse gibt es eine ihr in natürlicher Weise zugeordnete duale Klasse. Ferner ist für die Elemente dieser Klassen ein Holomorphiebegriff definiert. Dann gilt 1. ein Existenzsatz, der die Existenz hinreichend vieler über K linear unabhängiger Elemente der Klasse sicherstellt, 2. ein Endlichkeitssatz, der besagt, daß es nur endlich viele über dem Körper der komplexen Zahlen linear unabhängige überall holomorphe Elemente der Klasse gibt, 3. ein Riemann-Rochscher Satz, der die Anzahl linear unabhängiger holomorpher Elemente der einen Klasse mit der Anzahl linear unabhängiger holomorpher Differentiale der dualen Klasse in Beziehung setzt, 4. ein sog. inhomogener Riemann-Rochscher Satz, der angibt, unter welchen Bedingungen es zu vorgegebenen Hauptteilen Elemente der Klasse gibt. Bei näherer Betrachtung lassen sich nun die genannten Klassen als komplex-analytische Vektorraumbündel über kompakten Riemannschen Flächen, ihre Elemente als meromorphe Schnitte dieser Vektorraumbündel auffassen. 1. bis 4. gilt allgemein für solche Vektorraumbündel.

Die angeführten Aussagen lassen sich zum Teil verallgemeinern auf komplex-analytische Vektorraumbündel über kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten X beliebiger Dimension. So ist 1. enthalten in Ergebnissen von SERRE [*12*], falls X algebraisch ist. 2. wurde von CARTAN-SERRE [*5*], [*4*] und

3. von HIRZEBRUCH [6] für algebraisches X in allgemeiner Form bewiesen. Der 2. Teil dieser Arbeit möchte einen Beitrag zu 4. liefern. Er befaßt sich mit Schnitten komplex-analytischer Vektorraumbündel zu vorgegebenen Singularitäten. Die Methoden, die dabei zur Anwendung kommen, sind einmal die Garbentheorie und die Cohomologie mit Koeffizienten in Garben, dann die Theorie der harmonischen Integrale. Die letztere, von KODAIRA [7] auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zur Konstruktion von harmonischen Formen mit gegebenen Singularitäten angewandt, kann als eine natürliche Verallgemeinerung der in H. WEYLs „Idee der Riemannschen Fläche" dargelegten Methoden auf höhere Dimension angesehen werden. Wesentlich ist auch die Verwendung von Strömen (Courants im Sinne von DE RHAM und L. SCHWARTZ). — Aus diesen allgemeinen Sätzen erhält man schließlich im Fall der Dimension 1 mannigfaltige Existenzaussagen. Insbesondere ergibt sich hier der Existenzsatz 1. aus 2. und 4.

Im einzelnen knüpft § 1 an die klassische Theorie der Fuchsschen Differentialgleichungen — sogleich auf Riemannschen Flächen entwickelt — an und führt zu den Riemannschen Klassen, einem markanten Beispiel von Klassen obengenannter Art. § 2 diskutiert dann ausführlich die Unterordnung der Riemannschen Klassen unter die allgemeineren komplex-analytischen Vektorraumbündel. Anders als bei H. RÖHRL [10], wo dieselbe Frage behandelt wird, schließen wir das Vektorraumbündel über der in den Verzweigungspunkten punktierten Riemannschen Fläche unmittelbar zu einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über der ganzen Fläche ab. Dies gelingt allein durch elementare lokale Betrachtungen, die an das bekannte Verhalten der Lösungsbasen von Differentialgleichungen in der Umgebung einer singulären Stelle der Differentialgleichung anknüpfen. So vermeidet man im eigentlich interessanten Fall einer kompakten Riemannschen Fläche die Heranziehung tieferliegender Resultate über Vektorraumbündel über nichtkompakten Flächen und erhält zudem auch in den Verzweigungspunkten eine vollständige Übersicht über die Zuordnung Riemannscher Funktionssysteme zu meromorphen Schnitten des Vektorraumbündels W. Interessiert man sich lediglich für den oben unter 1. genannten Existenzsatz, oder — was damit gleichbedeutend ist — für das Riemannsche Umkehrproblem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, so kann man sich nach dieser Zurückführung auf Sätze von SERRE ([12], Lemma 8, S. 24) berufen und ist damit fertig. Wir verschärfen im 2. Teil die Frage nach der Existenz hinreichend vieler meromorpher Schnitte zu der Frage nach solchen mit vorgegebenen Hauptteilen, die sogleich über kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension behandelt wird.

§ 1. Fuchssche Differentialgleichungen. Riemannsche Klassen

1.1. Differentialgleichungen auf Riemannschen Flächen

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist eine (kompakte oder nichtkompakte) Riemannsche Fläche X. K sei der Körper der auf X meromorphen

Funktionen. Er enthält den Konstantenkörper C der komplexen Zahlen. Aus einer meromorphen Funktion $k \in K$ erhält man ein (auf X) meromorphes Differential dk, das sich in einer Umgebung U_x des Punktes $x \in X$ in einer Ortsuniformisierenden t in der Form $dk = \frac{dk}{dt} \cdot dt$ darstellen läßt. Alle meromorphen Differentiale auf X bilden einen Vektorraum über K der Dimension 1.

Eine *Differentiation* wird auf X durch ein *festes* meromorphes Differential ω definiert[1]): Ist f eine in einer offenen Menge $U \subset X$ meromorphe Funktion, so verstehen wir unter der Ableitung f' von f nach ω die Funktion $f' = \frac{df}{\omega}$. f' ist meromorph in U und drückt sich in einer Ortsuniformisierenden t in einer Umgebung U_x wie folgt aus: Mit $\omega = g(t) \cdot dt$, $g(t)$ meromorph, $df = \frac{df}{dt} \cdot dt$ in U_x ist $f' = \frac{df}{\omega} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{1}{g(t)}$ in U_x. f' ist — wie es sein muß — unabhängig von der Wahl der Ortsuniformisierenden t und unterscheidet sich in U_x von der Ableitung $\frac{df}{dt}$ nach derselben nur um den Faktor $\frac{1}{g(t)}$, der holomorph und $\neq 0$ ist an jeder Stelle, die weder Null- noch Polstelle von ω ist. Für die so definierte Differentiation gelten die üblichen Rechenregeln $(f+g)' = f'+g'$, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ für $c \in C$, $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$. Aus $f' = 0$ in einer offenen zusammenhängenden Menge $U \subset X$ folgt $f = c$, $c \in C$. f'', f''', …, $f^{(q)}$ bezeichnet die 2-fach, 3-fach, …, q-fach iterierte Ableitung von f.

Das Verschwinden der q-reihigen Wronskischen Determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_q) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_q \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_q' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_q'' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(q-1)} & f_2^{(q-1)} & \cdots & f_q^{(q-1)} \end{vmatrix}$$

eines Systems von q meromorphen Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_q$ in einem offenen zusammenhängenden $U \subset X$ ist mit der linearen Abhängigkeit der $f_1, f_2, \ldots, f_q$ über C gleichbedeutend.

Gegenstand unserer Untersuchungen sind zunächst *lineare, homogene Differentialgleichungen* q-ter Ordnung *mit meromorphen Koeffizienten:*

$$(1) \qquad y^{(q)} + k_1 y^{(q-1)} + \cdots + k_{q-1} y' + k_q y = 0, \qquad k_1, \ldots, k_q \in K.$$

Eine in einem offenen $U \subset X$ meromorphe Funktion f heißt *Lösung* von (1), wenn die nach obiger Definition gebildeten Ableitungen f', f'', …, $f^{(q)}$ von f, in (1) eingesetzt, die Gleichung befriedigen.

---

[1]) Ist X als Riemannsche Fläche über der z-Kugel gegeben, so kann man nach dz differenzieren, d.h. man setzt dann $\omega = dz$; genauer gesagt: ω ist das (hier gleich bezeichnete) auf die Fläche X übertragene meromorphe Differential dz der z-Kugel.

An jeder Stelle $x \in X$ kann man in einer Ortsuniformisierenden t in einer Umgebung U_x (1) in die Form

$$\frac{d^q y}{dt^q} + l_1 \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \cdots + l_{q-1} \frac{dy}{dt} + l_q y = 0, \tag{2}$$

$l_1(t), \ldots, l_q(t)$ meromorph in U_x, umschreiben. Die Stelle x heißt eine *reguläre Stelle* der Differentialgleichung (1), wenn die $l_1, \ldots, l_q$ dort holomorph sind; andernfalls heißt x eine *singuläre Stelle* von (1). Diese Definitionen hängen offenbar nicht von der Wahl der Ortsuniformisierenden t in x ab.

Jede kompakte Teilmenge von X enthält nur endlich viele singuläre Stellen der Differentialgleichung (1). Sie werden mit a_λ, $\lambda \in \Lambda$ (abzählbar), bezeichnet. $\overline{X} = X - \{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ ist das *Regularitätsgebiet* von (1).

1.2. Lösungsbasen. Fuchssche Differentialgleichungen

Die Menge der Lösungen von (1) in einer einfach zusammenhängenden Umgebung $U_x \subset \overline{X}$ eines regulären Punktes $x \in \overline{X}$ bildet einen Vektorraum über C der Dimension q in U_x holomorpher Funktionen. Eine Basis desselben heißt eine *Lösungsbasis*. Wir fassen die q Funktionen $f^1, \ldots, f^q$ einer solchen zu einem *Vektor*[2]) $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^q \end{pmatrix}$ zusammen. Ein Vektor heiße meromorph, holomorph, längs eines Weges fortsetzbar usw., wenn entsprechendes für seine Komponenten gilt. $\mathfrak{f}$ sowie jede Lösung f von (1) in U_x ist längs beliebiger in x beginnender Wege w in $\overline{X}$ holomorph fortsetzbar, und $\mathfrak{f}$ bleibt dabei eine Lösungsbasis, f eine Lösung von (1). Fortsetzung von $\mathfrak{f}$ bzw. f längs eines geschlossenen, nicht nullhomotopen Weges w ergibt bei Rückkehr nach x im allgemeinen eine andere Lösungsbasis $\tilde{\mathfrak{f}}$ bzw. eine andere Lösung $\tilde{f}$ von (1). Da $\mathfrak{f}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}$ aber beide Lösungsbasen von (1) in U_x darstellen, gilt

$$\tilde{\mathfrak{f}} = A_w \mathfrak{f} \text{ mit einer Matrix } A_w = (a_{\nu\mu}),\ a_{\nu\mu} = \text{const},\ \det(a_{\nu\mu}) \neq 0. \tag{3}$$

A_w heißt die *Umlaufsubstitution von* $\mathfrak{f}$ *längs* w. Sie hängt nur von der Homotopieklasse $[w]$ des Weges w ab.

Wählt man einen festen Punkt $x_0 \in \overline{X}$, eine einfach zusammenhängende Umgebung $U_{x_0} \subset \overline{X}$ und eine Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ der Differentialgleichung (1) in U_{x_0}, so gehört nach (3) zu jeder Homotopieklasse $[w]$ von geschlossenen Wegen w in $\overline{X}$ mit Anfangs- und Endpunkt x_0, also zu jedem Element der Wegegruppe $\pi_1(\overline{X}, x_0)$ von $\overline{X}$ zum Basispunkt x_0, eine nichtsinguläre Matrix A_w. Fortsetzung von $\mathfrak{f}$ erst längs des Weges w_1, danach längs des Weges w_2 liefert zuerst $\tilde{\mathfrak{f}} = A_{w_1}\mathfrak{f}$, sodann $\tilde{\tilde{\mathfrak{f}}} = A_{w_1}(A_{w_2}\mathfrak{f}) = (A_{w_1}A_{w_2})\mathfrak{f}$. Mit $w_1 w_2$ als Produkt in der Wegegruppe hat man also $A_{w_1 w_2} = A_{w_1} A_{w_2}$, d.h. durch (3) wird ein Homomorphismus $\chi: \pi_1(\overline{X}, x_0) \to GL(q, C)$ definiert. χ beschreibt die *Monodromiegruppe von* $\mathfrak{f}$, die man auch die *Monodromiegruppe der Differentialgleichung* (1)

[2]) Vektoren schreiben wir im folgenden immer als Spaltenvektoren.

nennt [Wahl einer anderen Lösungsbasis von (1) in U_{x_0} ändert χ nur um einen inneren Automorphismus von $GL(q,C)$ ab].

Wir schränken die Menge der betrachteten Differentialgleichungen (1) ein, indem wir an ihre Lösungen in den singulären Stellen a_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine Forderung stellen. Es sei f eine solche Lösung, $t(x)$ eine Ortsuniformisierende in einer Umgebung von a_λ mit $t(a_\lambda) = 0$, $\dot{U}$ eine in a_λ punktierte kleine Kreisscheibe (in t) um a_λ. f, im allgemeinen nicht eindeutig in $\dot{U}$, ist längs beliebiger Wege in $\dot{U}$ holomorph fortsetzbar, wird also zu einer auf der universellen Überlagerungsfläche $\hat{\dot{U}}$ von $\dot{U}$ eindeutigen holomorphen Funktion. $\hat{\dot{U}}$ wird beschrieben durch $t = \varrho \cdot e^{i\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Def. 1. *f verhält sich in a_λ bestimmt*, wenn es für feste φ, ψ stets eine ganze Zahl m gibt mit $f(t)\,t^m \to 0$ für $t \to 0$ in $\varphi < \arg t < \psi$.

Bestimmt verhalten sich in a_λ die Funktionen t^α, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\log t$, sowie jede in $\dot{U}$ eindeutige Funktion, die in a_λ höchstens einen Pol besitzt. Umgekehrt hat eine in $\dot{U}$ eindeutige meromorphe Funktion, die in a_λ bestimmt ist, höchstens einen Pol in a_λ, ist also meromorph in U_{a_λ}. Summe und Produkt in a_λ bestimmter Funktionen sind wieder bestimmt. Vgl. dazu [*11*].

Def. 2. Eine singuläre Stelle a_λ der Differentialgleichung (1) heißt *schwach singulär*, wenn sich alle ihre Lösungen in a_λ bestimmt verhalten. Differentialgleichungen, deren sämtliche singuläre Stellen a_λ, $\lambda \in \Lambda$, schwach singulär sind, heißen vom *Fuchsschen Typ*.

Wir beschränken uns im folgenden auf Fuchssche Differentialgleichungen. Die Eigenschaft einer singulären Stelle a_λ der Differentialgleichung (1), schwach singulär zu sein, läßt sich aus ihren Koeffizienten ablesen:

Satz 1 (FUCHS). *Eine singuläre Stelle a_λ ist genau dann schwach singulär, wenn in einer Ortsuniformisierenden $t(x)$ in U_{a_λ}, $t(a_\lambda) = 0$, der μ-te Koeffizient $l_\mu(t)$ der umgeschriebenen Differentialgleichung* (2) *höchstens einen Pol μ-ter Ordnung in a_λ besitzt,* (2) *sich also in der Form*

$$\frac{d^q y}{dt^q} + \frac{h_1}{t} \cdot \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \cdots + \frac{h_\mu}{t_\mu} \cdot \frac{d^{q-\mu} y}{dt^{q-\mu}} + \cdots + \frac{h_{q-1}}{t^{q-1}} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{h_q}{t^q} \cdot y = 0$$

mit in a_λ holomorphen $h_\mu(t)$ schreiben läßt. Vgl. [*1*], [*11*].

Wir stellen die Eigenschaften einer Lösungsbasis einer Fuchsschen Differentialgleichung zusammen. Wie oben sei $x_0 \in \overline{X}$, dem Regularitätsgebiet der Fuchsschen Differentialgleichung (1), mit einfach zusammenhängendem $U_{x_0} < \overline{X}$ und $\mathfrak{f}$ eine Lösungsbasis von (1). Dann gilt

1. $\mathfrak{f}$ ist ein holomorpher Vektor in U_{x_0} mit über C linear unabhängigen Komponenten.

2. $\mathfrak{f}$ ist längs beliebiger in x_0 beginnender Wege in $\overline{X}$ holomorph fortsetzbar.

3. Bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges w geht $\mathfrak{f}$ in $\tilde{\mathfrak{f}} = \chi(w)\mathfrak{f}$ über, wo χ die Monodromie von $\mathfrak{f}$, einen Homomorphismus von $\pi_1(\overline{X}, x_0)$ in $GL(q, C)$, darstellt.

4. $\mathfrak{f}$ verhält sich bestimmt an allen Stellen a_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Ausgehend von der Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ mit den Komponenten $f^1, \ldots, f^q$ kommt man wieder zur Differentialgleichung (1), indem man bildet

$$\frac{W(y, f^1, f^2, \ldots, f^q)}{W(f^1, f^2, \ldots, f^q)} = 0. \tag{4}$$

Entwicklung der Zählerdeterminante nach der ersten Spalte zeigt nämlich, daß (4) eine lineare homogene Differentialgleichung q-ter Ordnung darstellt, deren Koeffizienten längs beliebiger Wege in $\overline{X}$ meromorph fortsetzbar sind [als Quotienten holomorpher Funktionen; die $f^1, \ldots, f^q$ sind in $\overline{X}$ holomorph fortsetzbar, $W(f^1, \ldots, f^q) \not\equiv 0$, da $f^1, \ldots, f^q$ über C linear unabhängig]. Sie sind aber sogar eindeutig in $\overline{X}$, da bei Durchlaufen eines geschlossenen Weges w Zähler- und Nennerdeterminante jedes Koeffizienten die Determinante $\det(A_w) \neq 0$ der Umlaufsubstitution A_w aufnehmen. Bleibt noch zu zeigen, daß sie an jeder Stelle a_λ, $\lambda \in \Lambda$, sich bestimmt verhalten. Das gilt sicher von den Zähler- und Nennerdeterminanten als Summe von Produkten in a_λ bestimmter Funktionen $f^1, \ldots, f^q$. Die Nennerdeterminante $W(f^1, \ldots, f^q)$ multipliziert sich bei Umlauf längs eines Weges w in $\dot{U}$ um a_λ mit der Zahl $a = \det(A_w)$. Ebenso verhält sich die Funktion t^α mit $\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log a$, t wie oben Ortsuniformisierende in a_λ. $W(f^1, \ldots, f^q)\, t^{-\alpha} = g$ ist also eindeutig in $\dot{U}$ und bestimmt in a_λ, also meromorph in U_{a_λ}. Folglich ist auch $\frac{1}{W(f^1, \ldots, f^q)} = t^{-\alpha} \cdot \frac{1}{g}$ bestimmt in a_λ, und somit jeder Koeffizient meromorph in U_{a_λ}. Die Koeffizienten der Differentialgleichung (4) sind also meromorph in ganz X, also aus K. Sie besitzt $f^1, \ldots, f^q$ als Lösungsbasis. Dadurch ist eine lineare, homogene Differentialgleichung eindeutig bestimmt, (4) stimmt also mit der ursprünglichen Differentialgleichung (1) überein.

Ist umgekehrt zu einem $\overline{X} = X - \{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ ein Vektor $\mathfrak{f}$ mit den Eigenschaften 1. bis 4. gegeben, so erhält man, wie wir eben sahen, in der Form (4) eine Fuchssche Differentialgleichung, die $\mathfrak{f}$ als Lösungsbasis besitzt. Diese kann allerdings außerhalb $\{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ noch weitere singuläre Stellen besitzen, nämlich dort, wo $W(f^1, \ldots, f^q)$ verschwindet oder das feste Differential ω, nach welchem wir differenzieren, eine Pol- oder Nullstelle hat. Diese singulären Stellen sind insofern nicht wesentlich, als die Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ bei Umlauf um dieselben die Einsmatrix aufnimmt. Weitere solche nicht wesentlich singulären Stellen der zugehörigen Differentialgleichung (4) außerhalb $\{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ können entstehen, wenn man bei den Forderungen an den Vektor $\mathfrak{f}$ in 1. und 2. jeweils „holomorph" durch „meromorph" ersetzt. Sämtliche solche singulären Stellen der Differentialgleichung (4) sind jedoch schwach singulär, da $\mathfrak{f}$ dort in einer Umgebung eindeutig und meromorph ist. Mit

Def. 3. Eine singuläre Stelle a_λ einer Fuchsschen Differentialgleichung (1) heißt *wesentlich*, wenn nicht alle ihre Lösungen in einer punktierten Umgebung U_{a_λ} eindeutig sind,

können wir also zusammenfassend formulieren

Satz 2. *Gegeben sei eine Fuchssche Differentialgleichung* (1) *auf* X. $\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset X$ *sei eine Menge mit den Eigenschaften: a) Jede wesentlich singuläre Stelle von* (1) *ist ein* a_λ. *b) Jede kompakte Teilmenge von* X *enthält nur endlich viele* a_λ. *Ist* $\overline{X}=X-\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ *und* $x_0\in\overline{X}$ *mit einfach zusammenhängendem* $U_{x_0}\subset\overline{X}$, *dann hat jede Lösungsbasis* $\mathfrak{f}$ *von* (1) *die Eigenschaften*

1. $\mathfrak{f}$ *ist ein meromorpher Vektor in* U_{x_0} *mit über* C *linear unabhängigen Komponenten.*

2. $\mathfrak{f}$ *ist längs beliebiger in* x_0 *beginnender Wege in* $\overline{X}$ *meromorph fortsetzbar.*

3. *Es gibt einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus* $\chi:\pi_1(\overline{X}, x_0)\to GL(q, C)$, *so daß bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges* $w\in\pi_1(\overline{X}, x_0)$ $\mathfrak{f}$ *in* $\tilde{\mathfrak{f}}=\chi(w)\,\mathfrak{f}$ *übergeht.*

4. $\mathfrak{f}$ *verhält sich bestimmt an allen Stellen* a_λ, $\lambda\in\Lambda$.

Umgekehrt gilt

Satz 3. *Ist auf einer Riemannschen Fläche* X *eine Menge* $\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset X$ *gegeben, so daß jede kompakte Teilmenge von* X *nur endlich viele* a_λ *enthält, ist ferner für* $x_0\in\overline{X}=X-\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ *ein Homomorphismus* $\chi:\pi_1(\overline{X}, x_0)\to GL(q, C)$ *gegeben, so gehört zu jedem Vektor* $\mathfrak{f}$ *mit den Eigenschaften 1. bis 4. eine (eindeutig bestimmte) Fuchssche Differentialgleichung* (1) *auf* X, *die* $\mathfrak{f}$ *als Lösungsbasis mit der Monodromie* χ *besitzt und deren wesentlich singuläre Stellen in* $\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ *enthalten sind.*

Frage (Umkehrproblem): Gibt es Fuchssche Differentialgleichungen auf X mit vorgegebener Menge $\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ und vorgegebener Monodromie $\chi:\pi_1(\overline{X}, x_0)\to GL(q, C)$? Nach Satz 3 können wir statt dessen auch nach einem Vektor $\mathfrak{f}$ mit 1. bis 4. fragen.

Über Fuchssche Differentialgleichungen vgl. man [*1*], [*11*].

1.3. Riemannsche Klassen

Wichtige Eigenschaften Fuchsscher Differentialgleichungen hängen nur von der Monodromiegruppe ab, so z.B. die elementare Auflösbarkeit und die Reduzibilität. Man hat daher Fuchssche Differentialgleichungen mit derselben Monodromiegruppe zu Klassen zusammengefaßt. Nach den Sätzen 2 und 3 wird man zweckmäßig die Lösungsbasen, also Vektoren mit gewissen Eigenschaften, zu Klassen zusammenfassen. Wie sich sogleich zeigen wird, ist es sinnvoll, dabei die Forderung unter Punkt 1. in Satz 2 an $\mathfrak{f}$, über C linear unabhängige Komponenten zu besitzen, fallen zu lassen.

Def. 4. Auf einer Riemannschen Fläche X sei eine Menge $\{a_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset X$ und ein Homomorphismus χ wie in Satz 3 gegeben. Durch diese Daten wird

eine *Riemannsche Klasse R* definiert. Ein Vektor $\mathfrak{f}$ gehört genau dann zu R, wenn $\mathfrak{f}$ mit dem gegebenen χ die Eigenschaften 1. bis 4. in Satz 2 besitzt mit Ausnahme der Forderung in 1.: $\mathfrak{f}$ soll über C linear unabhängige Komponenten besitzen.

Die a_λ, $\lambda \in \Lambda$, heißen die *Verzweigungspunkte*, χ heißt die *Monodromie* der Klasse R.

Satz 4. *Die Vektoren einer Riemannschen Klasse R bilden einen Vektorraum über K. Genau diejenigen $\mathfrak{f} \in R$, deren Komponenten über C linear unabhängig sind, sind die Lösungsbasen der Fuchsschen Differentialgleichungen mit der Monodromie χ.*

Bemerkung. Hätte man nur die letzteren in die Klasse R aufgenommen, so wäre R kein Vektorraum über K geworden.

Wichtige Sonderfälle Riemannscher Klassen sind die *algebraischen Klassen*. Diese entsprechen den relativ zu X verzweigten, unbegrenzten und endlichblättrigen Überlagerungsflächen X' von X. Die Verzweigungspunkte von X' über X ergeben die Verzweigungspunkte der entsprechenden Klasse R, der Homomorphismus $\chi: \pi_1(\overline{X}, x_0) \to GL(q, C)$ (X' sei q-blättrig über X) ergibt sich aus der Vertauschung der Blätter über x_0, die zu einem Weg $w \in \pi_1(\overline{X}, x_0)$ gehört. Die $\chi(w) \in GL(q, C)$ sind Vertauschungsmatrizen: Jede Zeile und jede Spalte enthält genau eine Eins, sonst lauter Nullen. Man kann dann einen K-Isomorphismus stiften zwischen dem Körper K' der auf X' meromorphen Funktionen, aufgefaßt als Vektorraum über K, und der Klasse R: Einer Funktion auf X' werden ihre q, den q Blättern von X' über X entsprechenden Zweige über X als Komponenten eines Vektors von R zugeordnet.

Neben den *Funktionen* einer Klasse R — so wollen wir im folgenden die Vektoren $\mathfrak{f} \in R$, deren Komponenten ja meromorphe Funktionen sind, nennen — interessieren die Differentiale von R. Ein *Differential* $\mathfrak{d} \in R$ ist ein Vektor, dessen q Komponenten meromorphe Differentiale sind: $\mathfrak{d} = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \vdots \\ \delta^q \end{pmatrix}$, mit den entsprechenden Eigenschaften, wie sie in Def. 3 für Funktionen gefordert werden (Def. 1 des bestimmten Verhaltens an einer Stelle a_λ läßt sich unverändert für Differentiale übernehmen).

Satz 5. *Die Differentiale einer Riemannschen Klasse R bilden einen Vektorraum über K. Man erhält ein $\mathfrak{d} \in R$, indem man ein $\mathfrak{f} \in R$ (komponentenweise) mit einem auf X meromorphen Differential π multipliziert.*

Im Falle einer algebraischen Klasse R ist der Vektorraum über K der meromorphen Differentiale auf X' wieder K-isomorph dem Vektorraum der Differentiale von R vermöge der entsprechenden Zuordnung wie oben für Funktionen.

Der Riemannschen Klasse R stellt man die *duale Klasse* R^* zur Seite. R und R^* haben dieselben Verzweigungspunkte $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$. Ist $\chi_R: \pi_1(\overline{X}, x_0) \to$

$GL(q, C)$ die Monodromie von R, so ist die Monodromie χ_{R^*} von R^* folgendermaßen definiert:

$$\chi_{R^*}(w) = {}^t(\chi_R(w))^{-1} = (\chi_R(w))^*.\ ^{3})$$

Zwischen R und R^* kann man ein Produkt erklären: Für $\mathfrak{f} \in R$, $\mathfrak{f}^* \in R^*$ setzt man $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^* = {}^t\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*$. $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist längs beliebiger Wege in $\overline{X}$ meromorph fortsetzbar. Bei Durchlaufen eines geschlossenen Weges $w \in \pi_1(\overline{X}, x_0)$ geht $\mathfrak{f}$ in $\tilde{\mathfrak{f}} = \chi_R(w)\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}^*$ in $\tilde{\mathfrak{f}}^* = \chi_{R^*}(w)\mathfrak{f}^*$ über, also $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ in $\tilde{\mathfrak{f}} \wedge \tilde{\mathfrak{f}}^* = {}^t\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{f}}^* = {}^t\mathfrak{f}\,{}^t(\chi_R(w))\,\chi_{R^*}(w)\mathfrak{f}^* = {}^t\mathfrak{f}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$. $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist also auf $\overline{X}$ eindeutig und, weil in den Verzweigungspunkten bestimmt, dort ebenfalls meromorph: $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist meromorph auf X, also $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^* \in K$. — Die duale Klasse einer algebraischen Klasse stimmt mit dieser überein.

Die speziellen algebraischen Klassen legen es nahe, allgemein die Riemannschen Klassen als Verallgemeinerung der Körper auf einer Riemannschen Fläche meromorpher Funktionen anzusehen, und demgemäß auf diese gewisse Fragestellungen und Sätze der Funktionentheorie zu übertragen. Da man in den Klassen nur addieren kann, wird es sich im wesentlichen um die additiven Aussagen handeln. Dies hat R. KÖNIG im Falle Riemannscher Klassen über der z-Kugel in einer Reihe von Arbeiten geleistet. (Vgl. dazu z.B. [8].) Im nächsten Paragraphen werden wir die Riemannschen Klassen in natürlicher Weise einem allgemeineren Begriff unterordnen, für den entsprechende Fragestellungen sinnvoll sind. Aussagen über Riemannsche Klassen erhält man dann durch Spezialisierung. Insbesondere ergibt sich dabei auch der *Existenzsatz*, der unter Berufung auf J. PLEMELJ in den älteren Arbeiten immer vorausgesetzt wurde (vgl. die Fußnote in [15] auf S. 134). Er besagt, daß der Vektorraum der Funktionen einer beliebigen Klasse R, also für beliebig vorgegebene $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, $\chi: \pi_1(\overline{X}, x_0) \to GL(q, C)$, über K die Dimension q besitzt.

Über Riemannsche Klassen vgl. man [8].

§ 2. Vektorraumbündel

2.1. Vorbemerkungen

Im folgenden wird jeder Riemannschen Klasse R über X ein komplexanalytisches Vektorraumbündel W über X zugeordnet, so daß die Vektorräume über K der Funktionen aus R und der meromorphen Schnitte von W isomorph sind. W erhält man folgendermaßen: Zunächst entspricht R auf natürliche Weise ein Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ mit konstanten Koordinatentransformationen. $\overline{W}$ wird dann passend zu einem komplexanalytischen Vektorraumbündel W über X abgeschlossen.

Die Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X}$ mit *konstanten Koordinatentransformationen* sind sämtlich assoziiert zu der universellen Überlagerungsfläche $\hat{X}$ von $\overline{X}$, aufgefaßt als Hauptfaserbündel. Letztere einzuführen legen schon die

[3]) Wir setzen für eine Matrix A ${}^t(A^{-1}) = A^*$; ${}^tA$ transponierte Matrix.

Lösungen der Differentialgleichungen in § 1 und die Riemannschen Klassen R nahe. Die dort betrachteten Funktionen und Differentiale werden nämlich auf $\hat{X}$ erst eindeutig.

Ausgehend von einem festen $x_0 \in \bar{X}$ erhält man $H_{x_0} = \hat{X}$ als Menge der Homotopieklassen von Wegen in $\bar{X}$ mit Anfangspunkt x_0:

$$H_{x_0} = \{[w];\ w = \text{Weg in } \bar{X},\ w(0) = x_0\},$$

$[w]$ = Homotopieklasse von w. H_{x_0} wird in bekannter Weise mit einer Topologie versehen. Die Wegegruppe $G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$ soll *von rechts* auf H_{x_0} operieren. Die Produktdefinition für Wege (vw bedeutet: erst wird der Weg v, dann der Weg w durchlaufen) macht es notwendig, zu definieren

$$(1) \qquad [w] \cdot s = [s^{-1} w], \quad [w] \in H_{x_0}, \quad [s^{-1} w] \in H_{x_0}, \quad s \in G.$$

Dann operiert die mit der diskreten Topologie versehene topologische Gruppe G von rechts auf dem topologischen Raum H_{x_0}, d. h. die Abbildung $([w], s) \to [w] \cdot s$ von $H_{x_0} \times G \to H_{x_0}$ ist stetig, und es gilt

$$([w] \cdot s) \cdot t = [w] \cdot (st) \qquad \text{für } [w] \in H_{x_0},\ s, t \in G,$$

$$[w] \cdot e = [w] \qquad \text{für das Einselement } e \in G.$$

Dadurch wird H_{x_0} zu einem *Hauptfaserraum* im Sinne von [3], exp. VI, 4. Durch das auf H_{x_0} operierende G wird eine Äquivalenzrelation auf H_{x_0} definiert. Die Klassen nach dieser Relation sind die *Fasern* von H_{x_0}. Sie sind sämtlich homöomorph G. Der Quotientenraum H_{x_0}/G ist homöomorph $\bar{X}$. Dieser Homöomorphismus wird induziert durch die *Projektion* $q: H_{x_0} \to \bar{X}$, die $[w] \in H_{x_0}$ seinen Endpunkt zuordnet: $q([w]) = w(1)$. Jedes $s \in G$ definiert einen Homöomorphismus s von H_{x_0} auf sich, $s: [w] \to [w] \cdot s$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{x_0} & \xrightarrow{s} & H_{x_0} \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & \bar{X} & \end{array}$$

kommutativ ist. G läßt sich also als Gruppe der *Deckbewegungen* von $\hat{X}$ über $\bar{X}$ auffassen. Wahl eines anderen Basispunktes $x_1 \in \bar{X}$ ergibt einen anderen Hauptfaserraum H_{x_1}. H_{x_0} und H_{x_1} sind aber $\bar{X}$-*isomorph* im Sinne von [3], exp. VI, 2.

Der Hauptfaserraum H_{x_0} mit der Basis $\bar{X}$ und der Strukturgruppe G ist *lokal trivial* im Sinne von [3], exp. VI, 4. Dazu sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ eine Überdeckung der Basis $\bar{X}$ durch offene, *einfach zusammenhängende* U_i, so daß $U_i \cap U_j$ zusammenhängend ist für alle $i, j \in J$. Zu jedem U_i wählt man nun einen Punkt $x_i \in U_i$ und einen Weg s_i von x_0 nach x_i. Für $u \in U_i$ sei $t_i(u)$ ein Weg von x_i nach u in U_i. Die Homotopieklasse $[t_i(u)]$ ist durch u eindeutig bestimmt. Wir definieren nun folgende eineindeutige Abbildung von

$U_i \times G$ auf $\bar{q}^{-1}(U_i) \subset H_{x_0}: (u, g_i) \to [g_i^{-1} s_i t_i(u)]$. Dadurch wird ein U_i-Isomorphismus des trivialen Hauptfaserraumes $U_i \times G$ mit der Operation $(u, g_i) \cdot s = (u, g_i s)$, $s \in G$, der Gruppe G auf $U_i \times G$ auf den über U_i durch H_{x_0} induzierten Hauptfaserraum $\bar{q}^{-1}(U_i)$ gegeben. H_{x_0} ist somit lokal trivial.

Man kann sich H_{x_0} aus den einzelnen jeweils $\bar{q}^{-1}(U_i)$ U_i-isomorphen Bestandteilen $U_i \times G$ aufgebaut denken. Dazu hat man nur anzugeben, welche Punkte über $u \in U_i \cap U_j$ von $U_i \times G$ und $U_j \times G$ demselben Punkt von H_{x_0} entsprechen. Man hat $(u, g_i) \to [g_i^{-1} s_i t_i(u)]$, $(u, g_j) \to [g_j^{-1} s_j t_j(u)]$ für $u \in U_i \cap U_j$ und erhält aus $[g_i^{-1} s_i t_i(u)] = [g_j^{-1} s_j t_j(u)]$ folgende Beziehung zwischen g_i und g_j:

$$[g_i] = [s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}]\, [g_j]$$

oder

$$[g_i] = g_{ij}(u)\, [g_j] \quad \text{mit} \quad g_{ij}(u) = [s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}] \in G. \tag{2}$$

Die *Koordinatentransformationen* $g_{ij}(u): U_i \cap U_j \to G$ sind stets stetig, hier *konstant* und erfüllen die *Verträglichkeitsbedingung*

$$g_{ij}(u)\, g_{jk}(u) = g_{ik}(u) \qquad \text{für } u \in U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{3}$$

Operiert die (topologische) Gruppe G *von links* auf einem topologischen Raum F, so erhält man zum Hauptfaserraum H mit der Strukturgruppe G einen Faserraum E mit der Strukturgruppe G und der Faser F über derselben Basis B, indem man das kartesische Produkt $H \times F$ bildet und zum Quotientenraum $H \underset{G}{\times} F = E$ von $H \times F$ nach der von rechts vermöge

$$(x, y) \cdot s = (x \cdot s, s^{-1} \cdot y) \qquad \text{für } x \in H,\ y \in F,\ s \in G \tag{4}$$

auf $H \times F$ operierenden Gruppe G übergeht. E ist der *zum Hauptfaserraum H* (und dem Operieren von G auf F) *assoziierte Faserraum* und die Struktur des Faserraumes E mit der Strukturgruppe G wird definiert durch die stetigen Abbildungen: $H \times F \to H \underset{G}{\times} F = E$ und $p: E \to B$, die Projektion auf die Basis. Vgl. dazu [3], exp. VI, 6.

Für *lokal triviale Faserräume* — da wir es im folgenden nur mit solchen zu tun haben, verstehen wir von jetzt ab unter einem Faserraum stets einen lokal trivialen — gibt es wieder eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ der Basis B durch offene U_i, so daß die durch E über U_i induzierten Faserräume $\bar{p}^{-1}(U_i)$ mit der Strukturgruppe G U_i-isomorph den trivialen Faserräumen $U_i \times F$ sind. Die U_i-Isomorphismen $\bar{\varphi}_i^1: U_i \times F \to \bar{p}^{-1}(U_i)$ heißen *lokale Karten* von E. Die zugehörigen Koordinatentransformationen $g_{ij}(u): U_i \cap U_j \to G$ sind dieselben wie diejenigen des Hauptfaserraumes H und bestimmen den Faserraum E eindeutig. Man erhält E, indem man in der topologischen Summe der $\{U_i \times F\}_{i \in J}$ gemäß den g_{ij} über $U_i \cap U_j$ identifiziert. Faserräume E über der Basis B mit der Strukturgruppe G, die auf der Faser F von links operiert, werden daher oft gegeben durch eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ von B und Koordinatentransformationen, also stetigen Abbildungen $g_{ij}: U_i \cap U_j \to G$, die (3) erfüllen. Vgl. [3], exp. VI, 6, [6], § 3 und [13].

Für uns wichtig sind weniger die eben betrachteten stetigen Faserräume als *komplex-analytische Faserräume* oder *Faserbündel*. Man hat dazu nur jeweils „topologischer Raum" durch „komplex-analytische Mannigfaltigkeit", „stetig" durch „holomorph" und „topologische Gruppe" durch „(komplexe) Liesche Gruppe" zu ersetzen. *Strukturgruppe* ist meist *die lineare Gruppe* $GL(q, C)$, die *von links* auf der *Faser* C^q (Vektorraum über C der Dimension q; Vektoren als Spaltenvektoren geschrieben) *bzw.* $GL(q, C)$ *durch Linksmultiplikation* mit den Matrizen aus $GL(q, C)$ *operiert*. Im Falle $F = C^q$ spricht man von *Vektorraumbündeln*. Vgl. dazu [6], S. 48ff.

Ein *Schnitt* s des Faserbündels E, eine stetige (holomorphe) Abbildung $s: B \to E$ mit $p \circ s = 1$ (Identität), wird in den lokalen Karten $\overline{\varphi}_i^{-1}: U_i \times F \to \overline{p}^{-1}(U_i)$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$, also in einem Atlas der Faserstruktur von E, gegeben durch stetige (holomorphe) Abbildungen

$$(5) \qquad s_i: U_i \to F \quad \text{mit} \quad s_i(u) = g_{ij}(u) \cdot s_j(u) \quad \text{für } u \in U_i \cap U_j.$$

Man erhält $s_i(u)$ aus $\varphi_i(s(u)) = (u, s_i(u)) \in U_i \times F$. Für $F = C^q$ ist $s_i(u): U_i \to F$ ein *holomorpher Vektor in* U_i. Entsprechend definieren wir nun in diesem Fall:

Def. 1. Ein *meromorpher Schnitt* eines komplex-analytischen Vektorraumbündels W wird in einem Atlas von W gegeben durch meromorphe Vektoren $\mathfrak{m}_i(u)$ in U_i, $i \in J$, mit $\mathfrak{m}_i(u) = g_{ij}(u)\,\mathfrak{m}_j(u)$ für $u \in U_i \cap U_j$, $g_{ij}(u) \in GL(q, C)$.

Satz 1. *Für einen zum Hauptfaserraum H assoziierten Faserraum E mit der Strukturgruppe G, die von links auf der Faser F operiert, gilt: Die stetigen (holomorphen) Schnitte von E entsprechen eineindeutig den stetigen (holomorphen) Abbildungen f von H in F mit*

$$(6) \qquad f(x \cdot s) = s^{-1} \cdot f(x), \qquad x \in H,\ s \in G.$$

Im Falle eines Vektorraumbündels W mit $F = C^q$ ist f wieder ein holomorpher Vektor auf H mit (6), *und es gilt entsprechend: Die meromorphen Schnitte von W entsprechen eineindeutig den meromorphen Vektoren f auf H mit* (6).

Siehe [3], exp. VII. — Die Schnitte eines Vektorraumbündels lassen sich addieren und mit Konstanten aus C multiplizieren. Sie bilden einen Vektorraum über C.

2.2. Riemannsche Klassen und Vektorraumbündel über $\overline{X}$

Nach diesen Vorbereitungen soll zunächst noch einmal kurz auf die in §1 betrachteten Fuchsschen Differentialgleichungen (1) eingegangen werden. Mit $\overline{X} = X - \{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ bildet man wie in 2.1 $\hat{\overline{X}} = H_{x_0}$, $x_0 \in \overline{X}$. $\hat{\overline{X}}$ ist eine Riemannsche Fläche (komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1) und $G = \pi_1(\overline{X}, x_0)$ operiert von rechts als Gruppe analytischer Homöomorphismen auf $\hat{\overline{X}}$. Die Projektion $q: \hat{\overline{X}} \to \overline{X}$ ist holomorph und lokal homöomorph. In $\overline{X}$ meromorphe Funktionen und Differentiale besitzen ein reziprokes Bild bezüglich q auf $\hat{\overline{X}}$: $\overline{q}^{-1}(f)(\hat{x}) = f \circ q(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\overline{X}}$. Wird auf X nach dem festen Differential ω differenziert, so soll auf $\hat{\overline{X}}$ nach $\overline{q}^{-1}(\omega)$ differenziert werden. Der

Differentialgleichung (1) auf X entspricht die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y^{(q)} + \bar{q}^1(k_1)\, y^{(q-1)} + \cdots + \bar{q}^1(k_{q-1})\, y' + \bar{q}^1(k_q)\, y = 0 \quad \text{auf } \hat{\bar{X}},$$

die dort keine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Eine Lösung von (1) ist eine auf $\hat{\bar{X}}$ eindeutige meromorphe Funktion f, die auf $\hat{\bar{X}}$ (1) erfüllt. Die sämtlichen Lösungen bilden einen Vektorraum L über C der Dimension q. Ist (1) eine Fuchssche Differentialgleichung, so ist $L \subset \hat{K}$, dem *Ring der meromorphen Funktionen auf* $\hat{\bar{X}}$, *die sich in* a_λ, $\lambda \in \Lambda$, *bestimmt verhalten*. Die analytischen Homöomorphismen $s: \hat{x} \to \hat{x} \cdot s$, $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$, $s \in G$, induzieren Automorphismen von $\hat{K}$: Wir definieren das direkte (im Gegensatz zum reziproken) Bild $(f)s$ der auf X meromorphen Funktion f bezüglich s

$$(7) \qquad (f)s(\hat{x}) = f \circ s^{-1}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{\bar{X}},\ s \in G.$$

G operiert von rechts auf $\hat{K}$: $(f)st(\hat{x}) = f \circ (st)^{-1}(\hat{x}) = f \circ (t^{-1}s^{-1})(\hat{x}) = f(\hat{x} \cdot t^{-1}s^{-1})$ $= f\big((\hat{x} \cdot t^{-1}) \cdot s^{-1}\big) = f \circ s^{-1}(\hat{x} \cdot t^{-1}) = (f \circ s^{-1}) \circ t^{-1}(\hat{x}) = \big((f)s\big)t(\hat{x})$. Fixring der Automorphismengruppe G von $\hat{K}$ ist $\bar{q}^1(K) \cong K$. Anwendung von $s \in G$ in der beschriebenen Weise auf ein $f \in L$ ergibt $(f)s \in L$, da die Koeffizienten von (1) bei s fest bleiben. s induziert also einen C-Automorphismus von L. Die dadurch erhaltene *Rechtsdarstellung* der Deckbewegungsgruppe G von $\hat{\bar{X}}$ über $\bar{X}$ im Lösungsraum L von (1) ist die invariante Fassung der *Monodromie* von (1). Auszeichnung einer Basis $\mathfrak{f}$ von L führt zu einem Homomorphismus $\chi: G = \pi_1(\bar{X}, x_0) \to GL(q, C)$ vermöge

$$(8) \qquad (\mathfrak{f})s = \chi(s)\,\mathfrak{f}.$$

Es ist gerade der in 1.2 $\mathfrak{f}$ zugeordnete: Sei dazu $\hat{x}_0$ der über $x_0 \in \bar{X}$ liegende, dem Nullweg entsprechende Punkt von $\hat{\bar{X}} = H_{x_0}$. Dann ist nach (7)

$$(\mathfrak{f})s(\hat{x}_0) = f \circ s^{-1}(\hat{x}_0) = \mathfrak{f}(\hat{x}_0 \cdot s^{-1}) = \mathfrak{f}([s]), \qquad s \in \pi_1(\bar{X}, x_0) \qquad [\text{vgl. 2.1 (1)}],$$

also mit (8) $\mathfrak{f}([s]) = \chi(s)\,\mathfrak{f}(\hat{x}_0)$. — Entsprechend betrachtet man auf Riemannschen Flächen X *Systeme von n linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung für n Funktionen*, die sich bequem mit Differentialformen schreiben lassen. Vgl. dazu [*10*], 1. Eine Lösung ist hier ein Vektor, eine Lösungsbasis eine Matrix vom Typ (n, n). Letztere gibt wieder zur Definition einer Monodromie Anlaß. Man beschränkt sich ebenso auf Systeme mit lauter schwach singulären Stellen, hat hier aber für schwache Singularität kein so einfaches Kriterium in den Koeffizienten wie Satz 1, § 1 [*1*]. Das Umkehrproblem (vgl. 1.2), also die Frage nach einem Fuchsschen System mit vorgegebenen $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ und vorgegebener Monodromie $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \to GL(q, C)$, $x_0 \in \bar{X}$, ist hier gleichbedeutend mit der Suche nach einer meromorphen nicht singulären Matrix $\mathfrak{F}\big(\det(\mathfrak{F}) \not\equiv 0\big)$ auf $\hat{\bar{X}}$, die sich in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, bestimmt verhält, also einer nicht singulären Matrix $\mathfrak{F}$ von Elementen aus $\hat{K}$, mit $(\mathfrak{F})s = \chi(s)\,\mathfrak{F}$, $s \in G$.

Für *Riemannsche Klassen* R mit Verzweigungspunkten $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ und Monodromie $\chi: G \to GL(q, C)$, G Deckbewegungsgruppe von $\hat{\bar{X}}$ über $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, erhält man hier folgende, von x_0 unabhängige

Def. 2. Eine Funktion $\mathfrak{f} \in R$ ist ein Vektor mit Komponenten aus $\hat{K}$, der

$$(\mathfrak{f})\, s = \chi(s)\,\mathfrak{f}, \qquad s \in G \tag{9}$$

erfüllt.

Entsprechend lautet die Definition für Differentiale $\mathfrak{d} \in R$. Nach 1.3 verschiedene Riemannsche Klassen können hier zur selben Klasse führen. Man nennt solche zweckmäßig isomorph.

Wir ordnen der so definierten Klasse R ein *Vektorraumbündel* $\overline{W}$ *über* $\overline{X}$ zu: Dazu fassen wir $\hat{\overline{X}}$ mit der von rechts auf X operierenden Gruppe G als Hauptfaserraum H über der Basis $\overline{X}$ auf. *Vermöge der Monodromie* $\chi: G \to GL(q, C)$ *operiert* G *von links auf der Faser* $F = C^q$:

$$s \cdot \mathfrak{f} = \chi(s)\,\mathfrak{f}, \qquad s \in G,\ \mathfrak{f} \in C^q, \quad \text{Spaltenvektor.} \tag{10}$$

Nach 2.1 erhält man durch Quotientenbildung aus $H \times F$ unmittelbar das H assoziierte komplex-analytische Vektorraumbündel $H \underset{G}{\times} F = \overline{W}$. Für einen zu einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ gehörigen in 2.1 angegebenen Atlas für H_{x_0} wurden dort die Koordinatentransformationen (3) $g_{ij}(u) = [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] \in G = \pi_1(\overline{X}, x_0)$, $u \in U_i \cap U_j$ bestimmt, $g_{ij}(u) = \text{const}$. Daraus erhält man die Koordinatentransformationen h_{ij} für den entsprechenden Atlas des assoziierten Faserraumes $\overline{W}$: $h_{ij}(u) = \chi\big(g_{ij}(u)\big) = \chi\big([s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}]\big) \in GL(q, C)$, $u \in U_i \cap U_j$, ebenfalls *konstant* in $U_i \cap U_j$. Umgekehrt entsteht auch jedes Vektorraumbündel über $\overline{X}$ mit der Strukturgruppe $GL(q, C)$ und konstanten Koordinatentransformationen aus dem Hauptfaserraum $\hat{\overline{X}}$ vermöge eines Homomorphismus $\chi: G \to GL(q, C)$. Es gilt genauer: Die Isomorphieklassen stetiger Faserbündel über $\overline{X}$ mit der mit der diskreten Topologie versehenen topologischen Gruppe $GL(q, C)$ als Strukturgruppe entsprechen eineindeutig den Klassen von Homomorphismen $\chi: G = \pi_1(\overline{X}, x_0) \to GL(q, C)$ unter inneren Automorphismen von $GL(q, C)$. Vgl. [13], § 13, 14.

Die meromorphen Schnitte des komplex-analytischen Vektorraumbündels $\overline{W} = H \underset{G}{\times} F$ entsprechen nach 2.1 Satz 1 eineindeutig den meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ auf $H = \hat{\overline{X}}$ mit $\mathfrak{f}(\hat{x} \cdot s) = s^{-1} \cdot \mathfrak{f}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\overline{X}}$, $s \in G$. Nun bedeutet dies aber mit (7) $(\mathfrak{f})\, s(\hat{x}) = f \circ s^{-1}(\hat{x}) = \mathfrak{f}(\hat{x} \cdot s^{-1}) = s \cdot \mathfrak{f}(\hat{x}) = \chi(s)\,\mathfrak{f}(\hat{x})$, letzteres wegen (10), also kurz $(\mathfrak{f})\, s = \chi(s)\,\mathfrak{f}$, $s \in G$. Dies stimmt mit (9) in Def. 2 überein. Die Funktionen $\mathfrak{f}$ aus der Riemannschen Klasse R entsprechen also eineindeutig meromorphen Schnitten des R zugeordneten Vektorraumbündels $\overline{W}$, nämlich denjenigen, deren zugeordnete meromorphe Vektoren $\mathfrak{f}$ Komponenten aus $\hat{K}$ besitzen, d.h. die sich bestimmt in den a_λ, $\lambda \in \Lambda$, verhalten. Wir wollen hier noch kurz zeigen, wie aus einem solchen $\mathfrak{f}$ auf $\hat{\overline{X}}$ die Darstellungen $\mathfrak{f}_i(u)$, $u \in U_i$ durch meromorphe Vektoren in dem obengenannten Atlas von $\overline{W}$ entstehen, die den meromorphen Schnitt nach 2.1 Def. 1 angeben. Man setzt mit den Bezeichnungen von 2.1 beim Nachweis, daß H_{x_0} lokal trivial ist, für $i \in J$ $\mathfrak{f}_i(u) = \mathfrak{f}\big([s_i t_i(u)]\big)$, $u \in U_i$, $[s_i t_i(u)] \in \hat{\overline{X}}$. $\mathfrak{f}_i(u)$ ist meromorph und ein-

deutig in U_i und erfüllt für $u \in U_i \cap U_j$

$$\mathfrak{f}_i(u) = \mathfrak{f}\left([s_i t_i(u)]\right) = \mathfrak{f}\left([s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1} s_j t_j(u)]\right) = \mathfrak{f}\left([(s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1})\,(s_j t_j(u))]\right)$$
$$= \mathfrak{f}\left([s_j t_j(u)] \cdot [s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}]^{-1}\right) = [s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}] \cdot \mathfrak{f}\left([s_j t_j(u)]\right)$$
$$= \chi\left([s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}]\right) \mathfrak{f}_j(u), \quad [s_i t_i(u)\, t_j^{-1}(u)\, s_j^{-1}] \in G = \pi_1(\overline{X}, x_0),$$

nach 2.1 (1), (6) und (10). Also ist, wie in Def. 1 gefordert, $\mathfrak{f}_i(u) = h_{ij}(u)\,\mathfrak{f}_j(u)$ für $u \in U_i \cap U_j$, $h_{ij}(u) \in GL(q, C)$ die oben angegebenen konstanten Koordinatentransformationen von $\overline{W}$. Nennt man noch einen meromorphen Schnitt von $\overline{W}$ bestimmt in a_λ, wenn dies für die ihn nach Def. 1 darstellenden meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}_i(u)$ für U_i, deren abgeschlossene Hülle a_λ enthält, der Fall ist, so können wir abschließend sagen

Satz 2. *Einer Riemannschen Klasse R über X läßt sich eindeutig ein komplex-analytisches Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X} = X - \{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ zuordnen, so daß der K-Vektorraum der Funktionen $\mathfrak{f} \in R$ isomorph dem K-Vektorraum derjenigen meromorphen Schnitte von $\overline{W}$ ist, die sich in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, bestimmt verhalten.*

2.3. Die Verzweigungspunkte Riemannscher Klassen

Um für das eben der Riemannschen Klasse R zugeordnete Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X}$ die richtige Abschließung in den Verzweigungspunkten a_λ, $\lambda \in \Lambda$, zu einem über ganz X komplex-analytischen Vektorraumbündel W zu finden, sollen hier kurz die im wesentlichen klassischen Ergebnisse über das Verhalten der Funktionen (und entsprechend der Differentiale) aus R in einem festen Verzweigungspunkt a_λ zusammengestellt werden.

U sei eine hinreichend kleine, in einer Ortsuniformisierenden $t(x)$ mit $t(a_\lambda) = 0$ kreisförmige Umgebung von a_λ, $\dot{U} = U - \{a_\lambda\}$, $\hat{\dot{U}}$ die universelle Überlagerungsfläche von $\dot{U}$. Wir können uns auf die Untersuchung auf $\hat{\dot{U}}$ meromorpher Vektoren beschränken. $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{\overline{X}}$ (vgl. 2.1, 2.2) zerfällt nämlich in Komponenten, die jeweils vom Typ $\hat{\dot{U}}$ sind. $\hat{\dot{U}}$ wird uniformisiert durch $w = \log t = \varrho + i\varphi$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Wichtig wird die Betrachtung in a_λ sich bestimmt verhaltender auf $\hat{\dot{U}}$ meromorpher Vektoren $\mathfrak{f}$ sein (vgl. 1.2, Def. 1). Eine auf der gesamten universellen Überlagerungsfläche $\hat{\overline{X}}$ von $\overline{X}$ meromorphe Funktion heißt natürlich nur bestimmt in a_λ, wenn sie in jeder Komponente von $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{\overline{X}}$ bestimmt im Sinne dieser Definition ist. Für Vektoren der Eigenschaft (9) in Def. 2: $(\mathfrak{f})\, s = \chi(s)\,\mathfrak{f}$, $s \in G$, mit einem Homomorphismus $\chi: G \to GL(q, C)$ folgt allerdings die Bestimmtheit von $\mathfrak{f}$ in allen Zusammenhangskomponenten aus der Bestimmtheit in einer solchen, da G die Blätter von $\hat{\overline{X}}$ transitiv permutiert und $\mathfrak{f}$ dabei nur eine konstante Matrix aufnimmt. Die Beschränkung der Betrachtung auf eine Komponente, also auf $\hat{\dot{U}}$, führt zu zyklischer Deckbewegungsgruppe G' von $\hat{\dot{U}}$ über $\dot{U}$. z sei ein erzeugendes Element von G', $A = (a_{\nu\mu}) \in GL(q, C)$, $a_{\nu\mu} = \text{const}$. Wir untersuchen auf $\hat{\dot{U}}$ meromorphe Vektoren $\mathfrak{f}$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{f})\, z = A\,\mathfrak{f}$.

Dazu verschaffen wir uns erst eine *zu A uniformisierende Matrix* $\mathfrak{A}$ [4]). Das soll eine auf $\hat{\hat{U}}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\hat{U}}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ sein. Man findet eine solche, indem man A durch Transformation mit einer Matrix B, $\det(B) \neq 0$, auf Jordansche Normalform bringt: $C = BAB^{-1}$,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad C_\sigma = \left.\begin{pmatrix} \mu_\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mu_\sigma & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \mu_\sigma & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mu_\sigma \end{pmatrix}\right\} l_\sigma$$

$\det(\lambda E - A) = \prod_{\sigma=0}^{s} (\lambda - \mu_\sigma)^{l_\sigma}$, und erst eine auf $\hat{\hat{U}}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\hat{U}}$ mit $(\mathfrak{C})z = C\mathfrak{C}$ sucht. Damit erhält man eine Matrix $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{A} = B^{-1}\mathfrak{C}$. Eine Matrix $\mathfrak{C}$ kann man zusammensetzen aus auf $\hat{\hat{U}}$ holomorphen und holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{C}_\sigma$ mit $(\mathfrak{C}_\sigma)z = C_\sigma \mathfrak{C}_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, s$:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & & & \\ & \mathfrak{C}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{C}_s \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathfrak{C}_\sigma = \Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma$,

$$\Delta_\sigma = \left.\begin{pmatrix} t^{\alpha_\sigma} & & & & \\ & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma^{\nu-1}} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma^{l_\sigma-1}} \end{pmatrix}\right\} l_\sigma, \quad \alpha_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\sigma,$$

$$\mathfrak{D}_\sigma = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ \binom{l}{1} & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \binom{l}{\nu-1} & \binom{l}{\nu-2} \cdots \binom{l}{1} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \binom{l}{l_\sigma-1} & \binom{l}{l_\sigma-2} & \cdots & \binom{l}{1} & 1 \end{pmatrix}\right\} l_\sigma,$$

[4]) Große Buchstaben bezeichnen in diesem Abschnitt Matrizen mit konstanten, große Frakturbuchstaben solche mit veränderlichen Elementen.

$l = l(t) = \frac{1}{2\pi i} \log t$, leisten das Gewünschte: Δ_σ und $\mathfrak{D}_\sigma$ sind beide holomorph auf $\hat{\hat{U}}$ und dort holomorph umkehrbar, Δ_σ als Diagonalmatrix mit Elementen $\neq 0$ und $\mathfrak{D}_\sigma$ als Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale. $\mathfrak{D}_\sigma^{-1}$ ist wieder eine Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale, deren Elemente Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in den Elementen von $\mathfrak{D}_\sigma$, also Polynome in $\log t$ mit konstanten Koeffizienten sind. Es ist $(\log t) z = \log t + 2\pi i$, $(l) z = l + 1$ und damit $\left(\binom{l}{\nu}\right) z = \binom{l}{\nu} + \binom{l}{\nu - 1}$. Also ist

$$(\mathfrak{D}_\sigma) z = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{D}_\sigma$$

und wegen $(t^{\alpha_\sigma}) z = \mu_\sigma t^{\alpha_\sigma}$ $(\mathfrak{C}_\sigma) z = (\Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma) z = (\Delta_\sigma) z\, (\mathfrak{D}_\sigma) z = C_\sigma (\Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma) = C_\sigma \mathfrak{C}_\sigma$, wie gewünscht. Die Exponenten $\alpha_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\sigma$ sind durch diese Formel nur mod 1 bestimmt. Sie werden meist festgelegt durch die *Normierung*

$$0 \leqq \mathrm{Re}\,(\alpha_\sigma) < 1 . \tag{11}$$

Die Exponenten in Δ_σ^{-1} sind dann $-\alpha_\sigma$, also dual normiert $-1 < \mathrm{Re}\,(-\alpha_\sigma) \leqq 0$.

Hilfssatz 1. *Zu A gibt es stets uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$, auf $\hat{\hat{U}}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrizen mit $(\mathfrak{A}) z = A\,\mathfrak{A}$. Man kann eine solche, $\mathfrak{A}_0$, so wählen, daß ihre Elemente von der Form $\sum_{\iota,\mu} c_{\iota\mu} t^{\alpha_\iota} \log^\mu t$ mit konstanten $c_{\iota\mu}$, $0 \leqq \mathrm{Re}\,(\alpha_\iota) < 1$, und die Elemente von $\mathfrak{A}_0^{-1}$ ebenfalls von dieser Form, nur mit $-1 < \mathrm{Re}\,(\alpha_\iota) \leqq 0$, sind. $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0^{-1}$ verhalten sich beide bestimmt in a_λ und $\det(\mathfrak{A}_0) = t^{\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma \alpha_\sigma} \cdot c$, $c \in C$ und $\neq 0$. Aus einer uniformisierenden Matrix zu A, etwa aus $\mathfrak{A}_0$, erhält man alle solchen in der Form $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit auf $\hat{\hat{U}}$ holomorphem und holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$, das $(\mathfrak{E}) z = \mathfrak{E}$ erfüllt, also eindeutig in $\dot{U}$ ist.*

Die Bedeutung der uniformisierenden Matrizen liegt in

Hilfssatz 2. *Die auf $\hat{\hat{U}}$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f}) z = A\,\mathfrak{f}$ entsprechen vermöge $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{f}_\lambda$, $\mathfrak{A}$ eine uniformisierende Matrix zu A, eineindeutig den in $\dot{U}$ meromorphen und dort eindeutigen Vektoren $\mathfrak{f}_\lambda$.*

Nimmt man an Stelle von $\mathfrak{A}$ die oben in Hilfssatz 1 genannte spezielle Matrix $\mathfrak{A}_0$, so ergibt sich durch Zusammenfassen

Hilfssatz 3. *Die Komponenten $f^\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, q$ eines auf $\hat{\hat{U}}$ meromorphen Vektors $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f}) z = A\,\mathfrak{f}$ besitzen Darstellungen als Summen der Form*

$$f^\varkappa = \sum_{\iota,\mu} \psi_{\iota\mu}^{(\varkappa)} t^{\alpha_\iota} \log^\mu t \tag{12}$$

mit in $\dot{U}$ eindeutigen und meromorphen Funktionen $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}(t)$. Die Exponenten sollen dabei verschieden und nach (11) *normiert sein.*

Für solche Darstellungen gilt ein bekannter *Eindeutigkeitssatz* [*11*]:

Hilfssatz 4. *Besitzt eine auf $\hat{\dot{U}}$ meromorphe Funktion $\mathfrak{f}$ eine Darstellung der Form* (12), *so ist diese eindeutig. Die $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$ sind durch $f^{(\varkappa)}$ eindeutig bestimmt.*

Die genannte eindeutige Darstellung der Funktionen $\mathfrak{f}$ einer Riemannschen Klasse R in den logarithmischen Windungspunkten der einzelnen Komponenten von $\vec{q}^{-1}(\dot{U}) < \hat{\dot{X}}$ gestattet es, diese fast wie die gewöhnlichen Punkte einer Riemannschen Fläche zu behandeln. Dies zeigt sich sogleich, wenn wir $\mathfrak{f}$ auf bestimmtes Verhalten untersuchen. Wir betrachten wieder $\hat{\dot{U}}$ und auf $\hat{\dot{U}}$ meromorphe Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$. Es gilt

Hilfssatz 5. *Unter den zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$ sind es genau die in a_λ bestimmten, die die Eigenschaft haben: Die nach Hilfssatz 2 vermöge $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$ bestehende eineindeutige Zuordnung zwischen auf $\hat{\dot{U}}$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$ und in $\dot{U}$ (eindeutigen) meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}_\lambda$ bildet die in a_λ bestimmten $\mathfrak{f}$ auf die in ganz U meromorphen $\mathfrak{f}_\lambda$ ab.*

Beweis. Ist die zu A uniformisierende Matrix $\mathfrak{A}$ bestimmt in a_λ, so gilt dasselbe von $\mathfrak{A}^{-1}$. Nach Hilfssatz 1 ist nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit in $\dot{U}$ eindeutigem holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$. Nun ist wegen $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}$ $\mathfrak{E}$ bestimmt in a_λ, also da in $\dot{U}$ eindeutig, meromorph in a_λ. Dasselbe gilt dann von $\mathfrak{E}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{E}^{-1}$ ist ebenfalls bestimmt und mithin auch die inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{A}_0^{-1}$. Nunmehr sind wegen $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$, $\mathfrak{f}_\lambda = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{-1}$ bestimmt in a_λ, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_\lambda$ beide gleichzeitig bestimmt oder nicht bestimmt in a_λ. Für einen in $\dot{U}$ eindeutigen meromorphen Vektor $\mathfrak{f}_\lambda$ ist jedoch Bestimmtheit in a_λ mit $\mathfrak{f}_\lambda$ meromorph in ganz U (in a_λ können höchstens Pole auftreten) gleichbedeutend.

Nebenbei erhalten wir eine Übersicht über alle zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$, die sich in a_λ bestimmt verhalten: Sie lassen sich darstellen in der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit in $\dot{U}$ eindeutigem, holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$, das *in a_λ meromorph* ist. Ferner kann man sie in *Klassen* einteilen, indem man in eine Klasse alle diejenigen $\mathfrak{A}$ wirft, die sich nur um einen rechtsseitigen Faktor $\mathfrak{E}$ unterscheiden, der *in ganz U holomorph umkehrbar* ist. In derselben Klasse liegende $\mathfrak{A}$ haben sicher dieselbe *Ordnung* $w(\mathfrak{A})$. Darunter verstehen wir die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w(\mathfrak{A})$ mit $\det(\mathfrak{A}) = t^{w(\mathfrak{A})}\varphi(t)$, $\varphi(t)$ holomorph und $\neq 0$ in a_λ. Uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$ mit derselben Ordnung brauchen jedoch keineswegs in derselben Klasse zu liegen. Es ist $w(\mathfrak{A}) = w(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}) = w(\mathfrak{A}_0) + w(\mathfrak{E}) = \sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma \alpha_\sigma +$ ganze Zahl (Hilfssatz 1). Nun ist $\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma \alpha_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma\, l(\mu_\sigma) = l\left(\prod_{\sigma=1}^{s} \mu_\sigma^{l_\sigma}\right) = l\big(\det(A)\big) = \frac{1}{2\pi i}\log\big(\det(A)\big)$, wo ein durch die Normierung $0 \leqq \mathrm{Re}(\alpha_\sigma) < 1$ eindeutig bestimmter Wert des Logarithmus zu nehmen ist. Jedenfalls ist für jedes $\mathfrak{A}$ $w(\mathfrak{A}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\log(\det A) \bmod 1$, und

es gibt offenbar auch zu einer beliebigen Zahl $\frac{1}{2\pi i}\log(\det(A))$ mod 1 zu A uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$ mit dieser Ordnung.

Nimmt man in Hilfssatz 5 wieder die in Hilfssatz 1 genannte spezielle Matrix $\mathfrak{A}_0$, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

Hilfssatz 6. *Die nach Hilfssatz 3 und 4 eindeutige Darstellung der Komponenten eines Vektors* $\mathfrak{f}$ *in der Form* (12) *besitzt genau dann in* a_λ, *also in ganz* U, *meromorphe Koeffizienten* $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}(t)$, *wenn* $\mathfrak{f}$ *sich in* a_λ *bestimmt verhält.*

Daß für in U meromorphe $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$ $f^\varkappa$ und damit $\mathfrak{f}$ sich in a_λ bestimmt verhalten, ergibt sich so: $f^\varkappa$ ist Summe von Produkten in a_λ bestimmter Funktionen. — Entwickelt man die (eindeutig bestimmten) Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}(t)$ in der Darstellung (12) einer Funktion $\mathfrak{f}$ aus einer Riemannschen Klasse R auf einer bestimmten Komponente von $\bar{q}^1(\dot{U}) \subset \hat{\bar{X}}$ in Laurentreihen nach t (mit abbrechendem negativen Ast), so erhält man eine Entwicklung von $\mathfrak{f}$ in dem der Komponente zugehörigen logarithmischen Windungspunkt über a_λ, die den Entwicklungen von $\mathfrak{f}$ in den Punkten von $\bar{x} \in \hat{\bar{X}}$ in Laurentreihen nach den Ortsuniformisierenden zur Seite zu stellen ist.

Ein Element $\mathfrak{f}$ der Riemannschen Klasse R heißt natürlich *holomorph* in $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$, wenn die Komponenten des Vektors $\mathfrak{f}$ dort holomorph sind. Wir setzen nun für die Windungspunkte über a_λ der Komponenten von $\bar{q}^1(\dot{U}) \subset \hat{\bar{X}}$ fest

Def. 3. $\mathfrak{f}$ heißt *holomorph* in dem zur Komponente gehörigen Windungspunkt, wenn in der Darstellung (12) von $\mathfrak{f}$ auf dieser Komponente die Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}(t)$ holomorph in $t=0$, also in a_λ, sind.

Diese Definition ist offenbar unabhängig von der gewählten Ortsuniformisierenden t in a_λ. *Dagegen hängt sie sehr wohl ab von der Normierung* (11) $0 \leqq \mathrm{Re}(\alpha_\sigma) < 1$. — In allen Punkten $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$ mit demselben Spurpunkt $q(\hat{x}) = x$ und in allen logarithmischen Windungspunkten über demselben Verzweigungspunkt a_λ ist $\mathfrak{f}$ stets gleichzeitig holomorph bzw. nicht holomorph [wegen (9) in Def. 2]. Man nennt daher $\mathfrak{f}$ wohl auch holomorph in $x \in \bar{X}$ bzw. in a_λ.

Hilfssatz 7. *Ist* $\mathfrak{f}$ *ein meromorpher Vektor auf* $\hat{\dot{U}}$ *mit* $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$, $\mathfrak{A}$ *eine zu* A *uniformisierende Matrix, dann gilt: Genau für diejenigen* $\mathfrak{A}$, *die der durch* $\mathfrak{A}_0$ *(Hilfssatz 1) bestimmten Klasse angehören, sind* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f}_\lambda$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$, *stets beide zugleich holomorph bzw. nicht holomorph in* a_λ.

Beweis. Ist $\mathfrak{f}_\lambda$ holomorph in a_λ, so ergibt sich nach Multiplikation mit $\mathfrak{A}_0$ durch Zusammenfassen aus der speziellen Form der Elemente von $\mathfrak{A}_0$ eine Darstellung (12) für $\mathfrak{f}$ mit in a_λ holomorphen Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$. $\mathfrak{f}$ ist also nach Def. 3 holomorph. Ist umgekehrt $\mathfrak{f}$ holomorph, so besitzt es in der Darstellung (12) holomorphe Koeffizienten. Nun ist $\mathfrak{f}_\lambda = \mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{f}$, und $\mathfrak{A}_0^{-1}$ hat nach Hilfssatz 1 Glieder derselben Bauart, lediglich mit Exponenten $-1 < \mathrm{Re}(-\alpha_\sigma) \leqq 0$. Nach Ausmultiplikation erhält man durch Zusammenfassen für die Komponenten von $\mathfrak{f}_\lambda$ eine Darstellung, in der wegen der Eindeutigkeit von $\mathfrak{f}_\lambda$ in $\dot{U}$ nach Hilfssatz 4 nur jeweils das Glied ohne Logarithmen

und t^{α} übrig bleibt, welches sicher holomorph ist, da $\mathfrak{f}$ holomorphe Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$ hatte.

Stellt man neben die Riemannsche Klasse R die *duale Klasse* R^* (vgl. 1.3), so ist es zweckmäßig, die Normierung (11) $0 \leqq \mathrm{Re}(\alpha_\sigma) < 1$ bei der dualen Klasse durch die *duale Normierung* (13) $-1 < \mathrm{Re}(\alpha_\sigma) \leqq 0$ zu ersetzen. Die Hilfssätze und Def. 3 gelten dann mit dieser Abänderung unverändert. In der dualen Klasse ist also bei uns *Holomorphie in den Verzweigungspunkten anders definiert.* Darin unterscheiden wir uns von älteren Darstellungen (z.B. [8]). Unsere Normierung wird sich jedoch im nächsten Abschnitt schon bewähren.

Betrachtet man an Stelle von Funktionen $\mathfrak{f}$ *Differentiale* $\mathfrak{d}$ aus der Riemannschen Klasse R (vgl. 1.3), so läßt sich alles Obige entsprechend auf Differentiale übertragen. Mit Hilfe der speziellen uniformisierenden Matrix $\mathfrak{A}_0$ (Hilfssatz 1) erhält man wie in Hilfssatz 3 für die Komponenten $\delta^{\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, q$ eines auf $\hat{\hat{U}}$ meromorphen Differentials $\mathfrak{d}$ mit $(\mathfrak{d})z = A\,\mathfrak{d}$ Darstellungen $\delta^{\varkappa} = \sum_{i,\mu} \omega_{i\mu}^{(\varkappa)} t^{\alpha_i} \log^{\mu} t$ mit in $\dot{U}$ eindeutigen und meromorphen *Differentialen* $\omega_{i\mu}^{(\varkappa)}(t)$ usw. Alle Hilfssätze gelten *bei gleichlautender Definition 3*, ebenso wie das über die duale Klasse R^* Gesagte, entsprechend für Differentiale. Man hat nur jeweils für Vektoren aus Funktionen Vektoren aus Differentialen und für Funktionen Differentiale zu lesen.

Auch die Differentiale $\mathfrak{d} \in R$ lassen sich 2.2 entsprechend als meromorphe Schnitte eines bestimmten Vektorraumbündels auffassen: Mit dem in [6] S. 70 definierten Vektorraumbündel T der kovarianten Tangentialvektoren der komplexen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, einem komplex-analytischen Vektorraumbündel mit der Faser C^1 (Geradenbündel), und dem nach 2.2 Satz 1 der Riemannschen Klasse R zugeordneten Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X}$ bildet man das komplex-analytische Vektorraumbündel $\overline{W} \otimes T$[5]) über $\overline{X}$ mit der Faser C^q. Dann kann man entsprechend Satz 1 einen K-Isomorphismus zwischen den Differentialen $\mathfrak{d} \in R$ und denjenigen meromorphen Schnitten von $\overline{W} \otimes T$ stiften, die in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, sich bestimmt verhalten.

Auf eine Funktion $\mathfrak{f} \in R$ läßt sich der Differentialoperator d komponentenweise anwenden. Man erhält so einen Vektor $d\mathfrak{f}$ auf $\hat{\hat{X}}$ meromorpher Differentiale, der (9) $(d\mathfrak{f})s = \chi(s)\,d\mathfrak{f}$, $s \in G$, erfüllt. $d\mathfrak{f}$ verhält sich auch bestimmt in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, wie sich aus Hilfssatz 6 ergibt: Bildet man die Differentiale $df^{\varkappa}$ der Komponenten $f^{\varkappa}$ in der Summendarstellung (12) gliedweise, so erhält man, da $\mathfrak{f}$ in ganz U meromorphe Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$ besitzt, eine ebensolche Darstellung (12) für $df^{\varkappa}$ mit in ganz U meromorphen Differentialen als Koeffizienten. Hilfssatz 6 für Differentiale in der umgekehrten Richtung angewandt ergibt jetzt: $d\mathfrak{f}$ verhält sich bestimmt in a_λ, also $d\mathfrak{f} \in R$. Komponentenweise Division von $d\mathfrak{f}$ durch ein festes meromorphes Differential ω auf X liefert wieder eine Funktion $\mathfrak{f}' = \dfrac{d\mathfrak{f}}{\omega} \in R$.

[5]) Siehe [6], S. 50f.

Satz 3. *Differential* $d\mathfrak{f}$ *und Ableitung* $\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{f}}{\omega}$ *einer Funktion* $\mathfrak{f} \in R$ *liegen wieder in* R.

Dies beruht wesentlich darauf, daß die in U meromorphen Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\varkappa)}$ abgeleitet wieder in U meromorphe Funktionen ergeben.

2.4. Riemannsche Klassen und komplex-analytische Vektorraumbündel über X

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu dem einer Riemannschen Klasse R nach 2.2 Satz 2 zugeordneten Vektorraumbündel $\overline{W}$ über $\overline{X}$ ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über ganz X, so daß

1. W über $\overline{X}$ das Bündel $\overline{W}$ induziert, man also, wenn p die Projektion $W \to X$ bedeutet, $\overline{W} = \overline{p}^1(\overline{X}) \subset W$ annehmen kann.

2. Genau die in a_λ bestimmten Schnitte von $\overline{W}$ (s. 2.2) sich zu meromorphen Schnitten von W fortsetzen lassen.

3. Dabei genau die den in a_λ holomorphen $\mathfrak{f} \in R$ entsprechenden Schnitte in die in a_λ holomorphen Schnitte von W übergehen.

[Ein meromorpher Schnitt eines Vektorraumbündels W heißt *holomorph in einem Punkt* $x \in X$, wenn in einem Atlas von W zu einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ der nach 2.1 Def. 1 den Schnitt in U_i, $x \in U_i$, darstellende meromorphe Vektor $\mathfrak{m}_i(u)$, $u \in U_i$, holomorph in x ist. Diese Definition ist offenbar unabhängig von dem speziell gewählten Atlas der komplex-analytischen Faserstruktur von W.]

Es ergibt sich: Ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über X mit 1., 2. und 3. existiert und ist dadurch bis auf (komplex-analytische) Isomorphie eindeutig bestimmt.

Für andere Anwendungen diskutieren wir hier sogleich alle möglichen Abschließungen eines komplex-analytischen Vektorraumbündels in einem Punkt. $\dot{W}$ sei ein solches über einer punktierten Umgebung $\dot{U}$ von a_λ. Dann gilt

Hilfssatz 8. *Die komplex-analytischen Abschließungen von* W *zu einem* W *über der vollen Umgebung* U *von* a_λ *entsprechen den holomorphen Schnitten über punktierten Umgebungen* $\dot{V}$ *von* a_λ *des* $\dot{W}$ *assoziierten komplex-analytischen* $GL(q, C)$*-Hauptfaserraumes* $\dot{H}$. *Zwei solche Schnitte über demselben* $\dot{V}$ *unterscheiden sich in einem Atlas um eine in* $\dot{V}$ *holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix als Rechtsfaktor. Genau dann, wenn diese auch noch in* a_λ, *also in ganz* V, *holomorph und holomorph umkehrbar ist, führen die beiden Schnitte zu isomorphen* W *über* U.

Beweis. Zu jeder Abschließung W von $\dot{W}$ gibt es, da W lokal trivial ist, eine Umgebung V von a_λ, so daß $\overline{p}^1(V) \subset W$ trivial ist. Ein Faserraum W ist aber genau dann (analytisch) trivial, wenn im assoziierten $GL(q, C)$-Hauptfaserraum H ein holomorpher Schnitt existiert ([3], exp. VI, 5. prop. 2).

Dieser ergibt, eingeschränkt auf $\dot{V}$, einen holomorphen Schnitt im $\dot{W}$ assoziierten Hauptfaserraum $\dot{H}$, wenn man mit q als Projektion: $H \to U$ $\dot{H} = \bar{q}^1(\dot{V}) \subset H$ annimmt. — Umgekehrt führt ein holomorpher Schnitt über $\dot{V}$ im assoziierten $GL(q, C)$-Hauptfaserraum $\dot{H}$, in einem Atlas von $\dot{H}$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ mit Koordinatentransformationen $g_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(q, C)$ holomorph, dargestellt durch holomorphe und holomorph umkehrbare Matrizen $\mathfrak{G}_i(u)$, $u \in U_i \cap \dot{V}$ mit $\mathfrak{G}_i = g_{ij}\mathfrak{G}_j$ in $U_i \cap U_j \cap \dot{V}$, zu einer Abschließung W, also zu einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über U, das über $\dot{U}$ $\dot{W}$ induziert. Man hat dazu nur einen Atlas der analytischen Faserstruktur von W anzugeben, der den obigen Atlas von $\dot{W}$ enthält und aus diesem durch Hinzufügen einer zusätzlichen überdeckenden Menge U_λ, $a_\lambda \in U_\lambda$ und zusätzlichen Koordinatentransformationen $g_{\lambda i}: U_\lambda \cap U_i \to GL(q, C)$ holomorph, mit den Verträglichkeitsbedingungen $g_{i\lambda} = g_{ij}g_{j\lambda}$ in $U_i \cap U_j \cap U_\lambda$, $g_{\lambda i} = g_{i\lambda}^{-1}$ entsteht. Solch eine Ergänzung zu einem Atlas über U erhält man aber aus einem holomorphen Schnitt über $\dot{V}$, indem man $U_\lambda = V$, $g_{i\lambda} = \mathfrak{G}_i: U_i \cap U_\lambda \to GL(q, C)$ holomorph setzt. Der Schnitt über $\dot{V}$ läßt sich in dem W assoziierten H zu einem Schnitt über V fortsetzen. Man hat dazu in dem eben erhaltenen Atlas nur $\mathfrak{G}_\lambda = E$ (Einsmatrix) in U_λ zu setzen: Es ist $\mathfrak{G}_i = g_{i\lambda}\mathfrak{G}_\lambda = g_{i\lambda}$ in $U_i \cap U_\lambda$. — Für einen zweiten solchen holomorphen Schnitt, im selben Atlas dargestellt durch holomorph umkehrbare $\mathfrak{G}_i'(u)$, $u \in U_i \cap \dot{V}$ mit $\mathfrak{G}_i' = g_{ij}\mathfrak{G}_j'$ in $U_i \cap U_j \cap \dot{V}$, ergibt sich $\mathfrak{G}_i^{-1}\mathfrak{G}_i' = \mathfrak{G}_j^{-1}g_{ij}^{-1}g_{ij}\mathfrak{G}_j' = \mathfrak{G}_j^{-1}\mathfrak{G}_j' = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{E}$ ist holomorph umkehrbar und eindeutig in $\dot{V}$ und $\mathfrak{G}_i' = \mathfrak{G}_i\mathfrak{E}$ für alle $i \in J$. Führen beide Schnitte zu isomorphen W, so lassen sich beide zu holomorphen Schnitten über V in H fortsetzen, und $\mathfrak{E}$ ist nach derselben Schlußweise also auch in a_λ holomorph umkehrbar.

Über einer Umgebung $\dot{U}$ von a_λ gibt es stets holomorphe Schnitte in $\dot{H}$, d.h. das Vektorraumbündel $\dot{W}$ ist, da es eine nicht kompakte Basis $\dot{U}$ besitzt, stets (analytisch) trivial (vgl. [*10*], 3.). In unserem Fall eines Vektorraumbündels $\dot{W}$ mit *konstanten* Koordinatentransformationen kann man die holomorphen Schnitte über punktierten Umgebungen $\dot{V}$ des Punktes a_λ sehr leicht direkt angeben. Wir können uns dabei auf ein $\dot{W}$ über einer punktierten kreisförmigen Umgebung $\dot{U}$ der in 2.3 betrachteten Art beschränken. Der Faserraum $\dot{W}$ und der $\dot{W}$ assoziierte $GL(q, C)$-Hauptfaserraum $\dot{H}$ sind, da sie in entsprechenden Atlanten dieselben *konstanten* Koordinatentransformationen besitzen, beide vermöge desselben Homomorphismus $\chi': \pi_1(\dot{U}, x_0) \to GL(q, C)$ assoziiert der universellen Überlagerungsfläche $\hat{\dot{U}}$ von $\dot{U}$ aufgefaßt als Hauptfaserraum mit der Deckbewegungsgruppe $G' = \pi_1(\dot{U}, x_0)$, $x_0 \in \dot{U}$, als Strukturgruppe (vgl. dazu 2.1, 2.2 und [*13*], § 13, § 14). G' ist zyklisch, z sei ein erzeugendes Element von G', χ' ist bestimmt durch $\chi'(z) = A \in GL(q, C)$. Dann gilt

Hilfssatz 9. *Die holomorphen Schnitte über punktierten Umgebungen $\dot{V}$ von a_λ des Hauptfaserraumes $\dot{H}$ entsprechen eineindeutig den in $\bar{q}^1(\dot{V}) \subset \hat{\dot{U}}$*

holomorphen und holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{A}$ *mit* $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$. — *Die meromorphen Schnitte von* $\dot{W}$ *entsprechen eineindeutig den auf* $\hat{\hat{U}}$ *meromorphen Vektoren* $\mathfrak{f}$ *mit* $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$.

Mit Hilfssatz 8 können wir sagen: Die Isomorphieklassen komplex-analytischer Abschließungen von $\dot{W}$ zu W über U entsprechen eineindeutig den *Klassen von Keimen in* a_λ auf $\hat{\hat{U}}$ holomorpher und holomorph umkehrbarer Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ nach der Gruppe der Keime in a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen, wenn man in dieselbe Klasse zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ wirft, die sich nur um einen Rechtsfaktor aus dieser Gruppe unterscheiden. Fixiert man eine solche Matrix $\mathfrak{A}$, etwa $\mathfrak{A}_0$ aus 2.3 Hilfssatz 1, so erhält man alle solchen in der Form $\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ aus der Gruppe der Keime in *punktierten* Umgebungen $\dot{V}$ von a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen. Die verschiedenen komplex-analytischen Abschließungen W von $\dot{W}$ entsprechen also eineindeutig den Linksnebenklassen dieser Gruppe von Matrizen $\mathfrak{E}$ nach der Untergruppe der Keime in a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen. Eine Klasseneinteilung dieser Art haben wir aber gerade in 2.3 für die zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$ eingeführt.

Wie beim Beweis von Hilfssatz 8 dargelegt, erhält man aus den Darstellungen in einem Atlas eines holomorphen Schnittes über $\dot{V}$ im Hauptfaserraum $\dot{H}$ durch holomorph umkehrbare Matrizen $\mathfrak{G}_i$ in U_i einen Atlas für die dem Schnitt entsprechende Abschließung W von $\dot{W}$, indem man die neue Koordinatenumgebung $U_\lambda = V$ und die neuen Koordinatentransformationen $g_{i\lambda} = \mathfrak{G}_i$ in $U_i \cap U_\lambda$ zu dem Atlas von $\dot{W}$ hinzufügt. Damit ergibt sich unmittelbar: Entspricht der auf $\hat{U}$ meromorphe Vektor $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$ einem meromorphen Schnitt von $\dot{W}$ und entspricht die in $\overline{q}^1(\dot{V}) < \hat{\hat{U}}$ holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ dem eben genannten holomorphen Schnitt über $\dot{V}$ in $\dot{H}$, so wird der meromorphe Schnitt in dem so erhaltenen Atlas von W in U_λ durch $\mathfrak{f}_\lambda$ mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$ dargestellt, $\mathfrak{f}_\lambda$ eindeutig und meromorph in $\dot{U}_\lambda$. Genau dann ist ein meromorpher Schnitt von $\dot{W}$ also zu einem meromorphen Schnitt von W fortsetzbar, wenn das ihm entsprechende $\mathfrak{f}_\lambda$ auch in a_λ höchstens einen Pol besitzt, $\mathfrak{f}_\lambda$ also meromorph in U_λ ist. Vgl. dazu den Schluß von 2.2.

Nun ist es leicht, die zu Beginn formulierte Behauptung zu beweisen: R sei die Riemannsche Klasse, $\overline{W}$ das R zugeordnete Vektorraumbündel über $\overline{X}$ mit konstanten Koordinatentransformationen, a_λ ein Verzweigungspunkt von R, in dem $\overline{W}$ jetzt abgeschlossen werden soll. Wir betrachten dazu eine kleine kreisförmige Umgebung U um a_λ und das durch $\overline{W}$ über U induzierte Bündel $\dot{W}$, dessen Abschließung eben untersucht wurde. Jede Abschließung von $\dot{W}$ ergibt natürlich eine Abschließung von $\overline{W}$ in a_λ, und so erhält man auch alle solchen. Es sei nun $\mathfrak{f}$ eine Funktion aus R. Ihr entspricht ein meromorpher Schnitt von $\overline{W}$, also auch ein meromorpher Schnitt von $\dot{W}$, und diesem wiederum

ein meromorpher Vektor $\dot{\mathfrak{f}}$ auf $\hat{U}$ mit $(\dot{\mathfrak{f}})z = A\dot{\mathfrak{f}}$. Dem bestimmten Verhalten von $\mathfrak{f} \in R$ in a_λ entspricht nun das bestimmte Verhalten von $\dot{\mathfrak{f}}$ in a_λ, der Holomorphie von $\mathfrak{f}$ in a_λ die Holomorphie von $\dot{\mathfrak{f}}$ in a_λ. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Zusammenhang zwischen Vektoren auf $\hat{\dot{X}}(\hat{U})$ und Schnitten von $\overline{W}(\dot{W})$, letztere dargestellt in einem Atlas, wie er in 2.2 beschrieben wurde. Mit dem oben über Darstellung und Fortsetzbarkeit eines Schnittes von $\dot{W}$ in U_λ durch $\mathfrak{f}_\lambda$, $\dot{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$ — $\mathfrak{A}$ soll dem der Abschließung zugrunde liegenden Schnitt des Hauptfaserraumes $\dot{H}$ entsprechen — Gesagten erhält man:

1. Genau die Klassen in a_λ bestimmter Keime von holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{A}$ auf $\hat{\dot{U}}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ ergeben Abschließungen von $\overline{W}$ in a_λ mit der Eigenschaft: Die Funktionen $\mathfrak{f} \in R$ entsprechen Schnitten von $\overline{W}$, die sich zu meromorphen Schnitten der Abschließung fortsetzen lassen und umgekehrt.

2. Genau die durch $\mathfrak{A}_0$, 2.3 Hilfssatz 1, gegebenen Klasse führt zu einer Abschließung von $\overline{W}$ in a_λ mit der Eigenschaft: Die in a_λ holomorphen $\mathfrak{f} \in R$ entsprechen Schnitten von $\overline{W}$, die bei der Fortsetzung zu meromorphen Schnitten der Abschließung in a_λ holomorph sind und umgekehrt.

Beweis. 1. ergibt sich mit obigen Bemerkungen unmittelbar aus 2.3 Hilfssatz 5. 2. folgt ebenso aus 2.3 Hilfssatz 7 mit der Definition der Holomorphie eines meromorphen Schnittes in einem Punkt.

1. und 2. enthalten, der Reihe nach auf alle Verzweigungspunkte a_λ, $\lambda \in \Lambda$, angewandt,

Satz 4. *Zu einer Riemannschen Klasse R über X gibt es ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über X mit den zu Beginn dieses Abschnittes angeführten Eigenschaften 1., 2. und 3. W ist dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Satz 5. *Es besteht ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum über K der Funktionen aus R und dem Vektorraum über K der meromorphen Schnitte von W. Ein $\mathfrak{f} \in R$ ist genau dann holomorph an einer Stelle $x \in X$, wenn der ihm entsprechende meromorphe Schnitt des Bündels W holomorph in x ist. Bei diesem Isomorphismus geht also der Vektorraum über C der (überall) holomorphen Funktionen aus R in den Vektorraum über C der holomorphen Schnitte von W über.*

Betrachtet man neben der Riemannschen Klasse R die *duale Klasse* R^* (vgl. 1.3), so ist es für Dualitätsbetrachtungen zweckmäßig, der dualen Klasse R^* das zu dem R zugeordnete Bündel W *duale Bündel* W^* zuzuordnen. W^* ist wieder ein komplex-analytisches Vektorraumbündel. Man erhält einen Atlas von W^* in dem zu einem Atlas zu $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ mit den Koordinatentransformationen $g_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(q, C)$ *dualen Atlas* zu derselben Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ mit den dualen Koordinatentransformationen $g_{ij}^* = {}^t(g_{ij}^{-1}): U_i \cap U_j \to GL(q, C)$. Nimmt man einen aus einem Atlas des Bündels $\overline{W}$ mit konstanten

Koordinatentransformationen durch Ergänzung in den Verzweigungspunkten a_λ, $\lambda \in \Lambda$, hervorgegangenen Atlas des Bündels W, so erkennt man: W^* induziert über $\overline{X}$ gerade das zu $\overline{W}$ duale Bündel $(\overline{W})^*$, welches ebenfalls konstante Koordinatentransformationen besitzt und mit dem zur dualen Riemannschen Klasse R^* nach 2.2 konstruierten Bündel über $\overline{X}$ übereinstimmt. W^* schließt also — wie W das Bündel $\overline{W}$ — das Bündel $(\overline{W})^*$ zu einem komplex-analytischen Bündel über ganz X ab. Man überlegt sich leicht, daß diese Abschließung gerade die für die duale Klasse R^* richtige ist: Dazu gehen wir nochmals zurück zur Abschließung des über U, $a_\lambda \in U$, durch $\overline{W}$ induzierten Bündels $\dot{W}$ in a_λ. $(\overline{W})^*$ induziert über U das zu $\dot{W}$ duale Bündel $(\dot{W})^*$. Entsteht $\dot{W}$ aus dem $\pi_1(\dot{U}, x_0)$-Hauptfaserraum $\hat{\dot{U}}$ vermöge des Homomorphismus $\chi' : \pi_1(\dot{U}, x_0) \to GL(q, C)$, bestimmt durch $\chi'(z) = A$, z erzeugendes Element von $G' = \pi_1(\dot{U}, x_0)$, so entsteht $(\dot{W})^*$ aus $\hat{\dot{U}}$ vermöge des Homomorphismus $(\chi')^*$, bestimmt durch $(\chi')^*(z) = A^*$. $\dot{W}$ und damit $\overline{W}$ soll nun in a_λ durch den einer (zu A uniformisierenden) Matrix $\mathfrak{A}_0$ auf $\hat{\dot{U}}$ des Hilfssatzes 1 in 2.3 entsprechenden Schnitt in a_λ abgeschlossen werden. Dies ergibt nach 2. eine richtige Abschließung von $\overline{W}$ in a_λ. Die Darstellungen des abschließenden Schnittes in einem Atlas ergeben aber sogleich die Koordinatentransformationen für einen Atlas der Abschließung. Man erhält daher eine Abschließung von $(\dot{W})^*$ mit dem dualen Atlas, also den dualen Koordinatentransformationen, wenn man $(\dot{W})^*$ durch den Schnitt, der der (zu A^* uniformisierenden) Matrix $\mathfrak{A}_0^*$ auf $\hat{\dot{U}}$ entspricht, abschließt. Nun ist $\mathfrak{A}_0^* = {}^t(\mathfrak{A}_0^{-1})$ nach 2.3 Hilfssatz 1 eine Matrix derselben Bauart wie $\mathfrak{A}_0$, nur mit der dualen Normierung der Exponenten $-1 < \mathrm{Re}(\alpha_\sigma) \leqq 0$. Die duale Abschließung von $(\dot{W})^*$ in a_λ — sie ergibt die duale Abschließung von $(\overline{W})^*$ in a_λ — erfüllt also 2., *wenn man nur in der dualen Klasse R^* in der Definition der Holomorphie in den Verzweigungspunkten die duale Normierung zugrunde gelegt hat* (vgl. 2.3).

Satz 6. *Der zu R dualen Riemannschen Klasse R^*, versehen mit der dualen Normierung, entspricht nach Satz 4 ein eindeutig bestimmtes Vektorraumbündel mit den Eigenschaften 1., 2. und 3. — Dieses ist gerade das zu W, dem nach Satz 4 R zugeordneten Bündel, duale Bündel W^*. Satz 5 gilt unverändert für R^*, W^* an Stelle von R, W.*

Nach 2.3 gilt alles dort Ausgeführte unverändert auch für Differentiale aus R bzw. R^*. Man kann also das dort genannte Bündel $\overline{W} \otimes T$ ganz ebenso zu einem komplex-analytischen Bündel über ganz X abschließen, so daß entsprechend die Eigenschaften 1., 2. und 3. gelten. Man erhält so das Bündel $W \otimes T$, wo jetzt T das Geradenbündel der kovarianten Tangentialvektoren über ganz X darstellen soll.

Satz 7. *Ist W das der Riemannschen Klasse R nach Satz 4 zugeordnete Bündel, so besteht ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum über K der Differentiale aus R und dem Vektorraum über K der meromorphen Schnitte von $W \otimes T$. Ein $\mathfrak{d} \in R$ ist genau dann holomorph an einer Stelle $x \in X$, wenn der*

ihm entsprechende meromorphe Schnitt des Bündels $W \otimes T$ holomorph in x ist. Bei dem genannten Isomorphismus geht also der C-Vektorraum der holomorphen Differentiale aus R in den C-Vektorraum der holomorphen Schnitte von $W \otimes T$ über. $W \otimes T$ ist durch diese Eigenschaft als Abschließung von $\overline{W} \otimes T$ eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt für die Differentiale der dualen Klasse R^* und das Bündel $W^* \otimes T$.

Durch die Sätze 4 bis 7 ist die Theorie der Riemannschen Klassen über X vollständig auf die allgemeinere der komplex-analytischen Vektorraumbündel über X zurückgeführt.

2.5. Verallgemeinerungen und Spezialisierungen

Nachdem wir die Zurückführung der Riemannschen Klassen auf komplex-analytische Vektorraumbündel ausführlich dargestellt haben, sollen jetzt noch kurz einige naheliegende Verallgemeinerungen und Spezialisierungen gestreift werden, die sich ebenfalls mühelos den Vektorraumbündeln unterordnen lassen.

A. Zu einer Menge von Punkten $\{b_\varkappa; \varkappa \in \mathsf{K}\} \subset X$ — jede kompakte Teilmenge von X möge nur endlich viele $b_\varkappa$ enthalten — sei jeweils eine in einer punktierten Umgebung $\dot{U}_\varkappa$ von $b_\varkappa$ holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{B}_\varkappa \in GL(q, C)$ gegeben. Diese Matrizen können in den Punkten $b_\varkappa$, die Verzweigungspunkte a_λ, $\lambda \in \Lambda$, der betrachteten Klasse sind, zu einer Abschließung von $\overline{W}$, in den $b_\varkappa$, die nicht Verzweigungspunkte sind, zu einer Abänderung des komplex-analytischen Bündels $\overline{W}$ verwendet werden. In den Verzweigungspunkten $b_\varkappa$ wird $\overline{W}$ einfach mit einer Matrix $\mathfrak{A}_0$ aus 2.3 Hilfssatz 1 durch den der Matrix $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_\varkappa$ auf $\hat{\dot{U}}$ entsprechenden Schnitt im $GL(q, C)$-Hauptfaserbündel abgeschlossen. In den Verzweigungspunkten $\neq b_\varkappa$ soll normal abgeschlossen werden. Für einen Nichtverzweigungspunkt $b_\varkappa$ punktiert man $\overline{W}$ in $b_\varkappa$ und schließt gegenüber einer in $U_\varkappa$ enthaltenen Koordinatenumgebung U_i, $b_\varkappa \in U_i$, des Atlanten von $\overline{W}$ mit $\mathfrak{B}_\varkappa$ als Koordinatentransformation $g_{i\,\varkappa}$ wieder ab. Den meromorphen Schnitten des so erhaltenen Vektorraumbündels W über X entsprechen nun nicht mehr die auf ganz $\hat{\overline{X}}$ meromorphen, in a_λ bestimmten, Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})\, s = \chi(s)\,\mathfrak{f}$, $s \in G$, χ ein fester Homomorphismus: $\pi_1(\overline{X}, x_0) \to GL(q, C)$, sondern solche Vektoren $\mathfrak{f}$ auf $\hat{\overline{X}}$, die dasselbe Verhalten gegenüber Deckbewegungen aufweisen, in Punkten $\hat{x}$ mit $q(\hat{x}) \neq b_\varkappa$ meromorph sind, in den Nichtverzweigungspunkten $b_\varkappa$ dagegen statt dessen $\mathfrak{f}_\varkappa = \mathfrak{B}_\varkappa^{-1} \mathfrak{f}$ meromorph in $b_\varkappa$ erfüllen, in den Verzweigungspunkten $\neq b_\varkappa$ bestimmt sind, in den Verzweigungspunkten $b_\varkappa$ statt dessen sich in der Abschließung meromorph verhalten. Alle solchen Vektoren auf $\hat{\overline{X}}$ bilden wieder eine Klasse, einen Vektorraum über K, der isomorph dem K-Vektorraum der meromorphen Schnitte von W ist. *Meromorphie und Holomorphie wird in dieser Klasse in den Punkten $b_\varkappa$ durch die Matrizen $\mathfrak{B}_\varkappa$ „gemessen“.* Die Riemannschen Klassen entsprechen $\mathfrak{B}_\varkappa = E$, $\varkappa \in \mathsf{K}$. In der dualen Klasse hat man $b_\varkappa$ die Matrizen $\mathfrak{B}_\varkappa^*$ zuzuordnen. Dann gelten mit entsprechenden Definitionen für Differentiale die Sätze 4 bis 7. — Spezialfall:

Die $\mathfrak{B}_\varkappa$ sind Diagonalmatrizen mit Elementen, die in einer Umgebung $U_\varkappa$ von $b_\varkappa$ holomorph und $\neq 0$ sind, in $b_\varkappa$ jedoch eine *wesentliche Singularität* besitzen können. Nimmt man etwa $e^{r(t)}$, $r(t)$ meromorph mit einem Pol in $b_\varkappa$, so erhält man die von H. RÖHRL betrachteten Klassen [9]. Sie haben die Eigenschaft, daß Vektoren der Klasse mit linear unabhängigen Elementen wieder Differentialgleichungen mit *auf ganz* X meromorphen Koeffizienten entsprechen und die Ableitungen wieder in der Klasse liegen. Beides beruht auf $(e^{r(t)})' = \bar{r}(t)\, e^{r(t)}$, $\bar{r}(t)$ meromorph in $U_\varkappa$. Das Fehlen der letzteren Eigenschaft ist nicht wesentlich.

B. Wir haben bisher nur Verzweigungspunkte der Ordnung ∞ betrachtet. Man kann auch *Verzweigungspunkte endlicher Ordnung* vorgeben und z.B. folgendes Problem stellen: X sei kompakt, $a_1, \ldots, a_l$ seien endlich viele Punkte auf X, denen jeweils eine Ordnung n_λ zugeordnet sei, die ∞ sein kann. Dann wird $G = \pi_1(\overline{X}, x_0)$, $\overline{X} = X - \{a_1, \ldots, a_l\}$, erzeugt von $2p$ Elementen ($p =$ Geschlecht von X) s_i, t_i $(i = 1, \ldots, p)$, den Rückkehrschnitten von X entsprechend, und l Elementen u_λ, den Punkten $a_1, \ldots, a_l$ entsprechend. Zwischen diesen besteht die einzige Relation $R(s,t,u) = s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} \ldots s_p t_p s_p^{-1} t_p^{-1} u_1 u_2 \ldots u_l = 1$. Man hat eine eineindeutige Beziehung zwischen den Isomorphieklassen von Überlagerungsflächen von $\overline{X}$ und den Klassen konjugierter Untergruppen von G. $\overline{X}'$ sei eine solche Überlagerungsfläche, die zum kleinsten Normalteiler N von G gehört, der die Elemente $u_\lambda^{n_\lambda}$, $\lambda = 1, \ldots, l$ enthält, wo n_λ die oben a_λ zugeordnete Ordnung bezeichnet und $u_\lambda^\infty = 1$ gesetzt ist. $\overline{X}'$ besitzt dann eine Deckbewegungsgruppe G' über $\overline{X}$, nämlich die Faktorgruppe $G' = G/N$. Diese kann als von $2p + l$ Elementen s_i, t_i, u_λ erzeugte Gruppe mit den Relationen $R(s,t,u) = 1$, $u_\lambda^{n_\lambda} = 1$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ aufgefaßt werden. $\overline{X}'$ besteht über einer kreisförmigen Umgebung von a_λ aus endlich oder unendlich vielen n_λ-blättrigen punktierten Kreisen. Fügt man für endliches n_λ jedem dieser Kreise jeweils einen über a_λ liegenden Punkt hinzu, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche. Gegeben sei nun ein Homomorphismus $\chi' : G' \to GL(q, C)$ und gesucht werden alle auf $\overline{X}'$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}'$ mit $(\mathfrak{f}')\, s' = \chi'(s')\, \mathfrak{f}'$, $s' \in G'$, die sich in a_λ bestimmt verhalten. Sie bilden eine Klasse R'. — Nun wird aber durch Zusammensetzung des kanonischen Homomorphismus $G \to G' = G/N$ und des Homomorphismus $\chi' : G' \to GL(q, C)$ ein Homomorphismus $\chi : G \to GL(q, C)$ definiert, und es gilt: Die meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ auf $\hat{\overline{X}}$, die sich in a_λ bestimmt verhalten, mit $(\mathfrak{f})\, s = \chi(s)\, \mathfrak{f}$ entsprechen eineindeutig den meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}' \in R'$. Damit ist das obige „Monodromieproblem" mit *Verzweigungspunkten beliebiger Ordnung* auf dasjenige mit nur solchen unendlicher Ordnung zurückgeführt. A. WEIL behandelt in [14] den Fall *nur endlicher* Ordnungen.

Natürlich ordnet sich auch der Fall von $l = 0$ Verzweigungspunkten unter. Dann ist $\overline{X} = X$, $\hat{\overline{X}}$ die universelle Überlagerungsfläche von X und $\overline{W} = W$ ein Bündel mit konstanten Koordinatentransformationen zu einem Homomorphismus $\chi : \pi_1(X, x_0) \to GL(q, C)$. Für $q = 1$ erhält man die *multiplikativen Funktionen und Differentiale auf* X [15].

C. Schließlich behandeln wir nur die Frage nach auf $\hat{\hat{X}}$ meromorphen *Vektoren* $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G = \pi_1(\overline{X}, x_0)$. Oft interessieren dagegen auf $\hat{\hat{X}}$ meromorphe *Matrizen* $\mathfrak{F}$ vom Typ (q, p) mit $(\mathfrak{F})s = \mathsf{X}(s)\mathfrak{F}$, $s \in G$, X wieder ein Homomorphismus: $G \to GL(q, C)$. Die Frage nach solchen läßt sich jedoch leicht auf eine entsprechende Frage nach Vektoren zurückführen. Dazu ordnen wir, wenn $\mathfrak{F} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_p)$, wo $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_p$ die p q-zeiligen Spaltenvektoren von $\mathfrak{F}$ bedeuten, der Matrix $\mathfrak{F}$ einen pq-zeiligen Spaltenvektor $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{f}_p \end{pmatrix}$ zu. Die auf $\hat{\hat{X}}$ meromorphen Matrizen $\mathfrak{F}$ vom Typ (q, p) mit $(\mathfrak{F})s = \mathsf{X}(s)\mathfrak{F}$, $s \in G$, entsprechen so eineindeutig den auf $\hat{\hat{X}}$ meromorphen pq-zeiligen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G$, wo χ den X zugeordneten durch

$$\chi(s) = \left.\begin{pmatrix} \mathsf{X}(s) & & 0 \\ & \mathsf{X}(s) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \mathsf{X}(s) \end{pmatrix}\right\} pq$$

gegebenen Homomorphismus: $G \to GL(pq, C)$ bedeutet. Die dazu duale Klasse wird dann von den auf $\hat{\hat{X}}$ meromorphen Matrizen $\mathfrak{F}^*$ desselben Typus (q, p) mit $(\mathfrak{F}^*)s = \mathsf{X}^*(s)\mathfrak{F}^*$, $s \in G$, gebildet. Ordnet man wieder $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{f}_1^*, \ldots, \mathfrak{f}_p^*)$ den pq-zeiligen Spaltenvektor $\mathfrak{f}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1^* \\ \vdots \\ \mathfrak{f}_p^* \end{pmatrix}$ zu, so entsprechen nun die Matrizen $\mathfrak{F}^*$ mit $(\mathfrak{F}^*)s = \mathsf{X}^*(s)\mathfrak{F}^*$, $s \in G$, den Vektoren $\mathfrak{f}^*$ mit $(\mathfrak{f}^*)s = \chi^*(s)\mathfrak{f}^*$, $s \in G$,

$$\chi^*(s) = \left.\begin{pmatrix} \mathsf{X}^*(s) & & 0 \\ & \mathsf{X}^*(s) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \mathsf{X}^*(s) \end{pmatrix}\right\} pq$$

und das „Produkt" zwischen $\mathfrak{f}^*$ und $\mathfrak{f}$ in 2.3, $\mathfrak{f}^* \wedge \mathfrak{f} = {}^t\mathfrak{f}^*\mathfrak{f}$, drückt sich in den Matrizen dann so aus $\mathfrak{F}^* \wedge \mathfrak{F} = Sp({}^t\mathfrak{F}^*\mathfrak{F})$ $\left(Sp(A) = \text{Spur von } A\right)$. Das ist aber gerade die die Dualität vermittelnde Bildung in [*14*].

Literatur

[*1*] Bieberbach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin: Springer 1953. — [*2*] Birkhoff, G. D.: A simplified treatment of regular singular points. Trans. Amer. Math. Soc. **11** (1910). — [*3*] Cartan, H.: Séminaire ENS, 1949–50. — [*4*] Cartan, H.: Séminaire ENS, 1953–54. — [*5*] Cartan, H., et Serre, J. P.: Un théorem de finitude concernant les variétés analytiques compactes. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 128–130 (1953). — [*6*] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der

algebraischen Geometrie. Ergebn. der Math. **9** (1956). — [7] KODAIRA, K.: Harmonic fields in Riemannian manifolds. Ann. of Math. **50**, 587—665 (1949). — [*8*] KÖNIG, R.: Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene. Crelle J. **148**, 146—182 (1918). — [*9*] RÖHRL, H.: Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I. Math. Ann. **123**, 53—75 (1951). — [*10*] RÖHRL, H.: Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. **133**, 1—25 (1957). — [*11*] SCHLESINGER, L.: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I—II. Leipzig: B. G. Teubner 1895, 1898. — [*12*] SERRE, J. P.: Géometrié algébrique et géometrié analytique. Ann. Institut Fourier **6**, 1—42 (1955—56). — [*13*] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton: University Press 1951. — [*14*] WEIL, A.: Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. pures et appl., Paris **1938**, 47—87. — [*15*] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. Stuttgart: B. G. Teubner 1955.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 395–417 (1958)

Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. II

Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

Von

DIETER PUPPE

Einleitung

Unter einer *Pseudomannigfaltigkeit* verstehen wir im folgenden grundsätzlich eine orientierbare und in bestimmter Weise orientierte geschlossene Pseudomannigfaltigkeit im Sinne von SEIFERT-THRELFALL [9]. Sei P^n eine solche Pseudomannigfaltigkeit und $g: P^n \to S^n$ eine stetige Abbildung vom Grade 1 auf die n-Sphäre. V sei irgendein weiterer topologischer Raum. Wir werden folgende Frage untersuchen:

Wann folgt für alle $a: S^n \to V$ *aus* $a \circ g \simeq 0$ *sogar* $a \simeq 0$? ($\simeq$ *bedeutet: homotop*) — oder in der Terminologie von Teil I dieser Arbeit:

Wann ist die durch g *induzierte Abbildung der Homotopiemengen* $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ *monomorph (d.h. Kern* $g^* = g^{*-1}(0) = 0$, *vgl.* [8] *1.3)?*

Unter einem gewissen Aspekt wurde die Frage schon in [7] behandelt. Sei σ ein (offenes) n-Simplex einer simplizialen Zerlegung von P^n und $g: P^n \to P^n/(P^n - \sigma)$[1]$ = S^n$ die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt. g hat offenbar den Grad 1. Ist ferner $\alpha = [a] \in \pi_n(V)$ die Homotopieklasse von $a: S^n \to V$, so ist $a \circ g$ eine Abbildung von der Art, wie sie in [7] mit f_α bezeichnet wurde. $a \circ g$ ist auf dem $(n-1)$-dimensionalen Gerüst konstant, und die Hinderniskohomologieklasse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung ist $\bar{d}(a \circ g) = \alpha$, wenn wir die Kohomologiegruppe $H^n(P^n, \pi_n(V))$ mit $\pi_n(V)$ identifizieren (vgl. [7] § 4). Nach [7] Satz 1 ist $\alpha \in H^n_*(P^n, \pi_n(V))$ mit $a \circ g \simeq 0$ gleichwertig, d.h. es ist $H^n_*(P^n, \pi_n(V)) =$ Kern g^* (vgl. [8] 1.3). Man erhält daher aus [7] Satz 4a):

Für festes V *ist* $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ *genau dann für alle Pseudomannigfaltigkeiten* P^n *monomorph, wenn der Hurewiczsche Homomorphismus* $\pi_n(V) \cong \pi_{n-1}(\Omega V) \to H_{n-1}(\Omega V)$ *monomorph ist.* (ΩV ist der Raum der geschlossenen Wege in V mit festem Anfangspunkt.)

Daß für $g: P^n \to S^n$ eine spezielle Abbildung vom Grade 1 gewählt wurde, ist unwesentlich, da alle Abbildungen $P^n \to S^n$ vom Grade 1 untereinander homotop sind (Hopf-Whitneyscher Klassifikationssatz [21] Th. 4).

[1]) Für $A < X$ bezeichnet X/A wie in Teil I [8] den Raum, der aus X durch Identifizieren von A zu einem Punkt entsteht.

Wir fragen hier umgekehrt:

Für welche Pseudomannigfaltigkeiten P^n ist $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$, induziert durch eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1, für alle V monomorph?

Die Sphäre $P^n = S^n$ hat diese Eigenschaft offenbar. Zur Abkürzung nennen wir die Pseudomannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft *sphärenähnlich*. Wir werden zuerst einige Sätze über sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten allgemein beweisen und dann den Spezialfall der kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten noch genauer untersuchen. Die wichtigsten Ergebnisse sind:

1) P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn sich die Sphäre S^{n+1} mit dem Grad 1 auf die Einhängung SP^n abbilden läßt (6.3 Satz 3).

2) Produkte und „Summen" (zur Definition s. 6.5) von sphärenähnlichen Pseudomannigfaltigkeiten sind wieder sphärenähnlich (6.4 Satz 4, 6.5 Satz 7). Insbesondere ist jedes Produkt von Sphären sphärenähnlich.

3) Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n, die topologisch und differenzierbar in den euklidischen Raum R^{n+1} eingebettet werden kann, ist sphärenähnlich (7.1).

4) Eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine kompakte differenzierbare Teilmannigfaltigkeit $'M^n$ von R^{n+1} gibt, die sich mit dem Grad 1 auf M^n abbilden läßt (7.2 Satz 12).

5) Die Stiefel-Whitneyschen Klassen einer sphärenähnlichen (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeit sind trivial (7.5 Satz 13).

Außerdem wird gezeigt werden, daß alle zweidimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten sphärenähnlich sind (6.8 Satz 9), und daß sich die Sphärenähnlichkeit in der Dimension 3 durch eine bekannte Kohomologieoperation, nämlich das „Postnikow-Quadrat" (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) — im Fall der Mannigfaltigkeiten auch durch Verschlingungszahlen (7.6 Satz 16) — charakterisieren läßt.

Die Beweise stützen sich ganz entscheidend auf die Ergebnisse und Methoden von Teil I [8]. Die Bezeichnungen und grundsätzlichen Vereinbarungen von Teil I gelten auch hier (vgl. Teil I 1.1—1.4). Insbesondere werden — von Ausnahmen abgesehen — in den Räumen Grundpunkte festgelegt und nur solche Abbildungen und Homotopien zugelassen, die die Grundpunkte ineinander überführen. Welche speziellen Punkte man als Grundpunkte nimmt, ist jedoch bei CW-Komplexen, also z.B. bei Pseudomannigfaltigkeiten von untergeordneter Bedeutung [vgl. Teil I 5.5.A) und E)].

Die Numerierung der Paragraphen von Teil I wird hier mit § 6 und § 7 weitergeführt. Bei Hinweisen auf §§ 1—5 ist immer Teil I dieser Arbeit [8] gemeint, sofern nicht ausdrücklich eine andere Arbeit zitiert wird.

§ 6. Sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten

6.1. Wie in der Einleitung bereits erklärt, nennen wir eine Pseudomannigfaltigkeit P^n *sphärenähnlich*, wenn $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ (zur Definition s. 1.3), induziert durch eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1, für

jedes V monomorph ist. Es wurde auch darauf hingewiesen, daß es gleichgültig ist, welche Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 man dabei zugrunde legt, weil alle untereinander homotop sind.

Sei $e^n \subset P^n$ eine n-Zelle, und P^n entstehe aus $P^n - e^n$ dadurch, daß eine Vollkugel E^n mittels $f: S^{n-1} \to P^n - e^n$ angeheftet wird (S^{n-1} = Randsphäre von E^n)[2]). Dann ist P^n der Abbildungskegel C_f von f, und Pf ist die Injektion $P^n - e^n \to P^n$ (vgl. 1.4). $Qf: P^n \to P^n/(P^n - e^n) = S^n$ ist die natürliche Projektion (vgl. 1.9), hat also den Grad 1. Jede Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 ist daher mit Qf homotop, und aus 4.4 Satz 13 folgt:

Satz 1. *Ist P^n sphärenähnlich und hat $g: P^n \to S^n$ den Grad 1, so ist die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ für jedes V einwertig, d.h. für alle $a, a': S^n \to V$ folgt $a \simeq a'$ aus $g \circ a \simeq g \circ a'$.*

Bemerkung. Gemäß der Vereinbarung in 1.1 ist hier unter „$\simeq$" immer Homotopie relativ zum Grundpunkt zu verstehen. Unter Benutzung von [7] Hilfssatz 2 kann man aber auch zeigen: Sind $g \circ a$ und $g \circ a'$ frei homotop, so auch a und a'.

6.2. Satz 2. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist schon dann sphärenähnlich, wenn eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 für den speziellen Bildraum $V = S(P^n - e^n)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ induziert.* (e^n ist eine Zelle auf P^n wie in 6.1, und S ist der Einhängungsoperator, vgl. 1.8.)

Beweis. Nach 6.1 ist g mit Qf homotop, wenn $f: S^{n-1} \to P^n - e^n$ eine anheftende Abbildung für die Zelle e^n ist. Man kann daher $g = Qf$ annehmen. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (1.12 Satz 6) ist

$$(Qf)^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$$

für jedes einzelne V genau dann monomorph, wenn

$$(Sf)^*: \pi(S(P^n - e^n), V) \to \pi_n(V)$$

verschwindet. Ist $(Qf)^*$ monomorph, also $(Sf)^* = 0$ für $V = S(P^n - e^n)$, so gilt $(Sf)^*[1] = [Sf] = 0$ [vgl. 1.3, 1 bezeichnet die Identität von $S(P^n - e^n)$], d.h. $Sf \simeq 0$. Es folgt $(Sf)^* = 0$ und damit die Monomorphie von $(Qf)^*$ für alle V, d.h. P^n ist sphärenähnlich.

6.3. Satz 3. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine Abbildung $S^{n+1} \to SP^n$ (SP^n = Einhängung von P^n) vom Grade 1 gibt, d.h. wenn der $(n+1)$-dimensionale Grundzykel von SP^n sphärisch ist.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, denn die einzige 1-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist die 1-Sphäre S^1. Für $n > 1$ ist 3.4 Satz 12 anwendbar. Demnach ist P^n genau dann sphärenähnlich, wenn die Einhängung $Sg: SP^n \to S^{n+1}$ einer Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 ein Rechts-Homotopieinverses r besitzt. Für jede Abbildung $r: S^{n+1} \to SP^n$ ist $\mathrm{Grad}(Sg \circ r) = (\mathrm{Grad}\, Sg) \cdot (\mathrm{Grad}\, r) = \mathrm{Grad}\, r$. Ist also $Sg \circ r \simeq 1$, so folgt $\mathrm{Grad}\, r = 1$; und wird $\mathrm{Grad}\, r = 1$ vorausgesetzt, so folgt $\mathrm{Grad}(Sg \circ r) = 1$ und damit $Sg \circ r \simeq 1$,

[2]) Insbesondere muß der Grundpunkt von P^n in $f(S^{n-1}) \subset P^n - e^n$ liegen. Man kann (bei vorgegebenem Grundpunkt) e^n immer so wählen, daß das der Fall ist.

weil $Sg \circ r$ eine Selbstabbildung von S^{n+1} ist. Daß r rechts-homotopieinvers zu Sg ist, ist also mit Grad $r = 1$ äquivalent.

6.4. Satz 4. *Sind die Pseudomannigfaltigkeiten P_1^n und P_2^m sphärenähnlich, so auch ihr Produkt $P_1^n \times P_2^m$.*

Beweis. Nach 5.1 Satz 14 induziert die Injektion $P_1^n \times P_2^m \to P_1^n \bar{\wedge} P_2^m$ Monomorphismen der Homotopiemengen für jeden Bildraum. Weil kein Punkt einer Pseudomannigfaltigkeit ausgeartet ist [5.5.A)], gilt $P_1^n \bar{\wedge} P_2^m \equiv P_1^n \wedge P_2^m$ $(= (P_1^n \times P_2^m)/(P_1^n \vee P_2^m))$ nach 5.6 Satz 16. Dabei geht die obige Injektion in die natürliche Projektion $p: P_1^n \times P_2^m \to P_1^n \wedge P_2^m$ über. Diese induziert also ebenfalls Monomorphismen der Homotopiemengen.

Seien $g_1: P_1^n \to S^n$ und $g_2: P_2^m \to S^m$ Abbildungen vom Grade 1. Nach Voraussetzung sind die induzierten Abbildungen der Homotopiemengen g_1^* und g_2^* für jeden Bildraum monomorph. Nach 5.11 Satz 22 folgt das gleiche für $(g_1 \wedge g_2)^*$. Also ist auch $((g_1 \wedge g_2) \circ p)^* = p^* \circ (g_1 \wedge g_2)^*$ monomorph.

Andererseits ist $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ (vgl. 5.9) und $(g_1 \wedge g_2) \circ p: P_1^n \times P_2^m \to S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ hat den Grad 1. (Man erhält nämlich dieselbe Abbildung, wenn man $g_1 \times g_2: P_1^n \times P_2^m \to S^n \times S^m$ mit der Projektion $S^n \times S^m \to S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ zusammensetzt, und für diese beiden Abbildungen sieht man leicht, daß sie den Grad 1 haben.)

Als Folgerung aus Satz 4 ergibt sich:

Satz 5. *Jedes Produkt von Sphären ist sphärenähnlich.*

(Bemerkung: Satz 5 könnte man auch aus 6.3 Satz 3 und 5.9 Satz 20 folgern.)

Satz 5 enthält (bei weiterer Spezialisierung auf 1-Sphären) den Satz von R. H. FOX [4], daß die natürliche Abbildung der Homotopiegruppen irgendeines Raumes in die Torus-Homotopiegruppen monomorph ist.

Für „gruppenartige" (group-like) Bildräume V wurde die Monomorphie von $g^*: \pi_n(V) \to \pi(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}, V)$, induziert durch eine Abbildung

$$g: S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k} \to S^n$$

vom Grade 1 $(n = n_1 + \cdots + n_k)$ auch von G. W. WHITEHEAD [16] bewiesen.

6.5. Zu zwei Pseudomannigfaltigkeiten gleicher Dimension P_0^n, P_1^n wird eine „Summe" besonderer Art definiert, die wir (zum Unterschied von der topologischen Summe im Sinne von BOURBAKI [2]) mit $P_0^n \oplus P_1^n$ bezeichnen:

Analog wie in 6.1 sei $e_i^n \subset P_i^n$ eine n-Zelle, und P_i^n entstehe aus $P_i^n - e_i^n$ durch Anheften der Vollkugel E^n mittels $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ $(i = 0, 1$, $S^{n-1} =$ Randsphäre von $E^n)$. Um nicht daran gebunden zu sein, daß $f_i(S^{n-1})$ den Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n \subset P_i^n$ enthält, legen wir hier ausnahmsweise keine Grundpunkte fest. $\tilde{f}_i: E^n \to P_i^n$ sei die natürliche Abbildung [Einschränkung der Identifizierung $E^n + (P_i^n - e_i^n) \to P_i^n$ auf E^n]. Wir orientieren E^n und nehmen an, daß $\tilde{f}_0$ die Orientierung erhält und $\tilde{f}_1$ sie umkehrt. Das wird durch geeignete Wahl von f_i erreicht. Wenn es zunächst nicht der Fall ist, braucht man nur vor f_i eine orientierungsumkehrende Selbstabbildung

von S^{n-1} vorzuschalten. Die „Summe" $P_0^n \oplus P_1^n$ wird nun als derjenige Raum definiert, der aus

$$(P_0^n - e_0^n) + (P_1^n - e_1^n) + (S^{n-1} \times I)$$

durch folgende Identifizierungen hervorgeht (Fig. 1):

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 0) = f_0(x) \in P_0^n - e_0^n$$
$$S^{n-1} \times I \ni (x, 1) = f_1(x) \in P_1^n - e_1^n.$$

Wird P_i^n simplizial zerlegt, und wählt man bei der obigen Konstruktion für die Zelle e_i^n ein (offenes) Simplex dieser Zerlegung, so ist $P_0^n \oplus P_1^n$, wie man sehr leicht bestätigt, eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit[3]). Die Orientierung wird so festgelegt, daß sie auf $P_i^n - e_i^n \subset P_0^n \oplus P_1^n$ $(i = 0, 1)$ mit der ursprünglichen übereinstimmt. Daß das möglich ist, wurde durch die Wahl des Orientierungscharakters von $\tilde{f}_i$ erreicht.

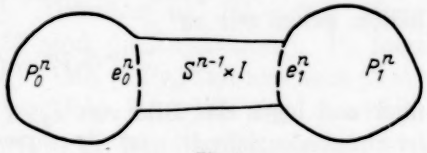


Fig. 1

Es scheint plausibel, daß $P_0^n \oplus P_1^n$ nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n und nicht von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen abhängt. Ich kenne jedoch keinen Beweis dafür. Dagegen gilt sicher:

Satz 6. *Der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ hängt nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n ab (und nicht von der Wahl der Zellen e_i^n und der anheftenden Abbildungen $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$).*

Der Beweis wird in 6.10 geführt. Da es hier immer nur auf den Homotopietyp der Räume ankommt, genügt uns dieses Ergebnis. Insbesondere ist $P_0^n \oplus P_1^n$ in jedem Falle einer orientierbaren Pseudomannigfaltigkeit homotopieäquivalent, und man kann den Begriff der Sphärenähnlichkeit darauf anwenden[4]).

Satz 7. *Die Summe $P_0^n \oplus P_1^n$ zweier Pseudomannigfaltigkeiten ist genau dann sphärenähnlich, wenn es beide Summanden P_i^n sind* $(i = 0, 1)$.

Beweis. Wir wählen (für $i = 0, 1$) eine Zellenzerlegung von P_i^n, die P_i^n zu einem CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD [18] macht (z. B. eine simpliziale Zerlegung), und benutzen zur Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$ je eine n-Zelle e_i^n dieser Zerlegungen. Um die allgemeine Theorie anwenden zu können, die in Teil I dieser Arbeit entwickelt wurde, ist es bequem, nun doch Grundpunkte festzulegen: Sei x_0 der Grundpunkt von S^{n-1}. Die anheftende

[3]) Sie unterscheidet sich von der in [7] S. 314 definierten „Summe" von Pseudomannigfaltigkeiten nur dadurch, daß dort die Ränder der herausgenommenen Simplexe direkt miteinander identifiziert werden, während hier der „Schlauch" $S^{n-1} \times I$ eingefügt wird. Bis auf Homotopieäquivalenz liefert beides das gleiche.

[4]) Werden bei der Definition von $P_0^n \oplus P_1^n$ als Zellen e_i^n von vornherein nur Simplexe einer simplizialen Zerlegung zugelassen, so kann man im folgenden ohne Satz 6 auskommen. Man weiß dann allerdings nichts darüber, ob $P_0^n \oplus P_1^n$ von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen unabhängig ist.

Abbildung $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ wird so gewählt, daß $f_i(x_0)$ eine 0-Zelle der Zerlegung von P_i^n ist, und diese sei der gemeinsame Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n$ und P_i^n. Unter diesen Voraussetzungen (die nach Satz 6 die Allgemeinheit des Beweises nicht einschränken) läßt sich $P_i^n \oplus P_i^n$ als CW-Komplex auffassen: Auf $P_i^n - e_i^n$ bleibt die ursprüngliche Zerlegung, und

$$(P_0^n \oplus P_1^n) - [(P_0^n - e_0^n) \cup (P_1^n - e_1^n)] = S^{n-1} \times (I - \{0, 1\})$$

zerlegt man in die 1-Zelle $x_0 \times (I - \{0, 1\})$ und ihr Komplement, das eine n-Zelle ist.

Da $P_0^n - e_0^n$ und $P_1^n - e_1^n$ in $P_1^n \oplus P_1^n$ punktfremd sind, gibt es keinen gemeinsamen Grundpunkt für diese drei Räume. Um diesem Nachteil abzuhelfen, gehen wir zu

$$P_0^n \overline{\oplus} P_1^n = (P_0^n \oplus P_1^n)/(x_0 \times I)$$

über und legen das Bild von $x_0 \times I$ in $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ als Grundpunkt fest. $x_0 \times I$ ist zusammenziehbar, und $(P_0^n \oplus P_1^n, x_0 \times I)$ ist ein Paar von CW-Komplexen, besitzt also die Homotopieerweiterungseigenschaft HE (vgl. 1.6; als Grundpunkt für $P_0^n \oplus P_1^n$ kann man irgendeinen Punkt von $x_0 \times I$ wählen). Eine Zusammenziehung von $x_0 \times I$ läßt sich daher zu einer Homotopie der Identität von $P_0^n \oplus P_1^n$ fortsetzen, und es folgt (1.2 Hilfssatz 3)

$$P_0^n \oplus P_1^n \equiv P_0^n \overline{\oplus} P_1^n.$$

Es genügt also, die Behauptung von Satz 7 für $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ an Stelle von $P_0^n \oplus P_1^n$ zu beweisen:

$(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, P_0^n - e_0^n)$ ist ein Paar von CW-Komplexen und hat daher die Homotopieerweiterungseigenschaft HE (vgl. 1.6). Für die Injektion

$$h: P_0^n - e_0^n \to P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$$

folgt also aus 1.6 Satz 2, daß

$$Ph: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to C_h$$

mit der natürlichen Projektion

$$g: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to (P_0^n \overline{\oplus} P_1^n)/(P_0^n - e_0^n) = P_1^n$$

(vgl. Fig. 1) homotopieäquivalent ist. g hat offenbar den Grad 1. Wir setzen ferner $g_i = Qf_i: P_i^n \to S^n$ (vgl. 6.1), wobei $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ die bei der Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$ benutzte anheftende Abbildung für e_i^n ist. g_i hat dann ebenfalls den Grad 1

Ist nun $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sphärenähnlich, d.h. ist

$$(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^* : \pi_n(V) \to \pi(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, V)$$

monomorph für jeden Bildraum V, so ist offenbar auch $g_1^*: \pi_n(V) \to \pi(P_1^n, V)$ monomorph. Aus Symmetriegründen gilt das gleiche für P_0^n, d.h. P_0^n und P_1^n sind sphärenähnlich.

Setzt man umgekehrt P_0^n und P_1^n als sphärenähnlich voraus, so ist $(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^*$ monomorph für jedes V (d.h. $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sphärenähnlich), weil g_1^* und g^* es sind — g_1^* nach Voraussetzung und g^* nach

Hilfssatz 1. *Ist* $g_0^* : \pi_n(V) \to \pi(P_0^n, V)$ *monomorph (für ein bestimmtes* V*), so auch* $g^* : \pi(P_1^n, V) \to \pi(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, V)$.

Beweis. Nach Definition ist $g_0 = Qf_0$ mit $f_0 : S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n$. Aus der Monomorphie von $g_0^* = (Qf_0)^*$ folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} f_0$ (1.12 Satz 6) nacheinander, daß $(Sf_0)^*$ verschwindet und $(SPf_0)^*$ epimorph ist. Sei

$$g' : P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to (P_0^n \overline{\oplus} P_1^n)/(P_1^n - e_1^n) = P_0^n$$

die natürliche Projektion (vgl. Fig. 1). Offenbar ist $Pf_0 = g' \circ h$ (denn $Pf_0 : P_0^n - e_0^n \to P_0^n$ und $h : P_0^n - e_0^n \to P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sind die Injektionen). Es folgt $SPf_0 = Sg' \circ Sh$ und $(SPf_0)^* = (Sh)^* \circ (Sg')^*$. Mit $(SPf_0)^*$ ist also auch $(Sh)^*$ epimorph. Aus der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} h$ erhält man nun rückwärts: $(Qh)^* = 0$, und $(Ph)^*$ ist monomorph. Damit ist alles gezeigt, weil Ph mit g homotopieäquivalent ist.

6.6. Bemerkung. Der Beweis von Satz 7 zeigt, daß man ihn schärfer so aussprechen könnte:

Satz 7'. *Induzieren die Abbildungen* $g_i : P_i^n \to S^n$ *vom Grade* 1 *Monomorphismen der Homotopiemengen* $g_i^* : \pi_n(V) \to \pi(P_i^n, V)$ *für einen bestimmten Bildraum* V $(i = 0, 1)$, *so gilt das Entsprechende für eine Abbildung* $g : P_0^n \oplus P_1^n \to S^n$ *vom Grade* 1 — *und umgekehrt.*

Im Gegensatz hierzu kann man Satz 4 in 6.4 nicht in analoger Weise verschärfen, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei M^4 die komplexe projektive Ebene, die eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und $g : M^4 \to S^4$ eine Abbildung vom Grade 1. Nimmt man $V = S^4$ als Bildraum, so ist $g^* : \pi_4(S^4) \to \pi(M^4, S^4)$ monomorph, weil für jedes $a : S^4 \to S^4$

$$\operatorname{Grad}(a \circ g) = \operatorname{Grad} a$$

ist. Die Identität $1 : S^1 \to S^1$ induziert trivialerweise einen Monomorphismus $\pi_1(S^4) \to \pi(S^1, S^4) = \pi_1(S^4) = 0$. Dagegen ist $\pi_5(S^4) \to \pi(M^4 \times S^1, S^4)$, induziert durch eine Abbildung $M^4 \times S^1 \to S^5$ vom Grade 1, nicht monomorph.

Beweis. Sei $p : M^4 \times S^1 \to M^4 \wedge S^1 = SM^4$ die natürliche Projektion (vgl. 5.3). $Sg \circ p : M^4 \times S^1 \to S^5$ hat den Grad 1 (vgl. den Beweis von Satz 4 in 6.4). Wäre $(Sg \circ p)^* = p^* \circ (Sg)^* : \pi_5(S^4) \to \pi(M^4 \times S^1, S^4)$ monomorph, so auch $(Sg)^* : \pi_5(S^4) \to \pi(SM^4, S^4)$. Das ist aber unmöglich, denn $\pi_5(S^4) \neq 0$ und $\pi(SM^4, S^4) = 0$. Letzteres folgt z.B. aus dem Steenrodschen Klassifikationssatz [*10*] Th. 28.1, wenn man beachtet, daß das „Steenrodsche Quadrat" $Sq^2 : H^3(SM^4, Z_2) \to H^5(SM^4, Z_2)$ [5]) epimorph ist ([*10*] § 20). Man kann es aber

[5]) Zur Definition s. Steenrod [*10*], [*12*], [*13*], [*14*]. Z_m bezeichnet die zyklische Gruppe der Ordnung m. Sq^i ist die heute übliche Bezeichnung für Sq_{q-i} in [*10*], wenn es sich um die Abbildung der q-ten in die $(q+i)$-te Kohomologiegruppe handelt. Sq^0 = Identität, und $Sq^i = 0$ für $i > q$.

auch dem Beweis von Satz 9 in [7] entnehmen: Bei Benutzung der dortigen Bezeichnungen ist die Ordnung s von $\pi_5(S^4)$ gleich 2, und nimmt man für $f_1: S_1^4 \to S^3$ die konstante Abbildung und für $f_2: S_2^4 \to S^3$ die Einhängung der Hopfschen Faserung $S^3 \to S^2$, so stimmt die dort konstruierte Pseudomannigfaltigkeit P mit SM^4 überein (vgl. auch [10] § 20, wo M^4 genau beschrieben ist).

6.7. Satz 8. *Ist die Pseudomannigfaltigkeit P^n sphärenähnlich, so verschwinden für ihre Einhängung SP^n alle Kohomologieoperationen (zur Definition s.* STEENROD [12])

$$k: H^q(SP^n, G) \to H^{n+1}(SP^n, G')$$

mit $0 < q < n+1$ und mit beliebigen Koeffizientengruppen G, G'.

Beweis. Nach 6.3 Satz 3 gibt es eine Abbildung $r: S^{n+1} \to SP^n$ vom Grade 1. r^* sei der induzierte Homomorphismus der Kohomologiegruppen. Für jedes $c \in H^q(SP^n, G)$ gilt $r^* k(c) = k r^*(c) = k(0) = 0$, denn $r^*(c) \in H^q(S^{n+1}, G) = 0$. Daraus folgt $k(c) = 0$, da r^* in der Dimension $n+1$ ein Isomorphismus ist.

Die „Steenrodschen Quadrate" $Sq^i: H^q(X, Z_2) \to H^{q+i}(X, Z_2)$[5]) sind Kohomologieoperationen, die mit der Einhängung vertauschbar sind, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(P^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^n(P^n, Z_2) \\ \| & & \| \\ H^{n-i+1}(SP^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+1}(SP^n, Z_2) \end{array} \qquad 0 \leqq i < n$$

ist kommutativ (STEENROD [10] (11.5), (11.6)[6]). Aus Satz 8 ergibt sich daher:

Folgerung 1. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^{n-i}(P^n, Z_2) \to H^n(P^n, Z_2)$ für $i > 0$.*

Auch die „zyklischen reduzierten Potenzen"

$$\mathscr{P}^i: H^q(X, Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X, Z_p)$$

[p = ungerade Primzahl, zur Definition s. STEENROD [14] (6.8)] sind mit der Einhängung vertauschbar ([14] (6.16)), und man erhält analog:

Folgerung 2. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die zyklischen reduzierten Potenzen*

$$\mathscr{P}^i: H^{n-2i(p-1)}(P^n, Z_p) \to H^n(P^n, Z_p) \qquad \text{für } i > 0.$$

Als weiteres spezielles Beispiel interessieren die bei J. H. C. WHITEHEAD [20] § 5 definierten Kohomologieoperationen

$\mathfrak{p}_0: H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$, „Postnikow-Quadrat"

$\mathfrak{p}_1: H^q(X, G) \to H^{2q}(X, \Gamma(G))$, q = gerade, „Pontrjagin-Quadrat".

[6]) Daß in [10] ein etwas anderer Begriff der Einhängung benutzt wird ist unwesentlich, da die beiden verschiedenen Einhängungen für CW-Komplexe homotopieäquivalent sind (1.8 Hilfssatz 5).

(Zur Definition von $\Gamma(G)$ s. J. H. C. WHITEHEAD [19] Chap. II.) Der Isomorphismus $H^{q+1}(S P^n, G) \cong H^q(P^n, G)$ $(q > 0)$ ist im wesentlichen durch den Korandhomomorphismus

$$H^q(P^n, G) \to \delta^* : H^{q+1}(\tilde{C} P^n, P^n; G)$$

gegeben (s. STEENROD [10] § 11; $\tilde{C} P^n$ bezeichnet den Kegel über P^n, vgl. auch [8] 3.7, wo der analoge Isomorphismus der Homologiegruppen ausführlich behandelt wird). Daher besagt die Formel (5.5) in [20], daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(P^n, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0} & H^n(P^n, \Gamma(G)) \\ \| & & \| \\ H^{q+1}(S P^n, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_1} & H^{n+1}(S P^n, \Gamma(G)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} n = 2q+1, \\ 0 < q = \text{ungerade} \end{array}$$

kommutativ ist. Wir erhalten also aus Satz 8:

Folgerung 3. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n $(n = 2q+1,\ q = \text{ungerade})$ verschwindet das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^q(P^n, G) \to H^n(P^n, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G.*

6.8. Satz 9. *Jede zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^2 ist sphärenähnlich.*

Satz 10. *Eine dreidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^3 ist genau dann sphärenähnlich, wenn das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^1(P^3, G) \to H^3(P^3, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G verschwindet. (Vgl. auch 6.9 Satz 11.)*

Um die übliche Hindernistheorie anwenden zu können, wählen wir zum Beweis dieser Sätze eine simpliziale Zerlegung von P^n $(n = 2, 3)$. σ sei ein (offenes) n-Simplex dieser Zerlegung und

$$g : P^n \to P^n / (P^n - \sigma) = S^n$$

die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt, die offenbar den Grad 1 hat. Für jedes $a : S^n \to V$ (V zunächst beliebig) ist dann $[a] \in \pi_n(V) = H^n(P^n, \pi_n(V))$ die Hinderniskohomologieklasse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung $P^n \to V$. Das wurde in der Einleitung unter Berufung auf [7] bereits ausgeführt.

Beweis von Satz 9. Nach 6.2 Satz 2 genügt es zu zeigen, daß die eben konstruierte Abbildung $g : P^2 \to S^2$ für den speziellen Bildraum $V = S(P^2 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^* : \pi_2(V) \to \pi(P^2, V)$ induziert. Weil $V = S(P^n - \sigma)$ einfach zusammenhängend ist (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9), stehen die Homotopieklassen von Abbildungen $P^2 \to V$ in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^2(P^2, \pi_2(V)) = \pi_2(V)$ (WHITNEY [21] Th. 4.5). Für jedes $a : S^n \to V$ entspricht $[a \circ g] = g^*[a]$ dabei seiner Hinderniskohomologieklasse $[a]$. Folglich wird diese umkehrbar eindeutige Beziehung gerade durch g^* geliefert. Insbesondere ist g^* monomorph.

Beweis von Satz 10. Ist P^3 sphärenähnlich, so ergibt sich das Verschwinden des Postnikow-Quadrats aus 6.7 Folgerung 3.

Zum Nachweis der Umkehrung genügt es nach 6.2 Satz 2 zu zeigen, daß die oben konstruierte Abbildung $g: P^3 \to S^3$ für $V = S(P^3 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_3(V) \to \pi(P^3, V)$ induziert. $V = S(P^3 - \sigma)$ ist einfach zusammenhängend (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9). Nach J. H. C. WHITEHEAD [20] § 7 ist $a \circ g: P^3 \to V$ (für irgendein $a: S^3 \to V$) genau dann nullhomotop, wenn die Hinderniskohomologieklasse $[a] \in \pi_3(V) = H^3(P^3, \pi_3(V))$ im Bild von

$$H^1(P^3, \pi_2(V)) \xrightarrow{\mathfrak{p}_0} H^3(P^3, \Gamma(\pi_2(V))) \xrightarrow{i_*} H^3(P^3, \pi_3(V))$$

liegt. [i_* wird dabei durch den Homomorphismus $i: \Gamma(\pi_2(V)) \cong \Gamma_3(V) \to \pi_3(V)$ aus der exakten Folge $\Sigma(V)$ induziert, vgl. [19] §§ 1, 10, 13]. Verschwindet $\mathfrak{p}_0$, so folgt also $[a] = 0$ aus $[a \circ g] = 0$.

6.9. In Ergänzung zu 6.7 Folgerung 3 und 6.8 Satz 10 stellen wir einige Eigenschaften des Postnikow-Quadrats

$$\mathfrak{p}_0(G): H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$$

zusammen:

Eine ausführliche Untersuchung von $\Gamma(G)$ findet man bei J. H. C. WHITEHEAD [19] Chap. II. Ist Z die Gruppe der ganzen Zahlen und $Z_m = Z/mZ$ zyklisch von der Ordnung m, so gilt

$$\Gamma(Z) = Z \qquad ([19] \S 5 \text{ (A)})$$

$$\Gamma(Z_m) = \begin{cases} Z_m & \text{für ungerades } m \\ Z_{2m} & \text{für gerades } m \end{cases} \qquad ([19] \S 5 \text{ (B)}).$$

Nach [20] (5.1) wird $\mathfrak{p}_0(Z)$ und $\mathfrak{p}_0(Z_m)$ durch $c \to c \cup \delta c$ (δ = Korandoperator) induziert, wobei c eine ganzzahlige q-Kokette von X mit $\delta c = 0$ bzw. $\delta c \equiv 0 \bmod m$ ist. Daraus folgt:

$\mathfrak{p}_0(Z)$ und $\mathfrak{p}_0(Z_m)$ für ungerades m verschwinden immer.

Für gerades m ist dagegen nicht von vornherein $\mathfrak{p}_0(Z_m) = 0$, da dann $c \cup \delta c$ nicht mod m sondern nur mod $2m$ zu reduzieren ist.

Satz 11. *Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0(G): H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$ verschwindet schon dann für jede Koeffizientengruppe G, wenn es für die speziellen Gruppen Z_{2^k}, $k = 1, 2, \ldots$, verschwindet.*

Beweis. Ein Homomorphismus $\xi: G' \to G$ induziert $\Gamma\xi: \Gamma(G') \to \Gamma(G)$ (s. [19] § 6). Aus den Definitionen von $\Gamma\xi$ und $\mathfrak{p}_0$ (s. [20] (5.1)) folgt unmittelbar, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, G') & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0(G')} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G')) \\ {\scriptstyle \xi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\Gamma\xi)_*} \\ H^q(X, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0(G)} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G)) \end{array}$$

kommutativ ist.

Sei nun zunächst G endlich erzeugt. Dann ist $G=\sum_\nu G^{(\nu)}$ mit $G^{(\nu)}=Z$ oder Z_{p^k} ($p=$ Primzahl). Ist $\xi^{(\nu)}:G^{(\nu)}\to G$ die Injektion und $\eta^{(\nu)}:G\to G^{(\nu)}$ die Projektion, so gilt

$$\mathfrak{p}_0(G)\circ\xi^{(\nu)}_*=(\Gamma\xi^{(\nu)})_*\circ\mathfrak{p}_0(G^{(\nu)})=0,$$

denn $\mathfrak{p}_0(G^{(\nu)})$ verschwindet (für $G^{(\nu)}=Z$ oder Z_{p^k} mit ungeradem p immer, und für $G^{(\nu)}=Z_{2^k}$ nach Voraussetzung). Wegen $\sum_\nu \xi^{(\nu)}\circ\eta^{(\nu)}=1$ folgt

$$\mathfrak{p}_0(G)=\mathfrak{p}_0(G)\circ\sum_\nu \xi^{(\nu)}_*\circ\eta^{(\nu)}_*=\sum_\nu \mathfrak{p}_0(G)\circ\xi^{(\nu)}_*\circ\eta^{(\nu)}_*=0.$$

Im allgemeinen Fall (G eventuell nicht endlich erzeugt) gibt es zu jedem $c\in H^q(X,G)$ eine endlich erzeugte Untergruppe $G'<G$, so daß $c\in\xi_*H^q(X,G')$, wenn $\xi:G'\to G$ die Injektion bezeichnet. Nun ist, wie oben gezeigt wurde, $\mathfrak{p}_0(G)\circ\xi_*=(\Gamma\xi)_*\circ\mathfrak{p}_0(G')=0$, also $\mathfrak{p}_0(G)(c)=0$.

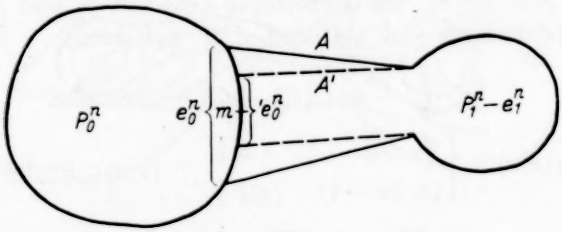


Fig. 2

6.10. Beweis von Satz 6. Es soll gezeigt werden, daß der Homotopietyp von $P_0^n\oplus P_1^n$ erhalten bleibt, wenn man die bei der Konstruktion benutzten Zellen $e_i^n<P_i^n$ und anheftenden Abbildungen $f_i:S^{n-1}\to P_i^n-e_i^n$ ($i=0,1$, vgl. 6.5) durch andere Zellen und anheftende Abbildungen ersetzt. Man beachte, daß hier ausnahmsweise keine Grundpunkte festgelegt wurden; es wird sich also immer um freie Homotopien und Homotopieäquivalenzen handeln.

I. Wir ändern zunächst nur e_0^n in $'e_0^n$, f_0 in $f_0':S^{n-1}\to P_0^n-{}'e_0^n$ ab, und zwar so, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{'e_0^n}$ von $'e_0^n$ in e_0^n liegt. Sei m ein Punkt in $'e_0^n$ und A bzw. A' entstehe aus

$$(P_0^n-m)+(P_1^n-e_0^n)+(S^{n-1}\times I)$$

durch die Identifizierungen (Fig. 2)

$$S^{n-1}\times I\ni(x,0)=f_0(x)\quad\text{bzw.}\quad f_0'(x)\in P_0^n-m$$
$$S^{n-1}\times I\ni(x,1)=f_1(x)\in P_1^n-e_1^n.$$

Weil $P_0^n-e_0^n$ und $P_0^n-{}'e_0^n$ Deformationsretrakte von P_0^n-m sind, ist $P_0^n\oplus P_1^n$ Deformationsretrakt von A, wenn man $P_0^n\oplus P_1^n$ mit Hilfe von e_0^n, e_1^n, f_0, f_1 konstruiert, und Deformationsretrakt von A', wenn man $'e_0^n, e_1^n, f_0', f_1$ zur Konstruktion benutzt (vgl. 6.5). Um zu sehen, daß sich der Homotopietyp

von $P_0^n \oplus P_1^n$ bei Ersetzung von e_0^n, f_0 durch ${}'e_0^n, f_0'$ nicht ändert, genügt es also zu zeigen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist:

P_0^n sollte aus $P_0^n - e_0^n$ durch Anheften einer Vollkugel E^n mittels $f_0: S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n$ entstehen (S^{n-1} = Randsphäre von E^n). Man kann daher ${}'e_0^n$ als Teilmenge von $E^n - S^{n-1}$ und f_0' als Abbildung in $E^n - S^{n-1} \subset E^n$ auffassen. Weil $f_0'(S^{n-1})$ in E^n die Verschlingungszahl 1 mit m hat (vgl. die Orientierungsvorschriften in 6.5), ist $f_0': S^{n-1} \to E^n - m$ zu der Injektion $S^{n-1} \to E^n - m$ homotop. Durch Zusammensetzen mit der Identifizierung $(E^n - m) + (P_0^n - e_0^n) \to P_0^n - m$ gehen diese Abbildungen in

$$f_0': S^{n-1} \to P_0^n - {}'e_0^n \subset P_0^n - m$$

bzw.

$$f_0: S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n \subset P_0^n - m$$

über, die infolgedessen als Abbildungen in $P_0^n - m$ homotop sind. Sei $\Phi_t: S^{n-1} \to P_0^n - m$ $(t \in I)$ eine Homotopie zwischen f_0 und f_0', d.h. $\Phi_0 = f_0$, $\Phi_1 = f_0'$. Wir definieren $\chi: A \to A'$ und $\chi': A' \to A$ durch

$$\chi \,|\, [(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi(x, s) = \begin{cases} \Phi_{2s}(x), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x, 2s - 1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x, s) \in S^{n-1} \times I$$

$$\chi' \,|\, [(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi'(x, s) = \begin{cases} \Phi_{1-2s}(x), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x, 2s - 1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x, s) \in S^{n-1} \times I.$$

Wie man leicht sieht, ist dann

$$\chi' \circ \chi \simeq 1, \quad \chi \circ \chi' \simeq 1;$$

denn $\chi' \circ \chi$ ist auf $(P_0^n - m) \cap (P_1^n - e_1^n)$ die Identität, und die Strecke $x \times I \subset S^{n-1} \times I$ geht in einen Weg über, der sich aus dem Deformationsweg von x bei der Homotopie Φ_t, dem Inversen davon und der Strecke $x \times I$ zusammensetzt. Analoges gilt für $\chi \circ \chi'$. Es ist also bewiesen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist.

II. Nun werden wir uns von der Voraussetzung $\overline{{}'e_0^n} \subset e_0^n$ befreien: Seien $e_{01}^n, e_{02}^n \subset P_0^n$ irgend zwei n-Zellen. Man wähle eine simpliziale Zerlegung von P_0^n und zwei n-Zellen ${}'e_{01}^n, {}'e_{02}^n \subset P_0^n$, so daß $\overline{{}'e_{0j}^n}$ $(j = 1, 2)$ ganz im Inneren eines n-Simplexes von P_0^n und zugleich in e_{0j}^n enthalten ist (Fig. 3). Man verbinde einen Punkt von ${}'e_{01}^n$ mit einem Punkt von ${}'e_{02}^n$ durch einen doppelpunktfreien Weg, der das $(n-2)$-dimensionale Gerüst von P_0^n nicht trifft. Nach Definition der Pseudomannigfaltigkeit ist das möglich (Verbindbarkeit, vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 24). Eine geeignete „schlauchartige" Umgebung e_{03}^n dieses Weges ist eine n-Zelle und enthält $\overline{{}'e_{01}^n}$ und $\overline{{}'e_{02}^n}$.

Haben die Ausgangszellen e_{0i}^n die Eigenschaft, daß P_0^n aus $P_0^n - e_{0i}^n$ durch Anheften einer Vollkugel entsteht[7]), so kann man die drei weiteren hier betrachteten Zellen offenbar so wählen, daß sie auch die entsprechende Eigenschaft haben. Nach dem Beweisschritt I ändert sich der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ nicht, wenn man bei der Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$

e_{01}^n durch $'e_{01}^n$, $'e_{01}^n$ durch e_{03}^n, e_{03}^n durch $'e_{02}^n$, oder $'e_{02}^n$ durch e_{02}^n

ersetzt (und dabei beliebige anheftende Abbildungen benutzt), also auch dann nicht, wenn man e_{01}^n durch e_{02}^n ersetzt.

III. Entsprechend kann man die aus P_1^n herausgenommene Zelle e_1^n beliebig abändern, und Satz 6 ist bewiesen.

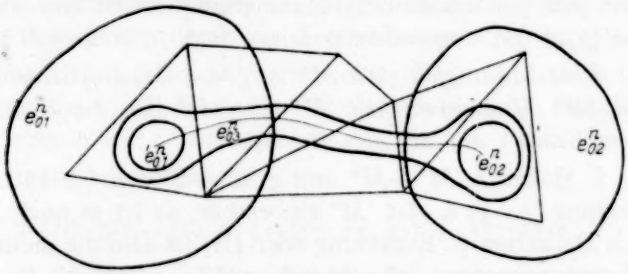


Fig. 3

§ 7. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

7.1. Unter einer *Mannigfaltigkeit* M^n verstehen wir hier eine kompakte, orientierbare und orientierte, homogene Mannigfaltigkeit, die sich mit einer Differenzierbarkeitsstruktur[8]) versehen läßt. Jede solche Mannigfaltigkeit ist eine Pseudomannigfaltigkeit im Sinne der Einleitung und des vorigen Paragraphen. (Zur Frage der simplizialen Zerlegbarkeit vgl. J. H. C. WHITEHEAD [17] Th. 7.)

Ist M^n einer differenzierbaren Teilmannigfaltigkeit des euklidischen Raumes R^{n+1} homöomorph (nicht notwendig differenzierbar homöomorph), so nennen wir M^n *einbettbar*.

Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1}. Wir erweitern R^{n+1} durch den Punkt ∞ zur Sphäre S^{n+1}. Trägt man auf jeder Normalen durch einen Punkt von M^n nach beiden Seiten eine (abgeschlossene) Strecke der Länge $\varepsilon > 0$ ab, so erhält man, falls ε genügend klein ist, eine (abgeschlossene) Umgebung U von M^n, die dem Produkt $M^n \times I$ homöomorph ist (vgl. THOM [15] II.3, „voisinage tubulaire"[9])). Die natürliche Projektion $M^n \times I \to SM^n$ auf die Einhängung von M^n (vgl. 1.8) läßt sich zu einer Abbildung

[7]) Mir ist nicht bekannt, ob das eine echte Einschränkung ist.

[8]) „Differenzierbar" bedeutet hier immer: beliebig oft differenzierbar.

[9]) Im allgemeinen ist die „voisinage tubulaire" ein (nichttrivialer) Faserraum über M^n. In unserem Fall ist der Faserraum trivial, weil M^n als orientierbare Hyperfläche in R^{n+1} zweiseitig ist.

$r: S^{n+1} \to SM^n$ erweitern (das Komplement von $U = M^n \times I$ geht in den Grundpunkt über), die offenbar den Grad 1 hat. Daraus und aus 6.3 Satz 3 folgt:

Jede einbettbare Mannigfaltigkeit ist sphärenähnlich.

Bemerkungen. 1. Hier wurde die Tatsache, daß M^n eine Mannigfaltigkeit ist (und nicht bloß eine Pseudomannigfaltigkeit) nur benutzt, um die Existenz von U, d.h. die Möglichkeit, $M^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einzulagern, zu zeigen. Für Pseudomannigfaltigkeiten P^n gilt also: *Läßt sich $P^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einbetten, so ist P^n sphärenähnlich.*

2. Es ist leicht zu zeigen, daß jedes Produkt von Sphären einbettbar ist. Man könnte also 6.4 Satz 5 auch hier gewinnen.

7.2. Nicht jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist einbettbar, wie die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p zeigen (vgl. 7.7). Es gilt jedoch:

Satz 12. *Eine Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine einbettbare Mannigfaltigkeit $'M^n$ gibt, die sich durch eine Abbildung $'M^n \to M^n$ vom Grade 1 auf M^n abbilden läßt.*

Beweis. I. Haben $h: 'M^n \to M^n$ und $g: M^n \to S^n$ den Grad 1, so auch ihre Zusammensetzung $'g = g \circ h$. Ist $'M^n$ einbettbar, so ist es nach 7.1 sphärenähnlich; nach Definition (s. Einleitung oder 1.1) ist also die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $'g^* = h^* \circ g^*: \pi_n(V) \to \pi('M^n, V)$ für jeden Bildraum V monomorph. Folglich ist auch g^* monomorph. Das zeigt, daß die Bedingung für Sphärenähnlichkeit hinreichend ist.

II. Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß M^n sphärenähnlich ist. Dann gibt es nach 6.3 Satz 3 eine Abbildung $S^{n+1} \to SM^n$ vom Grade 1. Statt SM^n benutzen wir hier besser die andere Art der Einhängung $\tilde{S}M^n$ (vgl. 1.8) und verzichten auf die Festlegung von Grundpunkten. $\tilde{S}M^n$ entsteht aus $M^n \times I$ durch Identifizieren von $M^n \times 0$ und $M^n \times 1$ zu je einem Punkt s_- bzw. s_+. Nach 1.8 Hilfssatz 5 ist $\tilde{S}M^n$ mit SM^n homotopieäquivalent, also gibt es auch eine Abbildung $f': S^{n+1} \to \tilde{S}M^n$ vom Grade 1. $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\}$ ist das Produkt von M^n mit einer offenen Strecke, die wir für den Augenblick durch die euklidische Gerade R^1 repräsentieren. Wir wählen auf M^n eine Differenzierbarkeitsstruktur[8]) und eine Metrik (im Sinne der Topologie, nicht Riemannsche Metrik). Die Metrik sei etwa dadurch bestimmt, daß M^n in einen euklidischen Raum R^m genügend hoher Dimension topologisch (nicht unbedingt differenzierbar) eingebettet wird. Damit ist eine Differenzierbarkeitsstruktur auf $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ gegeben und eine Metrik ϱ (die Produktmetrik mit der euklidischen Metrik von R^1). Auch $S^{n+1} - f'^{-1}\{s_-, s_+\} = f'^{-1}(M^n \times R^1)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (allerdings nicht kompakt und eventuell nicht zusammenhängend). Nach STEENROD [11] 6.7 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare ε-Approximation von $f' | f'^{-1}(M^n \times R^1)$, d.h. eine differenzierbare[8]) Abbildung

$$f'': f'^{-1}(M^n \times R^1) \to M^n \times R^1 \subset \tilde{S}M^n$$

mit $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in f'^{-1}(M^n \times R^1)$. Die Festsetzung $f''(x) = f'(x)$ für alle $x \in f'^{-1}\{s_-, s_+\}$ ergänzt f'' zu einer stetigen Abbildung $S^{n+1} \to S M^n$, denn wegen $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ strebt $f''(x)$ zugleich mit $f'(x)$ gegen s_- bzw. s_+. Wird ε genügend klein gewählt, so ist $f'' \simeq f'$[10]), also hat mit f' auch f'' den Grad 1.

Wir identifizieren M^n mit $M^n \times 0 \subset M^n \times R^1 \subset \tilde{S} M^n$. Nach THOM [15] Th. I.5 gibt es einen differenzierbaren Homöomorphismus h von $M^n \times R^1$ auf sich mit folgenden Eigenschaften:

a) h ist außerhalb von $\{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \in R^1,\ |t| \leqq 1\}$ die Identität.

b) h bildet $y \times R^1$ für jedes $y \in M^n$ in sich ab.

c) Setzt man $f = h \circ f''$, so besteht $f^{-1}(M^n)$ aus (einer oder mehreren) differenzierbaren Teilmannigfaltigkeiten $'M_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, q'$, von S^{n+1}.

Wegen a) läßt sich h durch die Festsetzungen $h(s_-) = s_-$, $h(s_+) = s_+$ auf ganz $\tilde{S} M^n$ und damit f auf S^{n+1} erweitern. Wegen b) ist $h \simeq 1$ [man kann (y, t) mit $h(y, t)$ in $y \times R^1$ durch eine Strecke verbinden]. Folglich ist $f \simeq f''$; f hat daher ebenso wie f'' den Grad 1.

Zur Abkürzung wird definiert

$$C_- M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \leqq 0\} \cup \{s_-\} \subset \tilde{S} M^n$$

$$C_+ M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \geqq 0\} \cup \{s_+\} \subset \tilde{S} M^n$$

$$\bar{f} = f \mid f^{-1}(M^n).$$

Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(S^{n+1}) & \to & H_{n+1}\big(S^{n+1}, f^{-1}(C_- M^n)\big) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}\big(f^{-1}(C_+ M^n), f^{-1}(M^n)\big) & \to & H_n\big(f^{-1}(M^n)\big) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_*} \\
H_{n+1}(\tilde{S} M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_{n+1}(\tilde{S} M^n, C_- M^n) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(C_+ M^n, M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M^n),
\end{array}$$

in dem die vertikalen Homomorphismen durch die Abbildung f und ihre Einschränkungen, die horizontalen durch Injektionen bzw. durch den Randhomomorphismus induziert sind, ist kommutativ. Einige Homomorphismen sind als Isomorphismen gekennzeichnet. Daß das richtig ist, folgt aus dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property") bzw. aus der Zusammenziehbarkeit von $C_- M^n$ und $C_+ M^n$. Weil f den Grad 1 hat, ist f_* epimorph. Aus dem Diagramm ergibt sich, daß dann alle vertikalen Abbildungen Epimorphismen sein müssen, insbesondere auch $\bar{f}_*$. Sind z_i' und z Erzeugende von $H_n('M_i^n) \subset H_n\big(f^{-1}(M^n)\big)$ [vgl. oben c)] bzw. $H_n(M^n)$, so gibt

[10]) Beweis. Nach Voraussetzung liegt M^n in R^m und trägt die induzierte Metrik. In naheliegender Weise läßt sich $\tilde{S} M^n$ so in R^{m+1} einbetten, daß die induzierte Metrik $\bar{\varrho}$ auf $\tilde{S} M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ durchweg kleiner ist als ϱ. Es ist also erst recht $\bar{\varrho}(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in S^{n+1}$. Nun folgt die Behauptung aus Satz II und III bei ALEXANDROFF-HOPF [1] S. 343f.

es demnach eine Linearkombination $\sum_i \gamma_i z_i'$ mit

$$\bar{f}_*\left(\sum_i \gamma_i z_i'\right) = z. \tag{1}$$

z ist durch die Orientierung von M^n festgelegt; z_i' und damit die Orientierung von $'M_i^n$ wählen wir so, daß $\gamma_i \geqq 0$ ist für alle i.

Für jedes i nehmen wir nun γ_i Exemplare von $'M_i^n$. Die Gesamtheit dieser Mannigfaltigkeiten wird in der Form M_j^n, $j = 1, 2, \ldots, q$, neu durchnumeriert; d. h. jedes M_j^n ist ein $'M_i^n$, und jedes $'M_i^n$ kommt unter den M_j^n genau γ_i-mal vor. Wird

$$f^{(j)} = \bar{f} \,|\, M_j^n = f \,|\, M_j^n \tag{2}$$

gesetzt, und bezeichnet man die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^n(M_j^n)$ mit z_j ($= z_i'$ für ein gewisses i), so kann man (1) in der Form

$$\sum_{j=1}^{q} f_*^{(j)}(z_j) = z \tag{3}$$

schreiben.

Eine einbettbare Mannigfaltigkeit $'M^n$, die sich mit dem Grade 1 auf M^n abbilden läßt, erhält man nun in der Form $'M^n = M_1^n \oplus M_2^n \oplus M_3^n \oplus \cdots \oplus M_q^n$ (Summe im Sinne von 6.5). Wir werden nämlich zeigen:

A) *Man kann die Konstruktion von* $M_1^n \oplus M_2^n \oplus \cdots \oplus M_q^n$ *(vgl. 6.5) so ausführen, daß eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit* $'M^n$ *des euklidischen Raumes* R^{n+1} *entsteht.*

B) *Es gibt eine Abbildung* $'M^n \to M^n$ *vom Grade* 1.

Beweis von A). Nach Konstruktion sind die Mannigfaltigkeiten M_j^n ($= 'M_i^n$ für geeignetes i) einbettbar. Wir legen sie disjunkt in den R^{n+1}. Um zunächst $M_1^n \oplus M_2^n$ zu bilden, wählen wir auf M_1^n und M_2^n je eine (kleine) abgeschlossene Vollkugel. Ihr Inneres sei die Zelle e_i^n ($i = 1, 2$). Daß sich die Ränder von $M_1^n - e_1^n$ und $M_2^n - e_2^n$ überhaupt in R^{n+1} durch einen „Schlauch" $S^{n-1} \times I$ verbinden lassen, der topologisch eingelagert ist und abgesehen von seinen Randsphären, keine Punkte mit $M_1^n \cup M_2^n$ gemeinsam hat, ist klar. Durch „Abrunden" an den Ansatzstellen sorgt man dafür, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit entsteht. Um wirklich $M_1^n \oplus M_2^n$ zu erhalten, muß man jedoch noch auf die Orientierungen achten: Wenn der Verbindungsschlauch $S^{n-1} \times I$ an M_2^n „von außen" angesetzt wird, so wird durch die Orientierungen festgelegt, ob er an M_1^n „von außen" oder „von innen" angesetzt werden muß. Je nachdem ob das eine oder andere der Fall ist, legen wir M_2^n in das Außen- oder Innengebiet von M_1^n (eventuell unter Abänderung der zuerst gewählten Einbettung). Dann sind auch die Orientierungsvorschriften erfüllt. Analog wird $(M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n$ aus $M_1^n \oplus M_2^n$ und M_3^n gebildet, und in dieser Weise fortfahrend, ganz $'M^n = M_1^n \oplus M_2^n \oplus \cdots \oplus M_q^n$ als differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1} konstruiert.

Beweis von B). Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir für die Zellen, die bei der Konstruktion von

$$M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \quad ((M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n) \oplus M_4^n, \ldots$$

aus

$$M_1^n, \quad M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \ldots$$

herausgenommen werden, disjunkte Zellen auf M_1^n wählen. Identifiziert man dann in den „Verbindungsschläuchen" $S^{n-1} \times I$, die in $'M^n$ auftreten, jeweils die „mittlere Sphäre" $S^{n-1} \times \frac{1}{2}$ zu einem Punkt, so entsteht ein Raum X, den man aus der topologischen Summe $M_1^n + M_2^n + \cdots + M_q^n$ dadurch erhalten kann, daß je ein Punkt $m_j \in M_j^n$ $(j = 2, 3, \ldots, q)$ mit einem gewissen Punkt $m_{1j} \in M_1^n$ identifiziert wird. $\psi: 'M^n \to X$ sei die natürliche Projektion. Setzt man $'f^{(1)} = f^{(1)}$ [vgl. (2)] und deformiert man $f^{(j)}$ in $'f^{(j)}: M_j^n \to M^n$ so, daß $'f^{(j)}(m_j) = f^{(1)}(m_{1j})$ ist $(j = 2, 3, \ldots, q)$, so induzieren die $'f^{(j)}$ zusammen $(j = 1, 2, \ldots, q)$ eine Abbildung $\varphi: X \to M^n$, definiert durch $\varphi | M_j^n = {}'f^{(j)} \cdot \varphi \circ \psi: 'M^n \to M^n$ hat den Grad 1, denn sind z, z' und z_j die durch die Orientierung bestimmten Erzeugenden von $H_n(M^n)$, $H_n('M^n)$ bzw. $H_n(M_j^n) < H_n(X)$, so ist

$$\varphi_* \psi_* (z') = \varphi_* \left(\sum_j z_j \right) = \sum_j {}'f_*^{(j)}(z_j) = \sum_j f_*^{(j)}(z_j),$$

also nach (3)

$$\varphi_* \psi_* (z') = z.$$

7.3. Bemerkung. Bekanntlich bedeutet die Existenz einer Abbildung $g: 'M^n \to M^n$ vom Grade 1 eine starke Einschränkung für das Paar von Mannigfaltigkeiten $('M^n, M^n)$. Wir heben hier zwei Punkte hervor (vgl. auch 7.5 Satz 15):

A) *g induziert Epimorphismen der Homologie- und Monomorphismen der Kohomologiegruppen (mit beliebigen Koeffizientengruppen).*

Beweis. Sind $g_*: H_i('M^n, G) \to H_i(M^n, G)$, $g^*: H^i(M^n, G) \to H^i('M^n, G)$ die induzierten Homomorphismen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, so gilt für alle $c \in H^i(M^n, G)$, $z' \in H_j('M^n, Z)$ (G ist irgendeine abelsche Gruppe, Z die Gruppe der ganzen Zahlen):

$$g_* (g^*(c) \cap z') = c \cap g_*(z'). \tag{4}$$

(Vgl. Gysin [5] (5.11), das $\cap$-Produkt ist eine bilineare Abbildung $H^i(M^n, G) \times H_j(M^n, Z) \to H_{j-i}(M^n, G)$, die in gewisser Weise — s. [5] — durch die natürliche bilineare Abbildung $G \times Z \to G$ induziert wird.) Ist z' speziell die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n('M^n, Z)$, so ist $z = g_*(z')$ die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n(M^n, Z)$. Die Zuordnung $c \to c \cap z$ definiert einen Isomorphismus $H^i(M^n, G) \to H_{n-i}(M^n, G)$ (Poincarésche Dualitätssatz, vgl. [5] § 6). Daher läßt sich jede Homologieklasse von M^n in der Form $c \cap z$ schreiben, ist also nach (4) g_*-Bild von $g^*(c) \cap z'$, d.h. g_* ist epimorph. Aus $g^*(c) = 0$ folgt $c \cap z = 0$ nach (4) und daraus $c = 0$ nach dem Poincaréschen Dualitätssatz, d.h. g^* ist monomorph.

B) *Ist $'M^n$ vom Homotopietyp der Sphäre S^n, so auch M^n.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß es eine Abbildung $g': S^n \to M^n$ vom Grade 1 gibt. Ist $\tilde{M}^n$ eine Überlagerung von M^n, so läßt sich $g': S^n \to M^n$ in eine Abbildung $\tilde{g}: S^n \to \tilde{M}^n$ und die Projektion $p: \tilde{M}^n \to M^n$ zerlegen (vgl. z.B. STEENROD [11] 17.6). $g' = p \circ \tilde{g}$ kann nur dann den Grad 1 haben, wenn $\tilde{M}^n$ kompakt ist [denn sonst ist $H_n(\tilde{M}^n) = 0$] und p den Grad ± 1 hat. Dann ist aber $\tilde{M}^n$ keine echte Überlagerung von M^n, sondern p ist eine Homöomorphie. Daraus folgt $\pi_1(M^n) = 0$. Nach A) ist $g'_*: H_i(S^n) \to H_i(M^n)$ epimorph und wegen der speziellen Struktur von $H_i(S^n)$ sogar isomorph. Folglich ist g' eine Homotopieäquivalenz (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [18] Th. 3).

7.4. Sei $H^*(X, Z_2) = \sum_{q=0}^{\infty} H^q(X, Z_2)$ der Kohomologiering mod 2 des Raumes X. Das $\smile$-Produkt liefert die multiplikative Struktur. Die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^q(X, Z_2) \to H^{q+i}(X, Z_2)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ definieren additive Endomorphismen Sq^i von $H^*(X, Z_2)$ mit $Sq^0 =$ Identität und $Sq^i\left(H^q(X, Z_2)\right) = 0$ für $i > q$ [vgl. Fußnote [5]) S. 401]. Aus letzterem folgt, daß $Sq^i(c)$ für ein festes $c \in H^*(X, Z_2)$ nur für endlich viele i von 0 verschieden ist. Man kann daher den Endomorphismus $Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$ bilden. Die Cartansche Produktformel [3] (5) besagt, daß Sq auch in bezug auf die multiplikative Struktur von $H^*(X, Z_2)$ ein Endomorphismus ist.

Für jedes $c \in H^*(X, Z_2)$ bezeichne c_q den homogenen Bestandteil vom Grade q, d.h.

$$c = \sum_q c_q, \qquad c_q \in H^q(X, Z_2).$$

Ist $c \neq 0$ und q die kleinste Zahl mit $c_q \neq 0$, so gilt

$$\left(Sq(c)\right)_q = \left(Sq^0(c_q)\right)_q = c_q \neq 0;$$

folglich ist Sq monomorph.

Der Endomorphismus $1 + Sq = \sum_{i=1}^{\infty} Sq^i$ bildet $\sum_{i=q}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ in $\sum_{i=q+1}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ ab. Ist also $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle $i > n$, so ist $(1 + Sq)^{n+1} = 0$. Durch Binomialentwicklung der linken Seite folgt

$$Sq \circ \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} (Sq)^{\nu-1} = 1$$

und damit die Epimorphie von Sq. Zusammenfassend stellen wir fest:

Für einen Raum X mit endlicher Kohomologiedimension (genauer: $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle genügend großen i) ist Sq ein Ringautomorphismus von $H^*(X, Z_2)$.

7.5. Nach WU [23] läßt sich die Stiefel-Whitneysche Klasse einer Mannigfaltigkeit M^n folgendermaßen aus ihrem Kohomologiering mod 2 und dem Automorphismus Sq bestimmen:

Ist $u_i \in H^i(M^n, Z_2)$, so definiert die Zuordnung $c_{n-i} \to u_i \cup c_{n-i}$ $(c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2))$ einen Homomorphismus $H^{n-i}(M^n, Z_2) \to H^n(M^n, Z_2)$. Nach dem Poincareschen Dualitätssatz erhält man auf diese Weise einen Isomorphismus zwischen $H^i(M^n, Z_2)$ und der Gruppe der Homomorphismen von $H^{n-i}(M^n, Z_2)$ in $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$. Sei nun u_i dasjenige Element von $H^i(M^n, Z_2)$, das dem Homomorphismus $Sq^i: H^{n-i}(M^n, Z_2) \to H^n(M^n, Z_2)$ entspricht, d.h.

$$u_i \cup c_{n-i} = Sq^i(c_{n-i}) \qquad \text{für alle } c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2).$$

Wir bilden $u = \sum_{i=0}^{n} u_i$, das auch durch

$$(u \cup c)_n = \big(Sq(c)\big)_n \qquad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2) \tag{5}$$

definiert werden kann. (Wie in 7.4 bezeichnet der Index n den homogenen Bestandteil vom Grade n.) Nach Wu [23] ist dann $w = Sq(u)$ die *Stiefel-Whitneysche Klasse von* M^n (d.h. $w = \sum_{i=0}^{n} w_i$, $w_0 = 1$ = Einselement des Kohomologierings, w_i = Stiefel-Whitneysche Klasse der Dimension i für $i > 0$).

Für eine sphärenähnliche Mannigfaltigkeit M^n ist nach 6.7 Folgerung 1:

$$\big(Sq(c)\big)_n = \big(Sq^0(c)\big)_n = c_n \qquad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2),$$

also nach (5)

$$u = 1 \quad \text{und} \quad w = Sq(u) = 1.$$

Das zeigt:

Satz 13. *Die Stiefel-Whitneysche Klasse w einer sphärenähnlichen Mannigfaltigkeit ist trivial (d.h. $w = w_0 = 1$, $w_i = 0$ für $i > 0$).*

Insbesondere verschwinden für sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten alle Stiefel-Whitneyschen „Zahlen", d.h. alle Elemente von $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$, die sich im Kohomologiering $H^*(M^n, Z_2)$ als Polynome in den Stiefel-Whitneyschen Klassen w_i darstellen lassen. Nach Thom [15] Th. IV.10 folgt daraus:

Satz 14. *Jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist (im Sinne von* Thom [15] IV. 1) *Rand mod 2 einer geeigneten berandeten Mannigfaltigkeit.*

Satz 13 hätte man statt aus 6.7 auch aus 7.2 Satz 12 folgern können: Die Stiefel-Whitneysche Klasse einer einbettbaren Mannigfaltigkeit ist nämlich trivial[11]), und es gilt:

Satz 15. *Gibt es eine Abbildung $g: 'M^n \to M^n$ vom Grade 1 und ist die Stiefel-Whitneysche Klasse w' von $'M^n$ trivial, so auch die von M^n.*

[11]) Beweis. Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1}, $w \in H^*(M^n, Z_2)$ ihre Stiefel-Whitneysche Klasse und $\overline{w} \in H^*(M^n, Z_2)$ die Whitneysche Klasse des Faserraums der Normalenvektoren von M^n in R^{n+1}. Da dieser Faserraum trivial ist, gilt $\overline{w} = 1$. Nach der Whitneyschen Dualitätsformel (s. Wu [22] Th. II) ist $w \cup \overline{w} = w$ die Whitneysche Klasse des Faserraums der Tangentenvektoren von R^{n+1}, eingeschränkt auf M^n. Dieser ist ebenfalls trivial, also $w = 1$.

Beweis. Nach der beschriebenen Konstruktion von WU ist $w' = Sq(u')$, wobei u' durch eine zu (5) analoge Formel in $'M^n$ definiert ist. Aus der Voraussetzung $w' = 1$ folgt $u' = 1$, weil Sq ein Automorphismus ist (7.4); also

$$(6) \qquad \big(Sq(c')\big)_n = (u' \cup c')_n = c'_n \qquad \text{für alle } c' \in H^*('M^n, Z_2).$$

$H^*(M^n, Z_2)$ wird nach 7.3.A) durch g^* monomorph in $H^*('M^n, Z_2)$ abgebildet, man kann also $H^*(M^n, Z_2)$ mittels g^* als Unterring in $H^*('M^n, Z_2)$ einbetten. Weil die Sq^i Kohomologieoperationen sind (vgl. 6.7), ist Sq mit dieser Einbettung verträglich, und aus (6) folgt insbesondere

$$\big(Sq(c)\big)_n = c_n \qquad \text{für alle } c \in H^*(M^n, Z_2).$$

Bei der Berechnung der Stiefel-Whitneyschen Klasse w von M^n nach der Wuschen Methode ergibt sich also $u = 1$ [vgl. (5)] und $w = Sq(u) = 1$.

7.6. Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^1(P^3, G) \to H^3\big(P^3, \Gamma(G)\big)$, das in 6.8 ein Kriterium für die Sphärenähnlichkeit dreidimensionaler Pseudomannigfaltigkeiten P^3 lieferte (Satz 10), hängt im Spezialfall einer Mannigfaltigkeit $P^3 = M^3$ eng mit den Verschlingungszahlen zusammen. Wir beschränken uns auf den Fall $G = Z_m$ mit geradem m, was durch 6.9 gerechtfertigt wird.

Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung (für die m nicht gerade zu sein braucht): Die exakte Folge

$$0 \to Z \to Z \to Z_m \to 0,$$

bei der die Injektion $Z \to Z$ durch Multiplikation mit m gebildet wird, induziert für jeden Raum X exakte Folgen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, in denen die Rand- bzw. Korandhomomorphismen

$$\partial_m : H_i(X, Z_m) \to H_{i-1}(X, Z)$$
$$\delta_m : H^i(X, Z_m) \to H^{i+1}(X, Z)$$

auftreten. Wird $a \in H_i(X, Z_m)$ durch die ganzzahlige Kette $\tilde{a}$ mit $\partial \tilde{a} = m\tilde{b}$ (d.h. $\tilde{a}$ ist ein Zykel mod m) repräsentiert, so ist $\partial_m(a)$ die Homologieklasse von $\tilde{b}$. Entsprechendes gilt für δ_m.

Nun sei m gerade und $a \in H^q(X, Z_m)$, repräsentiert durch die ganzzahlige Kokette $\tilde{a}$ mit $\delta \tilde{a} = m\tilde{b}$. Dann ist $\mathfrak{p}_0(a) \in H^{2q+1}(X, Z_{2m})$ die Kohomologieklasse von $\tilde{a} \cup \delta\tilde{a} = m(\tilde{a} \cup \tilde{b})$ (vgl. 6.9). Andererseits ist $a \cup \delta_m(a) \in H^{2q+1}(X, Z_m)$[12]) die Kohomologieklasse von $\tilde{a} \cup \tilde{b}$. Ist $\mu : Z_m \to Z_{2m}$ die Multiplikation mit m und wird

$$\mu_* : H^i(X, Z_m) \to H^i(X, Z_{2m})$$

durch μ induziert, so gilt also

$$(7) \qquad \mathfrak{p}_0(a) = \mu_*\big(a \cup \delta_m(a)\big).$$

[12]) Hier wird das $\cup$-Produkt einer Kohomologieklasse mod m mit einer ganzzahligen Kohomologieklasse gebildet. Dem liegt die natürliche Paarung $Z_m \times Z \to Z_m$ in den Koeffizientengruppen zugrunde.

69-2126 28 A

Falls $X = M^3$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, läßt sich der Ausdruck $a^1 \cup \delta_m(a^1)$, $a^1 \in H^1(M^3, Z_m)$ leicht dualisieren und führt dann zu den Verschlingungszahlen. Bei den Isomorphismen $\mathfrak{d}: H^i(M^3, Z) \to H_{3-i}(M^3, Z)$ bzw. $\mathfrak{d}: H^i(M^3, Z_m) \to H_{3-i}(M^3, Z_m)$ des Poincaréschen Dualitätssatzes gehen $\cup$-Produkte in Schnitte von Homologieklassen (vgl. GYSIN [5] (6.11)) und δ_m geht in ∂_m über (denn benutzt man zur Berechnung der Homologie- und Kohomologiegruppen duale Zellteilungen von M^3, so ist der Randoperator ∂ dem Korandoperator δ dual). Folglich ist

$$\mathfrak{d}\left(a^1 \cup \delta_m(a^1)\right) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c_0, \qquad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{8}$$

Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Schnittzahl sowohl von Ketten als auch von Homologieklassen. In (8) handelt es sich um die Schnittzahl zwischen einer Homologieklasse mod m und einer ganzzahligen Homologieklasse; das Ergebnis ist also eine Zahl mod m. c_0 ist die Homologieklasse mod m eines Punktes von M^3. Ist c^3 die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^3(M^3, Z_m)$, so gilt $\mathfrak{d}(c^3) = c_0$, und aus (8) folgt weiter

$$a^1 \cup \delta_m(a^1) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c^3, \qquad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{9}$$

Zu zwei Elementen $a_1, b_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit endlicher Ordnung gehört eine *Verschlingungszahl* $\mathfrak{V}(a_1, b_1)$. Sie ist eine rationale Zahl mod 1 und wird folgendermaßen definiert: Seien $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1$ punktfremde (singuläre) Zykel, die a_1 bzw. b_1 repräsentieren, und sei $\partial \tilde{a}_2 = m \tilde{a}_1$. (Weil a_1 endliche Ordnung haben sollte, gibt es eine 2-Kette $\tilde{a}_2$ und eine ganze Zahl m mit dieser Eigenschaft.) Dann wird

$$\mathfrak{V}(a_1, b_1) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(\tilde{a}_2, \tilde{b}_1) \bmod 1 \tag{10}$$

gesetzt, und man zeigt, daß $\mathfrak{V}(a_1, b_1) \bmod 1$ von den getroffenen Auswahlen unabhängig ist (vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 77). Ist $a_2 \in H_2(M^3, Z_m)$ die Homologieklasse mod m von $\tilde{a}_2$, so gilt $\partial_m(a_2) = a_1$ nach Definition von ∂_m, also kann man (10) auch in der Form

$$\mathfrak{V}\left(\partial_m(a_2), b_1\right) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(a_2, b_1) \bmod 1 \tag{11}$$

schreiben. Damit geht (9) über in

$$a^1 \cup \delta_m(a^1) = m \cdot \mathfrak{V}\left(\partial_m \mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c^3, \qquad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{12}$$

Zusammen mit (7) stellt das eine Beziehung zwischen dem Postnikow-Quadrat und der „*Eigenverschlingung*" von Elementen aus $H_1(M^3, Z)$ her. Im Hinblick auf das genannte Kriterium für die Sphärenähnlichkeit einer dreidimensionalen Pseudomannigfaltigkeit (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) formulieren wir ausdrücklich:

Satz 16. *Für eine Mannigfaltigkeit M^3 verschwindet das Postnikow-Quadrat*

$$\mathfrak{p}_0(Z_{2k}): H^1(M^3, Z_{2k}) \to H^3(M^3, Z_{2k+1})$$

genau dann, wenn für die Eigenverschlingung $\mathfrak{V}(a_1, a_1)$ *der Elemente* $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ *mit endlicher Ordnung gilt:*

(13) $2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}(a_1, a_1) \equiv 0 \bmod 1$ für alle $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit $2^k \cdot a_1 = 0$.

[Man beachte: $2^k \cdot \mathfrak{V}(a_1, a_1) \equiv 0 \bmod 1$ ist für die in (13) betrachteten Elemente a_1 immer erfüllt, weil man bei der Definition (10) von $\mathfrak{V}(a_1, a_1)$ $m = 2^k$ nehmen kann.]

Beweis von Satz 16. $\mathfrak{p}_0(a_1) \in H^3(M^3, Z_{2^{k+1}})$ verschwindet nach (7) genau dann, wenn

(14) $$a^1 \cup \delta_m(a^1) \equiv 0 \bmod 2 \qquad (m = 2^k)$$

ist, denn $\mu_*: H^3(M^3, Z_{2^k}) = Z_{2^k} \to H^3(M^3, Z_{2^{k+1}}) = Z_{2^{k+1}}$ ist die Multiplikation mit $m = 2^k$. (14) ist nach (12) mit

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}\left(\partial_m \mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \equiv 0 \bmod 1$$

äquivalent. Es genügt daher zu zeigen, daß $\partial_m \mathfrak{d}(a^1)$ genau die Elemente $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit $m \cdot a = 0$ durchläuft. Das ergibt sich aber sofort aus der Definition von ∂_m, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus ist.

7.7. HANTZSCHE gibt in [6] Satz 4 eine notwendige Bedingung für die Einbettbarkeit einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 in den euklidischen Raum R^4 an:

M^3 ist höchstens dann einbettbar, wenn die Torsionsgruppe von $H_1(M^3, Z)$ direkte Summe zweier isomorpher Gruppen ist.

Daraus folgt, daß die dreidimensionalen Linsenräume (p, q) (vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] S. 210, p, q sind teilerfremde natürliche Zahlen mit $0 \leqq q \leqq \frac{p}{2}$) nicht einbettbar sind, denn $H_1((p, q), Z)$ ist zyklisch von der Ordnung p. Die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p sind aber sphärenähnlich: Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k}): H^1((p, q), Z_{2^k}) \to H^3((p, q), Z_{2^{k+1}})$ verschwindet in ihnen für jedes k, weil $H^1((p, q), Z_{2^k}) = 0$ ist. Nach 6.9 Satz 11 verschwindet $\mathfrak{p}_0(G)$ dann auch für jede andere Koeffizientengruppe G, und daraus folgt die Sphärenähnlichkeit (6.8 Satz 10). Es gibt also sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten, die nicht einbettbar sind.

Die Linsenräume (p, q) mit geradem p sind dagegen auch nicht sphärenähnlich: Für ein erzeugendes Element b von $H_1((p, q), Z)$ gilt $\mathfrak{V}(b, b) \equiv \pm \frac{q}{p} \bmod 1$ (s. [9] S. 279). Ist $p = 2^k \cdot r$, $r =$ ungerade und $a = r \cdot b$, so folgt

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}(a, a) \equiv \pm 2^{k-1} \cdot \frac{r^2 \cdot q}{p} \equiv \pm \frac{r \cdot q}{2} \not\equiv 0 \bmod 1$$

(weil q ungerade ist). Andererseits ist $2^k \cdot a = p \cdot b = 0$, also kann $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k})$ nicht verschwinden (7.6 Satz 16) und der Linsenraum (p, q) nicht sphärenähnlich sein (6.8 Satz 10). Auch die Summe M^3 zweier Linsenräume (p, q) und (p, q') mit geradem p (Summe im Sinne von 6.5) ist nicht sphärenähnlich

(6.5 Satz 7) und daher nicht einbettbar (7.1). Die Bedingung von HANTZSCHE ist dagegen für M^3 erfüllt. Man gewinnt also aus unseren Untersuchungen notwendige Bedingungen für Einbettbarkeit, die in manchen Fällen schärfer sind als die von HANTZSCHE. (Allerdings wird bei HANTZSCHE nicht vorausgesetzt, daß es sich um differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Einbettungen handeln soll.)

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin: Springer 1935. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I: Structures topoligiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] CARTAN, H.: Une theorie axiomatique des carrés de Steenrod. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 425—427 (1950). — [4] FOX, R. H.: Homotopy groups and torus homotopy groups. Ann. of Math. **49**, 471—510 (1948). — [5] GYSIN, W.: Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. **14**, 61—122 (1941/42). — [6] HANTZSCHE, W.: Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume. Math. Z. **43**, 38—58 (1938). — [7] PUPPE, D.: Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders. Math. Z. **61**, 303—323 (1954). — [8] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Z. **69**, 299—344 (1958). — [9] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner 1934. — [10] STEENROD, N. E.: Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. of Math. **48**, 290—320 (1947). — [11] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951. — [12] STEENROD, N. E.: Reduced powers of cohomology classes. Ann. of Math. **56**, 47—67 (1952). — [13] STEENROD, N. E.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213—217 (1953). — [14] STEENROD, N. E.: Cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 217—223 (1953). — [15] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés differentiables. Comment. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954). — [16] WHITEHEAD, G. W.: On mappings into group-like spaces. Comment. Math. Helv. **28**, 320—328 (1954). — [17] WHITEHEAD, J. H. C.: On C^1-complexes. Ann. of Math. **41**, 807—824 (1940). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: A certain exact sequence. Ann. of Math. **52**, 51—110 (1950). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On the theory of obstructions. Ann. of Math. **54**, 68—84 (1951). — [21] WHITNEY, H.: The maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J. **3**, 51—55 (1937). — [22] WU WEN-TSÜN: On the product of sphere-bundles and the duality theorem modulo two. Ann. of Math. **49**, 641—653 (1948). — [23] WU WEN-TSÜN: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 508—509 (1950).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)

CHEN, Y. M.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 418—422 (1958)

On a maximal theorem of Hardy and Littlewood and theorems concerning Fourier constants

By
CHEN YUNG-MING

1. Let $f(x)$ be non-negative and L-integrable in the interval $a \leqq x \leqq b$, and let

$$\Theta(x) = \Theta(x; f) = \sup_{\xi} \left\{ \frac{1}{x-\xi} \int_{\xi}^{x} f(t)\, dt \right\}, \qquad a \leqq \xi < x. \tag{1.1}$$

The following theorem of HARDY and LITTLEWOOD [5] has many important applications in the theory of Fourier series:

THEOREM HL. *If* $p > 1$, *then*

$$\int_a^b \{\Theta(x)\}^p\, dx \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b \{f(x)\}^p\, dx. \tag{1.2}$$

This and similar inequalities later are to be interpreted as: "If the integral on the right is finite, then that on the left is finite and satisfies the inequality."

Alternative proofs of Theorem HL and various extensions to multiple integrals have been given by RIESZ [9], JESSEN, MARCINKIEWICZ, and ZYGMUND [6], RADO [7], WIENER [11], BURKILL [1], FLEET [4], RAUCH [8], SMITH [10]. In the present note, a generalization of this theorem by means of asymptotic approximations of powers is attempted. For simplicity, I shall restrict the discussion to integrals of a single variable.

NOTATIONS. By $\Phi(x) = x\varphi(x)$[1]), we denote the function $\Phi(x)$ such that $\Phi(x)/x^{1+\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta > 0$, depending on Φ, is a sufficiently small constant, and that there exists a positive constant $k > 1$, depending on Φ, such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity. It follows that $(1+\delta)\varphi(x) < \Phi'(x) < k\varphi(x)$, where $\Phi'(x)$ exists almost everywhere in any interval $(0, a)$. By $\Psi(x)$ we denote the non-decreasing positive function $\Psi(x) = x\psi(x)$ such that $\Psi(x)/x^{1-\delta'}$ is decreasing as x is increasing in $(0, a)$, where $\delta' > 0$ is a small constant, depending on Ψ. It follows that $\Psi'(x) \geqq 0$, where $\Psi'(x)$ exists almost everywhere and $\Psi'(x) \leqq (1-\delta')\psi(x)$.

LEMMA. *Let* $a \geqq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad (f(t) \geqq 0). \tag{1.3}$$

[1]) Here the function $\Phi(x)$ corresponds to the function $\Phi_1(x)$ in [3].

Then

$$\int_0^a \frac{\Phi\{F(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx \leqq K_1 \int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)}\,dx, \tag{1.4}$$

where $K_1 = K_1(\Phi)$ *is a positive constant, depending only on* Φ.

PROOF. Let $\{f_n\}$ and $\{F_n\}$ be defined by

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & (1/n \leqq x \leqq a) \\ 0 & (0 \leqq x < 1/n), \end{cases} \tag{1.5}$$

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt. \tag{1.6}$$

We have

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx &= \frac{a\,\Phi\{F_n(a)/a\}}{\Psi(a)} + \int_0^a \frac{F_n(x)\,\Phi'\{F_n(x)/x\}}{x\,\Psi(x)}\,dx + \\ &\quad + \int_0^a \frac{x\,\Psi'(x)\,\Phi\{F_n(x)/x\}}{\{\Psi(x)\}^2}\,dx - \int_{1/n}^a \frac{f(x)\,\Phi'\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx \\ &\geqq (1+\delta)\int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx - k\int_{1/n}^a \frac{f(x)\,\varphi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Let $t \geqq 1$. Then we have

$$f(x)\,\varphi\{F_n(x)/x\} \leqq t^{k-1}\,\Phi\{f(x)\} + t^{-1}\Phi\{F_n(x)/x\}\ ^{2}). \tag{1.8}$$

Substituting this in (1.7), we get

$$\delta\int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx \leqq k\,t^{k-1}\int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)}\,dx + k\,t^{-1}\int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx, \tag{1.9}$$

$$(\delta - k\,t^{-1})\int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx \leqq k\,t^{k-1}\int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)}\,dx. \tag{1.10}$$

Now if we take an arbitrarily fixed and sufficiently large value of t, in order to make $\delta - k\,t^{-1} > 0$, then

$$\int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)}\,dx \leqq K_2\int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)}\,dx. \tag{1.11}$$

Since $K_2 = K_2(\Phi)$ is independent of n, taking the superior limit on the left, we obtain (1.4).

THEOREM 1 [3]. *With the same conditions as in Theorem* HL,

$$\int_a^b \Phi\{\Theta(x)\}\,dx \leqq K_3\int_a^b \Phi\{f(x)\}\,dx, \tag{1.12}$$

where $K_3(\Phi) > 0$ *depends on* Φ *only.*

---

[2]) Cf. formula (3.10) in [2].

[3]) The extension of Theorem 1 to multiple integrals may be given in a similar way as in ([6] Theorem 1).

PROOF. By an inequality due to F. RIESZ [9],

$$\Theta^*(x;f) \leqq \Theta(x;f^*), \tag{1.13}$$

where $f^*(x)$ is non-increasing, equimeasurable with $f(x)$, and Θ^* is the equimeasurable function of Θ in the same sense. In virtue of the Lemma and by a change of the variable $x = y + a$, we have

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^b \Phi\{\Theta(x)\}\,dx &= \int_a^b \Phi\{\Theta^*(x)\}\,dx \\ &\leqq \int_a^b \Phi\{\Theta(x;f^*)\}\,dx \\ &= \int_0^{b-a} \Phi\left\{\frac{1}{y}\int_0^y f^*(t+a)\,dt\right\} dy \\ &\leqq K_4 \int_0^{b-a} \Phi\{f(y+a)\}\,dy \\ &= K_4 \int_a^b \Phi\{f(x)\}\,dx, \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

where $K_4 = K_4(\Phi)$. This completes the proof.

The following Theorems 2—5 are immediate consequences of Theorem 1 (the proofs are similar to the arguments given in [12] pp. 246—248, except Theorem HL is replaced by Theorem 1):

THEOREM 2. *Suppose that $f(x) \in L(0, 2\pi)$ is of period 2π. Let*

$$M(x;f) = \sup_{0<t\leq\pi} \frac{1}{t}\int_0^t |f(x+u)|\,du = \sup_{0<|t|\leq\pi} \frac{1}{t}\int_x^{x+t} |f(u)|\,du, \tag{1.15}$$

for $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Then

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{M(x;f)\}\,dx \leqq K_5 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\}\,dx, \qquad K_5 = K_5(\Phi). \tag{1.16}$$

THEOREM 3. *Let $\chi(t, p)$, $-\pi \leqq t \leqq \pi$, be a non-negative function depending on a parameter p and satisfying*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi(t,p)\,dt \leqq K_6, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left| t\,\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,p)\right| dt \leqq K_7, \tag{1.17}$$

where K_6 and K_7 are independent of p. If $f(x)$ is of period 2π,

$$h(x,p) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\chi(t,p)\,dt; \tag{1.18}$$

then

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{\sup_p |h(x,p)|\}\,dx \leqq K_8 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\}\,dx, \tag{1.19}$$

where K_8 is independent of f.

THEOREM 4. *If $N(x;f)$ is the upper bound of $|f(r,x)|$ for $0\leqq r<1$, where $f(r,x)$ denotes the Poisson integral of an integrable function $f(x)=f(x+2\pi)$, then*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\{N(x;f)\}\,dx\leqq K_9\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\{|f(x)|\}\,dx, \tag{1.20}$$

where $K_9=K_9(\Phi)>0$, is independent of $f(x)$.

THEOREM 5[4]. *Let $\sigma_n^{\alpha}(x;f)$ be the Cesàro means of order α for the Fourier series of $f(x)=f(x+2\pi)$. If $N_{\alpha}(x;f)$, $0<\alpha\leqq 1$, is the upper bound of $|\sigma_n^{\alpha}(x;f)|$ for $1\leqq n<\infty$, then*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\{N_{\alpha}(x;f)\}\,dx\leqq K_{10}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\{|f(x)|\}\,dx, \tag{1.21}$$

where $K_{10}=K_{10}(\Phi,\alpha)$ is independent of $f(x)$.

2. Theorems concerning Fourier Constants

THEOREM 6[5]. *Let $f(x)$ be defined by*

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^{\infty}\lambda_n\cos nx, \tag{2.1}$$

where $\lambda_n\downarrow 0$. Then a necessary condition that $\Phi\{|f(x)|\}/\Psi(x)\in L(0,\pi)$ is $\sum_1^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(1/n)}<\infty$.

PROOF. Since

$$\lambda_n\leqq K_{11}F(\pi/n),\qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \tag{2.2}$$

and in virtue of the Lemma, it follows that

$$\left\{\begin{aligned}\sum_1^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(1/n)}&\leqq K_{12}\sum_1^{\infty}\frac{\Phi\{nF(\pi/n)\}}{n^2\Psi(1/n)}\\&\leqq K_{12}\sum_1^{\infty}\frac{\Phi\{nH(\pi/n)\}}{n^2\Psi(1/n)}\\&\leqq K_{13}\sum_1^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\frac{\Phi\left\{\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt\right\}}{\Psi(x)}\,dx\\&\leqq K_{14}\int_0^{\pi}\frac{\Phi\{|f(x)|\}}{\Psi(x)}\,dx,\end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

where $H(x)=\int_0^x|f(t)|\,dt$, $K_{14}=K_{14}(\Phi)$.

[4]) Cf. [6], for $\sigma_{m,n}(x,y)$.

[5]) It should be noted that the function Φ in this note corresponds to Φ_1 in [3], cf. Theorem 2 in [3], Theorem 3 and § 7 (d) in [2].

THEOREM 7[6]). *Suppose that $f(x)$ is positive and even in $|x|<\pi$, that it is monotonic decreasing in $(0,\pi)$, and that a_n are the Fourier cosine coefficients of f. Then $\Phi\{f(x)\}/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if*

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi\{n|a_n|\}}{n^2\Psi(1/n)}<\infty. \tag{2.4}$$

THEOREM 8[7]). *Suppose that $g(x)$ is odd, that it is positive and monotonic decreasing in $(0,\pi)$, and that b_n are the Fourier sine coefficients of $g(x)$. Then $\Phi\{g(x)\}/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if*

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi\{n|b_n|\}}{n^2\Psi(1/n)}<\infty. \tag{2.5}$$

The proofs of Theorem 7 and Theorem 8 are similar. For the necessary condition, the arguments are just the same as in Theorem 6. For the sufficient condition, the method is similar to the proof of Theorem 1 in ([3] (3.9), (3.10)).

References

[1] BURKILL, J. C.: On the differentiability of multiple integrals. J. London Math. Soc. **26**, 244–249 (1951). — [2] CHEN, Y. M.: Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems. Math. Z. **68**, 227–244 (1957). — [3] CHEN, Y. M.: Some further asymptotic properties of Fourier constants. Math. Z. **69**, 105–120 (1958). — [4] FLETT, T. M.: Some remarks on a maximal theorem of HARDY and LITTLEWOOD. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 275–282 (1955). — [5] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta math. **54**, 81–116 (1930). — [6] JESSEN, B., J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND: Note on the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. **25**, 217–234 (1935). — [7] RADO, R.: A new proof of a theorem of HARDY and LITTLEWOOD. J. London Math. Soc. **11**, 87–92 (1936). — [8] RAUCH, H. E.: Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of HARDY and LITTLEWOOD. Canadian J. Math. **8**, 171–183 (1956). — [9] RIESZ, F.: Sur un théorèm de maximum de MM. HARDY et LITTLEWOOD. J. London Math. Soc. **7**, 10–13 (1932). — [10] SMITH, K. T.: A generalization of an inequality of HARDY and LITTLEWOOD. Canadian J. Math. **8**, 157–170 (1956). — [11] WIENER, N.: The ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 1–18 (1939). — [12] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

[6]) This is a generalization of Theorem 7 in [3].

[7]) Cf. Theorem 8 in [3].

Dept. of Math., University of Hongkong, Hongkong

(Eingegangen am 2. November 1957)

RAMANUJAN, M. S.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 423–428 (1958)

On Products of Summability Methods

By

M. S. RAMANUJAN

INTRODUCTION. The present paper is a continuation of an earlier paper by me [9], concerned with the question: Given a sequence summable by the method A, can we say that a regular B-transform of the sequence is also A-summable, to the same limit as before? This question raised by SZÁSZ [12] has been answered in the affirmative when i) A is the Abel method and B is a regular sequence-to-sequence Hausdorff transform [3, 6, 13], ii) A is Borel's exponential method and B is a regular Hausdorff sequence-to-sequence method [1, 13], and iii) A is the Abel method and B is the Hardy-Littlewood-Fekete circle method, which is essentially a quasi-Hausdorff method [13]. The particular case of ii) above, where A is the BOREL's exponential method and B is the Cesàro's method (C, k) has been considered earlier by HARDY and LITTLEWOOD (see, for example, HARDY [2], Theorem 146). RAJAGOPAL ([8], Theorem I) has subsequently extended the results i) and ii) to the case in that A is a suitably restricted power series method and B is a regular Hausdorff method, while the result iii) above has been extended by me in [9] to the case where A is Abel's method and B is a regular quasi-Hausdorff method. RAJAGOPAL ([8], Theorem II) has also obtained a functional analogue of his extended theorem for sequences, generalising a product theorem first proved by him ([7], Lemma 4) in which A and B are respectively the Laplace-Abel and the (C, k) methods for functions. In a recent paper, PARAMESWARAN [5] has proved that if A is a regular Nörlund method and B is a method of the Nörlund type then the question has an answer in the affirmative.

The object of the present paper is to show how my earlier theorems on the product of Abel and quasi-Hausdorff methods, quoted here as Theorems 1 and 2, and proved in [9] for the class of bounded sequences, are in fact valid, without much alteration in the proof, for a wider class of sequences. This result is contained in Theorem 1'. Also, alternative proofs of Theorems 1 and 2 are given in the paper and the main interest in giving them is to adapt the same to prove a result, on the product of Borel and regular quasi-Hausdorff methods, contained in Theorem 3.

In § 2 I prove a theorem on the product of Abel's method and the method (S^*, μ), defined earlier by me in [11]. The method S_α of MEYER-KÖNIG [4] is a special case of this class of methods and therefore the result in Theorem 4 may be of some interest, since SZÁSZ's result on the product of Abel and S_α-methods, indicated without proof in [13], is now a special case of Theorem 4.

§ 1

We start with recalling the following two theorems proved earlier (Theorems 1 and 2, [9])[1]).

THEOREM 1. *Let $\sum a_n$ be any series belonging to the class $\mathfrak{B}$ of series with bounded partial sums. If $\sum a_n$ is summable to l by Abel's method, then the transform $\sum b_n$ of the series, given by any quasi-Hausdorff α_0-matrix is also summable to l by Abel's method.*

THEOREM 2. *Let s_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ be a bounded sequence summable to l by Abel's method. Then a regular transform t_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ of $\{s_n\}$ by the method (H_2^*, μ) with moment constants $\{\mu_n\}$, is also summable to l by Abel's method.*

In what follows we assume the existence of the transform $\sum b_n$ of the series $\sum a_n$ by the α_0-matrix (H^*, μ_n) or equivalently that of the sequence $\{t_n\}$ of partial sums of $\sum b_n$ as the transform of the sequence $\{s_n\}$ of partial sums of $\sum a_n$ by the T-matrix (H^*, μ_{n+1}), and therefore the equation (6) of [9] connecting $\{t_n\}$ and $\{s_n\}$.

Let us suppose that the sequence $\{s_n\}$ is not necessarily bounded; however, it is subject to the following restrictions which are analogous to those imposed, in an earlier paper on a similar topic, by RAJAGOPAL (Theorem 1, [8]).

For every u in $0<u<1$,

i) *there exists a function $F(x)$, finite for every x in $0<x<1$, such that,*

$$(1-x)\sum_k |s_k|\,(1-u+xu)^k u \leqq F(x), \qquad 0<x<1,$$

and ii) $\left|(1-x)\sum_k s_k(1-u+xu)^k u\right| \leqq M(u)$, *where $M(u)$ is integrable in $(0, 1)$.*

It may also be easily seen that when the series $\sum a_n$ is Abel-summable, we have that for every u in $0<u<1$,

iii) $$(1-x)\sum_k |s_k|\,(1-u+xu)^k u$$

converges for $0<x<1$.

Now when the sequence satisfies conditions i) and iii) above, the interchange in the order of summation in the expression on the right hand side of equation (7) of [9], yielding in consequence equation (8), is valid. Condition ii) validates the application of the theorem of dominated convergence, as done earlier, and therefore, we have after the proof of Theorem 1 of [9] the following theorem.

THEOREM 1'. *Let $\sum a_n$ be any series whose partial sums $\{s_n\}$ satisfy the conditions* i) *and* ii) *above. Then if the series is Abel summable to l then so is the transform $\sum b_n$ of the series by a quasi-Hausdorff α_0-matrix.*

[1]) Throughout the paper we follow the same notations and definitions as in the earlier paper [9].

NOTE. It is easily seen that the class of bounded sequences is a subclass of the sequences satisfying conditions i) and ii) above and therefore Theorem 1 is a special case of Theorem 1'.

A similar statement holds for Theorem 2.

We shall now give alternative proofs of Theorem 1 and 2. In the course of our proofs we require the following lemma, proved in (Theorem 3, [10]).

LEMMA A. *Let* (H^*, ν_n) *and* (H^*, μ_n) *be two* α_0*-matrices. If* $\sum a_n$ *of the class* $\mathfrak{B}$ *is summable to* l *by the quasi-Hausdorff method* (H^*, ν_n) *then the* (H^*, μ_n)*-transform of* $\sum a_n$ *is also* (H^*, ν_n)*-summable to* l.

PROOF OF THEOREM 1. By hypothesis $\sum a_n$ belongs to the class $\mathfrak{B}$; i.e. $s_n = O(1)$. Also it is Abel summable to l. Therefore by the well-known Tauberian theorem for Abel summability, due to LITTLEWOOD (see HARDY [2], Theorem 92) $\{s_n\}$ is summable to l by Hölder's method $(H, 1)$. By another theorem, due to HARDY and LITTLEWOOD ([2], Theorem 77) the $(H, 1)$ summability of $\sum a_n$ to l is equivalent to the convergence to l of the series $\sum b_n$ where

$$b_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \cdots$$

i.e. to the summability to l of the series $\sum a_n$ by the α_0-matrix (H^*, ν_n), $\nu_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Now, by Lemma A, we have that the transform of $\sum a_n$ by any α_0-matrix (H^*, μ_n) is also summable to l by the method (H^*, ν_n) and therefore the transform is again $(H, 1)$ summable and consequently Abel summable to l and this completes the proof of Theorem 1.

A similar proof may be given for Theorem 2.

The originally given methods of proof of Theorems 1 and 2 when applied to prove analogous results in the case when Borel's method of exponential means replaces the Abel method give rise to considerable difficulty in the simplifications of the summations involved. The present proof, when applied to the latter case, obviates these difficulties and we have the theorem below.

THEOREM 3. *Let* $\sum a_n$ *be any series belonging to the class* $\mathfrak{B}$ *of series with bounded partial sums. If* $\sum a_n$ *is summable to* l *by Borel's method, then the transform* $\sum b_n$ *of the series given by any quasi-Hausdorff* α_0*-matrix is also summable to* l *by Borel's method.*

The proof of the theorem is similar to the above proof for Theorem 1. Only, in this case we use Lemma B below in the place of Littlewood's Tauberian theorem.

LEMMA B. *If* $s_n = O(1)$, *then the method of Borel's means is equivalent to the method* T_α *for* $0 < \alpha < 1$.

The above lemma is due to MEYER-KÖNIG ([4], Satz 25). It may be noted that the method T_α is defined by the quasi-Hausdorff α_0-matrix (H^*, ν_n), $\nu_n = (1-\alpha)^n$.

§ 2

We now prove a theorem on the product of Abel's method and the method (S^*, μ) defined by me in [11] as the method of transforming $\{s_n\}$ to $\{t_n\}$ by the matrix $S^* \equiv (S^*, \mu)$ whose elements are

$$s^*_{nk} = \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1},$$

so that

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1} s_k.$$

With this definition we prove

THEOREM 4. *Let $\{s_n\}$ be any sequence summable to l by Abel's method. Then the sequence $\{t_n\}$ obtained as the transform of the sequence $\{s_n\}$ by the regular method (S^*, μ) is also Abel summable to l in all cases where $\{s_n\}$ satisfies the following condition:*

i) *for every u in $0<u<1$, there exists a function $F(x)$ finite for every x in $0<x<1$ such that*

$$\frac{u}{1-xu} \sum_k |s_k| \left(\frac{1-u}{1-xu}\right)^k \leqq F(x), \quad (0<x<1).$$

In the proof of the theorem we require the following lemma.

LEMMA C. *The sequence-to-sequence transformation defined by the matrix $S^* \equiv (S^*, \mu)$ is regular if, and only if,*

i) *μ_n is a moment constant, generated by $\chi(u)$ say,*

ii) $\chi(1) = \chi(1-0)$,

and iii) $\int_{+0}^{1} d\chi = 1$.

The proof of the lemma is given in [11].

PROOF OF THE THEOREM. By hypothesis the transformation defined by (S^*, μ) is regular and therefore $\{\mu_n\}$ satisfies the conditions of Lemma C. Since a change in the value of $\chi(u)$ at $u=0$ will alter only the value of μ_0 and the (S^*, μ) matrix is independent of μ_0 we may, without loss of generality, assume that $\chi(0) = \chi(+0) = 0$ and consequently $\int_0^1 d\chi = 1$.

Let $\{t_n\}$ denote the transformation of $\{s_n\}$ by the (S^*, μ)-matrix; then by virtue of the regularity of (S^*, μ) we have

$$t_n = \sum_k \binom{n+k}{k} s_k \int_0^1 (1-u)^k u^{n+1} d\chi(u).$$

Therefore

$$\sum_n t_n x^n = \sum_n x^n \sum_k \int_0^1 \binom{n+k}{k} (1-u)^k u^{n+1} s_k \, d\chi(u). \tag{2.1}$$

Replacing each term on the right of the above expression by its modulus and assuming, as we may, that $\chi(u)$ is increasing, the right hand member with these changes is

$$\begin{aligned}
&\sum_n x^n \sum_k \int_0^1 \binom{n+k}{k} (1-u)^k \cdot u^{n+1} |s_k| \, d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_n \sum_k \binom{n+k}{k} (1-u)^k u^{n+1} x^n |s_k| \, d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_k (1-u)^k \cdot u \cdot |s_k| \sum_n \binom{n+k}{k} (xu)^n \, d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_k |s_k| (1-u)^k \cdot u \cdot \left[\frac{1}{1-xu}\right]^{k+1} d\chi(u), \qquad (0<x<1) \\
&= \int_0^1 \sum_k |s_k| \cdot \left(\frac{u}{1-xu}\right)\left[\frac{1-u}{1-xu}\right]^k d\chi(u).
\end{aligned}$$

Now, by virtue of Abel summability of the sequence $\{s_n\}$ the integrand above is absolutely convergent for every u in $0<u<1$ and now, this along with the condition i) of the theorem gives that the sum above is finite. Therefore an interchange in the order of the summations and the integral in (2.1) is possible and we have

$$(1-x)\sum_n t_n x^n = \int_0^1 (1-x) \sum_k s_k \left(\frac{u}{1-xu}\right)\left[\frac{1-u}{1-xu}\right]^k d\chi(u).$$

Putting now $x = 1-\frac{1}{y}$ we have $x \to 1-0$ as $y \to \infty$. Also let $f(x) = (1-x)\sum_n s_n x^n = \frac{1}{y}\sum_n s_n \left(1-\frac{1}{y}\right)^n = g(y)$, say. Let $\bar{f}(x) = (1-x)\sum t_n x^n = G(y)$, say. Then

$$\begin{aligned}
G(y) = \bar{f}(x) &= (1-x)\sum t_n x^n \\
&= \int_0^1 (1-x) \sum_k s_k \left(\frac{u}{1-xu}\right)\left[\frac{1-u}{1-xu}\right]^k d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} \sum_k s_k \frac{yu}{y-yu+u}\left[\frac{y(1-u)}{y-yu+u}\right]^k d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y-yu+u}{u}\right)^{-1} \sum_k s_k \left(1-\frac{u}{y-yu+u}\right)^k d\chi(u) \\
&= \int_0^1 g\left[1+\frac{y(1-u)}{u}\right] d\chi(u).
\end{aligned}$$

The proof of the theorem will be complete if we now show that $g(y) \to l$ implies $G(y) \to l$, $y \to \infty$.

Again it will be sufficient to prove the result for $l=0$ and increasing $\chi(u)$. Here again it may be pointed out that the equation $\chi(1) = \chi(1-0)$ may be made valid for the monotonic functions into which the original χ has been split up.

If $g(y)\to 0$ then given $\varepsilon>0$ we can find a $Y>1$ such that $|g(y)|\leqq\varepsilon$ for $y\geqq Y$. Let K denote the upper bound of $g(y)$ in $1\leqq y\leqq Y$. Then

$$\begin{aligned}|G(y)| &\leqq \int_0^1 \left|g\left[1+\frac{y(1-u)}{u}\right]\right| d\chi(u)\\ &= \int_0^{y/(y+Y-1)} \left|g\left[1+\frac{y(1-u)}{u}\right]\right| d\chi(u) + \int_{y/(y+Y-1)}^1 \left|g\left[1+\frac{y(1-u)}{u}\right]\right| d\chi(u)\\ &\leqq \varepsilon\int_0^1 d\chi + K\left[\chi(1)-\chi\left(\frac{y}{y+Y-1}\right)\right].\end{aligned}$$

Now choose Y_1 such that

$$K\left[\chi(1)-\chi\left(\frac{y}{y+Y-1}\right)\right]<\varepsilon \qquad \text{for } y>Y_1.$$

This is possible since $\chi(1-0)=\chi(1)$. Then

$$|G(y)|\leqq\left(\int_0^1 d\chi+1\right)\varepsilon, \qquad \text{for } y>Y_1,$$

which proves the theorem.

NOTE. The method S_α of MEYER-KÖNIG [5] is easily seen to be a (S^*,μ)-method, with $\mu_n=(1-\alpha)^n$ and consequently regular for $0<\alpha<1$. Now the result of SZÁSZ [13] on the product of Abel and S_α-methods is a corollary of Theorem 4.

In conclusion I wish to thank Professors C. T. RAJAGOPAL and V. GANAPATHY IYER for their help and guidance in the preparation of this paper and the referee for his valuable criticism.

References

[1] AMIR, A. (JAKIMOVSKI): Some relations between the methods of summability of Abel, Borel, Cesàro, Hölder and Hausdorff: J. Analyse Math. **3**, 346–381 (1953/54). — [2] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [3] HAUSDORFF, F.: Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung. Math. Z. **31**, 186–196 (1930). — [4] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257–304 (1950). — [5] PARAMESWARAN, M. R.: Some product theorems in summability. Math. Z. **68**, 19–26 (1957). — [6] PATI, T.: Products of summability methods. Proc. Nat. Inst. Sci. India, Sec. A **20**, 348–351 (1954). — [7] RAJAGOPAL, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series. Amer. J. Math. **69**, 371–378 (1947). — [8] RAJAGOPAL, C. T.: Theorems on the product of two summability methods with applications. J. Indian Math. Soc. (New Ser.) **18**, 89–105 (1954). — [9] RAMANUJAN, M. S.: Theorems on the product of quasi-Hausdorff and Abel transforms. Math. Z. **65**, 442–447 (1956). — [10] RAMANUJAN, M. S.: A note on quasi-Hausdorff series-to-series transformations. J. London Math. Soc. **32**, 27–32 (1957). — [11] RAMANUJAN, M. S.: On Hausdorff and quasi-Hausdorff methods of summability. Quart. J. Math. **8**, 197–213 (1957). — [12] SZÁSZ, O.: On products of summability methods. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 257–263 (1952). — [13] SZÁSZ, O.: On the product of two summability methods. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, 75–84 (1952/53).

Ramanujan Institute of Mathematics, University of Madras, Madras 5

(Eingegangen am 21. Januar 1958)

MORITA, K.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 429–434 (1958)

On Algebras for which Every Faithful Representation is its Own Second Commutator

By

KIITI MORITA

INTRODUCTION. Taking up some of the most important properties of quasi-Frobenius (QF) algebras, R. M. THRALL [3] gave the following definitions. Let A be a finite dimensional (associative) algebra (over a commutative field) which has a unit element.

QF-1 Algebra. A is said to be a QF-1 algebra if every faithful representation of A coincides with its own second commutator.

QF-2 Algebra. A is said to be a QF-2 algebra if every primitive left ideal of A as well as every primitive right ideal of A has a unique minimal subideal.

QF-3 Algebra. A is said to be a QF-3 algebra if it has a unique minimal faithful representation[0]).

Here a faithful representation $\mathfrak{D}$ of A is said to be a minimal faithful representation of A if deletion of any direct constituent of $\mathfrak{D}$ leaves a non-faithful representation. Minimal faithful left A-modules are defined similarly.

In the paper [3] referred to above, THRALL has proved that the class of QF-1 algebras properly contains the class of QF algebras and that the class of QF-3 algebras properly contains the class of QF-2 algebras. The example given by him to show the former fact is a generalized uni-serial algebra and hence it is a QF-2 algebra. In this connection he has raised the problem: "Is every QF-1 algebra also a QF-2 algebra (or also a QF-3 algebra)?".

In this paper we shall establish a necessary and sufficient condition for an algebra A to be a QF-1 algebra (§ 1). In case A is a QF-3 algebra, THRALL [3] has given a condition which is necessary for A to be a QF-1 algebra. His condition can be deduced as an immediate consequence of our condition but it is not a sufficient condition for A to be QF-1 as will be shown by an example.

As for THRALL's problem mentioned above we can give a solution to it. Indeed it will be shown in § 2 that there exists a QF-1 algebra which is not QF-3[1]) and that there exists a QF-1 algebra which is QF-3 but not QF-2. Thus there is no intimate relation between QF-1 algebras and QF-3 algebras (or QF-2 algebras), since QF-3 algebras (or QF-2 algebras) are not necessarily QF-1 algebras as was observed by THRALL.

---

[0]) As for QF-3 algebras, cf. also [1] in which we have shown how to obtain QF-3 algebras.

[1]) I have learned from T. YOSHII that M. IKEDA reported the existence of such an algebra, but his result has not yet been published and I could have no access to it.

Throughout this paper any algebra under consideration is assumed to have a unit element and to have a finite dimension over the ground field. For an algebra A, by a left A-module we shall mean a finitely generated left A-module on which the unit element of A acts as the identity operator. If U is a left A-module, we shall denote by $U^{(n)}$ a left A-module which is the direct sum of n copies of U.

§ 1. QF-1 algebras

We shall first prove the following theorem.

THEOREM 1.1. *Let A be an algebra and U a faithful left A-module such that any B-endomorphism of U is obtained by the left multiplication of an element of A where B is the A-endomorphism ring of U and is considered as a right operator domain of U. Let V be an indecomposable left A-module and C the A-endomorphism ring of the left A-module $W = U \oplus V$ (direct sum). Then the following three statements are equivalent.*

I. *Any C-endomorphism of W is obtained by the left multiplication of an element of A.*

II. *If we denote by V_1 the A-submodule of V generated by elements which are images of elements of U under A-homomorphisms of U into V and denote by V_0 the set of elements of V which are contained in the kernel of every A-homomorphism of V into U, then we have either $V = V_1$ or $V_0 = 0$.*

III. *There exists a positive integer n such that V is A-isomorphic either to a quotient module of $U^{(n)}$ or to an A-submodule of $U^{(n)}$ (for the meaning of $U^{(n)}$ cf. Introduction).*

Proof. i) I→II. Assume that $V \neq V_1$ and $V_0 \neq 0$. Let λ (resp. μ) be the projection of the left A-module W onto U (resp. V). Then we have $B = \lambda C \lambda$. If we set $D = \mu C \mu$, D is the A-endomorphism ring of V. It is obvious that V_1 and V_0 are two-sided A-D-modules where D (resp. C) is considered as a right operator domain of V (resp. W).

Since V is finitely generated and indecomposable as a left A-module, the radical $N(D)$ of D is nilpotent and $\overline{D} = D/N(D)$ is a skew field. If we set $V_1^* = V_1 + VN(D)$, then V_1^* is a two-sided A-D-module. Since $N(D)$ is nilpotent and $V \neq V_1$, we have $V \neq V_1^*$. Therefore V/V_1^* is a non-zero two-sided A-$\overline{D}$-module.

Let us set $V_0^* = \{v \mid vN(D) = 0, v \in V_0\}$. Then V_0^* is a two-sided A-$\overline{D}$-module and, since $V_0 \neq 0$, we have $V_0^* \neq 0$.

Thus V/V_1^* and V_0^* are non-zero right $\overline{D}$-modules. Since $\overline{D}$ is a skew field, there exists a non-zero $\overline{D}$-homomorphism of V/V_1^* into V_0^* and hence there exists a non-zero D-homomorphism φ of V into V such that

$$\varphi(v) = 0 \quad \text{for } v \in V_1^*, \tag{1}$$

$$\varphi(v) \in V_0^* \quad \text{for } v \in V. \tag{2}$$

Since φ is a non-zero D-homomorphism, there exist $v_1 \in V$ and $v_0 \in V_0^*$ such that

$$\varphi(v_1) = v_0 \neq 0. \tag{3}$$

Now we set

$$\Phi(w) = \varphi(w\mu) \qquad \text{for } w \in W. \tag{4}$$

Here it is to be noted that μ is the projection from the left A-module W onto the left A-module V.

We shall prove that Φ is a C-endomorphism of W. For this purpose it is sufficient to prove

$$\Phi(wc) = \Phi(w)c \qquad \text{for } w \in W,\ c \in C. \tag{5}$$

To prove (5) it is sufficient to prove

$$\Phi(uc) = \Phi(u)c = 0 \qquad \text{for } u \in U,\ c \in C, \tag{6}$$

$$\Phi(vc) = \Phi(v)c \qquad \text{for } v \in V,\ c \in C; \tag{7}$$

because if (6) and (7) hold we have $\Phi(wc) = \Phi(w\lambda c + w\mu c) = \Phi(w\lambda c) + \Phi(w\mu c) = \Phi(w\mu)c = \big(\Phi(w\mu) + \Phi(w\lambda)\big)c = \Phi(w\mu + w\lambda)c = \Phi(w)c$.

Let $u \in U$ and $c \in C$. Then, since $u\mu = 0$, we have $\Phi(u) = \varphi(u\mu) = 0$. On the other hand, we have $\Phi(uc) = \varphi(uc\mu)$ and, since $uc\mu \in V_1$ by definition of V_1 and $V_1 \subseteqq V_1^*$, we obtain $\varphi(uc\mu) = 0$ by (1). Thus we have $\Phi(uc) = 0$ and (6) is proved.

Let $v \in V$ and $c \in C$. Then we have $\Phi(vc) = \varphi(vc\mu) = \varphi(v\mu c\mu) = \varphi(v)\mu c\mu$. On the other hand, $\varphi(v) \in V_0^*$ and $V_0^* \subseteqq V_0$, and hence $\varphi(v) \in V_0$. By the definition of V_0 we have $\varphi(v)c\lambda = \varphi(v)\mu c\lambda = 0$ since $\mu c\lambda$ is considered as an A-homomorphism of V into U. Therefore we obtain $\Phi(v)c = \varphi(v)c = \varphi(v)\mu c = \varphi(v)\mu c\lambda + \varphi(v)\mu c\mu = \varphi(v)\mu c\mu$. Hence $\Phi(v)c = \Phi(vc)$ and (7) is proved. Thus we have proved that Φ is a C-endomorphism of W.

Next we shall prove that there exists no element a of A such that $\Phi(w) = aw$ for every element w of W. To prove this, suppose that there exists such an element a of A. Since $\Phi(v_1) = \varphi(v_1) = v_0 \neq 0$, we have $a \neq 0$. Since U is a faithful left A-module, there exists an element u of U such that $au \neq 0$. On the other hand, we have $\Phi(u) = 0$ from (6). This is a contradiction. Therefore the statement I does not hold. This proves that I implies II.

ii) II $\rightarrow$ III. Assume that II holds. We distingwish two cases.

Case a) $V = V_1$. In this case, since the maximum condition holds for A-submodules of V, there exist a finite number of elements $u_i^* \in U$, $i = 1, \ldots, n$ and a finite number of A-homomorphisms φ_i of U into V, $i = 1, \ldots, n$ such that $V = Av_1 + \cdots + Av_n$, $v_i = \varphi_i(u_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$. Let us form $U^{(n)}$ and set

$$\varphi\big((u_1, \ldots, u_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i) \qquad \text{for } (u_1, \ldots, u_n) \in U^{(n)}.$$

Then φ is an A-homomorphism of $U^{(n)}$ onto V, since if $v = \sum a_i v_i$ then $\varphi\big((a_1 u_1^*, \ldots, a_n u_n^*)\big) = v$.

Case b) $V_0 = 0$. In this case, since the minimum condition holds for A-submodules of V, there exist a finite number of A-homomorphisms ψ_i of V

into U, $i=1, \ldots, n$ such that $\bigcap_{i=1}^{n}$ Kernel $\psi_i = 0$. If we set

$$\psi(v) = (\psi_1(v), \ldots, \psi_n(v)) \qquad \text{for } v \in V,$$

then ψ is an A-homomorphism of V into $U^{(n)}$ and moreover ψ is an A-isomorphism since Kernel $\psi = \cap$ Kernel $\psi_i = 0$.

Thus the implication II $\rightarrow$ III is proved.

iii) III $\rightarrow$ II. This implication is proved by reversing the arguments of ii).

iv) II $\rightarrow$ I. Assume that II holds. Let Φ be any C-endomorphism of W. We set $\psi(u) = \Phi(u)$ for $u \in U$. Then ψ is a B-endomorphism of U where $B = \lambda C \lambda$ and λ is the projection of W onto U. From the hypothesis of the theorem it follows that there exists an element a of A such that $\psi(u) = au$ for every element u of U. We set

$$\Phi'(w) = \Phi(w) - aw \qquad \text{for } w \in W.$$

Then we have $\Phi'(u) = 0$ for $u \in U$. To prove that $\Phi'(v) = 0$ for $v \in V$, we distingwish two cases.

Case a) $V = V_1$. In this case, for any element v of V there exist a finite number of elements $u_i \in U$, $c_i \in C$, $i = 1, \ldots, n$ such that $v = \sum u_i c_i$. Hence we have $\Phi'(v) = \sum \Phi'(u_i) c_i = 0$.

Case b) $V_0 = 0$. In this case we have also $\Phi'(v) = 0$ for all $v \in V$. Suppose that there exists an element v of V such that $\Phi'(v) \neq 0$. Then from the assumption that $V_0 = 0$ we conclude that there exists an element c of C such that $\Phi'(v) c \lambda \neq 0$. Since $vc\lambda \in U$, we have $\Phi'(v) c \lambda = \Phi'(vc\lambda) = 0$. This is a contradiction.

Thus we have proved that $\Phi'(v) = 0$ for all $v \in V$ in all cases. Therefore we have $\Phi' = 0$ and $\Phi(w) = aw$ for all $w \in W$. This proves that I holds.

We are now in a position to establish the following theorem.

THEOREM 1.2. *Let A be an algebra and $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ the totality of inequivalent minimal faithful representations of A. In order that A be a QF-1 algebra it is necessary and sufficient that A satisfy the following two conditions:*

1° *The second commutator algebra of $\mathfrak{U}_\alpha$ coincides with $\mathfrak{U}_\alpha$ itself for each α.*

2° *For any indecomposable left A-module V and for each α, there exists a positive integer n such that V is A-isomorphic either to a quotient module of $U_\alpha^{(n)}$ or to an A-submodule of $U_\alpha^{(n)}$ where U_α is a left representation module for $\mathfrak{U}_\alpha$ and $U_\alpha^{(n)}$ is the direct sum of n copies of U_α.*

Proof. It is obvious that 1° is a necessary condition for A to be a QF-1 algebra. Let V be any indecomposable left A-module. If the representation of A defined by taking the left A-module $U_\alpha \oplus V$ (direct sum) as a representation module is its own second commutator, then by Theorem 1.1 we see that 2° holds for this α. Thus 2° is also a necessary condition for A to be QF-1.

Suppose that the conditions 1° and 2° are satisfied. Let W be any faithful left A-module. Then there exists some α such that $W \approx V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \oplus U_\alpha$

where V_i $(i=1, \ldots, n)$ are indecomposable left A-modules. It follows from Theorem 1.1 that the representation of A defined by the representation module $U_\alpha \oplus V_1$ is its own second commutator. Then by applying Theorem 1.1 to $U_\alpha \oplus V_1$ and V_2 we see again that the representation of A defined by the representation module $(U_\alpha \oplus V_1) \oplus V_2$ is its own second commutator. By repeated application of Theorem 1.1 we see finally that the representation of A defined by the representation module W is its own second commutator. Thus our theorem is completely proved.

As an immediate consequence of Theorem 1.2 we obtain the following theorem[2]).

THEOREM 1.3. *Let A be a QF-3 algebra and $\mathfrak{U}$ its unique minimal faithful representation. Then the following two conditions are necessary and sufficient in order that A be a QF-1 algebra:*

1° *The second commutator algebra of $\mathfrak{U}$ coincides with $\mathfrak{U}$ itself.*

2° *For any indecomposable left A-module V there exists a positive integer n such that V is A-isomorphic either to a quotient module of $U^{(n)}$ or to an A-submodule of $U^{(n)}$ where U is a left representation module for $\mathfrak{U}$.*

THEOREM 1.4. *Let A be a QF-3 algebra and $\mathfrak{U}$ its unique minimal faithful representation. If A is a QF-1 algebra then the following condition holds:*

3° *Every irreducible representation of A appears either as top or bottom constituent of $\mathfrak{U}$.*

This theorem is due to R. M. THRALL [3] and follows directly from Theorem 1.3. From the example below it is seen that THRALL's condition is not sufficient for an algebra to be QF-1.

EXAMPLE 1.5. Let K be a commutative field. We shall consider the subalgebra A of the full matrix ring $(K)_7$ which is generated by the elements

$$e_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33}, \quad e_2 = c_{44} + c_{55}, \quad e_3 = c_{66} + c_{77},$$

$$c_{31}, c_{37}, c_{51}, c_{57}, c_{64}, c_{24} + c_{35}, c_{62} + c_{71},$$

where c_{ik} are matrix units in $(K)_7$. The algebra A is generalized uni-serial and satisfies the conditions 1° in Theorem 1.3 and 3° in Theorem 1.4. Since $V = A e_3 / N e_3$ does not satisfy condition 2° in Theorem 1.3 where $U = A e_1 \oplus A e_2$ and N means the radical of A, A is not a QF-1 algebra.

§ 2. THRALL's problem

The following two examples give a complete solution to THRALL's problem mentioned in Introduction. In the following K is assumed to be a commutative field and c_{ik} mean matrix units in the full matrix ring $(K)_n$ for $n=6$ or 10.

[2]) Recently H. TACHIKAWA [2] has extended the notion of QF-3 algebras to the case of rings with minimum condition. Our theorems in § 1 are also true for rings with minimum condition if we deal with modules instead of representations and understand QF-1 rings and QF-3 rings in his sense.

EXAMPLE 2.1. Let A be the subalgebra of the full matrix ring $(K)_6$ over K such that the elements

$$e_1 = c_{11} + c_{66},\ e_2 = c_{22} + c_{55},\ e_3 = c_{33} + c_{44},$$
$$c_{21},\ c_{31},\ c_{64},\ c_{65}$$

form a K-basis of A. If we denote by $J(Y)$ the dual representation module of a right A-module Y, the totality of non-isomorphic minimal faithful left A-modules is

$$A,\ J(A),\ Ae_1 \oplus J(e_1A),\ Ae_2 \oplus Ae_3 \oplus J(e_2A) \oplus J(e_3A).$$

By calculation we see that the representation of A defined by each of these modules is its own second commutator. Any indecomposable left A-module which is not simple is either projective or injective. Hence we see by Theorem 1.2 that A is a QF-1 algebra. On the other hand, A is not a QF-3 algebra.

EXAMPLE 2.2. Let A be the subalgebra of the full matrix ring $(K)_{10}$ over K such that the elements

$$e_1 = c_{11},\ e_2 = c_{22} + c_{55},\ e_3 = c_{33} + c_{88},$$
$$e_4 = c_{44} + c_{66} + c_{99},\ e_5 = c_{77},\ e_6 = c_{10,10},$$
$$c_{21},\ c_{31},\ c_{41},\ c_{42} + c_{65},\ c_{43} + c_{98},$$
$$c_{75},\ c_{76},\ c_{10,8},\ c_{10,9}$$

form a K-basis of A. The algebra A is QF-3 and its unique minimal faithful left A-module is $Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3$ but A is not a QF-2 algebra. The totality of non-isomorphic indecomposable left A-modules is

$$Ae_i/N^2e_i, \qquad Ne_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

except projective or injective or simple modules, where N means the radical of A. It can easily be verified that A satisfies the conditions of Theorem 1.3. Hence A is a QF-1 algebra[3]).

References

[1] MORITA, K.: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **6**, No. 150. 83—142 (1958). — [2] TACHIKAWA, H.: Note on QF-3 rings, forthcoming. — [3] THRALL, R. M.: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 173—183 (1948).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 25. Februar 1958)

[3]) This algebra A was constructed by THRALL [3] as an example of a QF-3 algebra which is not QF-2. (However, he has overlooked that A is QF-1.)

CRAMPE, S.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 435–462 (1958)

Angeordnete projektive Ebenen

Von
SIBYLLA CRAMPE

Einleitung

Die aus den Anordnungseigenschaften einer angeordneten projektiven Ebene für ihren Koordinatenbereich sich ergebenden Monotoniegesetze sind für den Fall, daß der Koordinatenbereich eine Cartesische Gruppe ist, schon in dem Buch „Projektive Ebenen" von PICKERT [4] dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, was für Monotoniegesetze für die Ternärkörper angeordneter projektiver Ebenen folgen, in denen keine Schließungssätze vorausgesetzt werden; mit Hilfe dieser Gesetze wird in § 6 der angeordnete Ternärkörper definiert und anschließend im Satz 6 gezeigt, daß man einen Ternärkörper einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ auf genau eine Weise durch die Anordnung von $\mathfrak{E}$ anordnen kann und daß sich umgekehrt die projektive Ebene auf genau eine Weise durch die Anordnung eines ihrer Ternärkörper anordnen läßt.

Im § 7 wird untersucht, wie sich die Monotoniegesetze eines Ternärkörpers vereinfachen, wenn gewisse Schließungssätze vorausgesetzt werden, und im § 8 werden vollständige angeordnete Ternärkörper betrachtet. Der § 9 bringt das Beispiel einer echten Cartesischen Gruppe, in der die Anordnungsgesetze der Addition und das linksseitige, nicht aber das rechtsseitige Monotoniegesetz der Multiplikation erfüllt sind.

Im letzten Teil der Arbeit wird der Zusammenhang zwischen angeordneten projektiven Ebenen und projektiven Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist, erläutert. Es wird untersucht, wieweit sich die Monotoniegesetze von Ternärkörpern angeordneter affiner Ebenen auf Ternärkörper affiner Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist, übertragen lassen. Abschließend wird gezeigt, durch was für Ordnungsfunktionen gerade die Anordnung einer affinen Ebene charakterisiert ist.

Herrn G. PICKERT möchte ich für seine vielen Anregungen und Hinweise danken.

§ 1. Definition der projektiven und affinen Ebene, der Perspektivität und Projektivität

Unter einer *Inzidenzstruktur* versteht man ein Tripel von zwei Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ und einer zwischen den Elementen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ folgendermaßen erklärten Relation I:

Aus $x \mathrel{I} y$ folgt $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{G}$.
Aus $x_i \mathrel{I} y_k$ $(i, k = 1, 2)$ folgt $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$ nennt man *Punkte*, die Elemente von $\mathfrak{G}$ *Geraden*, und I bezeichnet man als *Inzidenzrelation*. Für $x I y$, $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{G}$, sagt man „*x inzident y*" oder „*der Punkt x liegt auf der Geraden y*" oder „*die Gerade y geht durch den Punkt x*".

Eine *projektive Ebene* ist eine Inzidenzstruktur mit den folgenden drei Eigenschaften:

(1) Durch zwei verschiedene Punkte geht eine Gerade.

(2) Zwei verschiedene Geraden besitzen einen gemeinsamen Punkt.

(3) Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind.

Die Geraden werden im folgenden immer mit kleinen griechischen und die Punkte mit kleinen oder großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; für den Schnittpunkt zweier Geraden α, β schreiben wir auch kurz $\alpha \cap \beta$ und für die Verbindungsgerade zweier Punkte A, B entsprechend $A \cup B$ oder AB.

Statt I wird in einer projektiven Ebene $\in$ geschrieben, da man dort eine Gerade ja auch durch die auf ihr liegende Punktreihe (d.i. die Menge der auf ihr liegenden Punkte) ersetzen kann.

Nimmt man aus einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ eine Gerade ω und sämtliche auf ihr liegenden Punkte heraus, so erhält man eine Unterstruktur $\mathfrak{E}_\omega$, in der noch (1) gilt, an Stelle von (2) aber

(2′) Durch einen nicht auf α liegenden Punkt A geht genau eine Gerade, welche mit α keinen Punkt gemeinsam hat.

Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben oder gleich sind, nennt man *parallel* zueinander und die in (2′) gekennzeichnete Gerade die *Parallele* zu α durch A. Aus (3) erhält man für $\mathfrak{E}_\omega$

(3′) Es gibt drei nichtkollineare Punkte.

Eine Inzidenzstruktur mit den Eigenschaften (1), (2′) und (3′) heißt eine *affine Ebene*.

Die Gerade ω wird die *uneigentliche Gerade* und ihre Punkte werden die *uneigentlichen Punkte* der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ genannt.

Jede affine Ebene kann in eine projektive Ebene eingebettet werden; denn zu jeder affinen Ebene $\mathfrak{A}$ gibt es eine bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte projektive Ebene $\mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{A}$ isomorph ist zu einer $\mathfrak{E}_\omega$ ([4], S. 11).

Wegen (3) gibt es in einer projektiven Ebene zwei verschiedene Geraden α, β und einen außerhalb dieser beiden Geraden liegenden Punkt S. Durch $x \to \xi = x \cup S$ $(x \in \alpha)$ wird eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von α auf die Geraden durch den Punkt S definiert. Man nennt sie die *Perspektivität* der Punktreihe α auf das Strahlenbüschel S und ihre Umkehrung die *Perspektivität* des Strahlenbüschels S auf die Punktreihe α. Bildet man die Geraden des Büschels durch S weiterhin perspektiv auf die Punkte der

Geraden β ab, so erhält man eine umkehrbar eindeutige Abbildung von α auf β, welche die *Perspektivität* der Geraden α auf die Gerade β vom Zentrum S aus genannt wird. Eine Hintereinanderausführung von Perspektivitäten heißt *Projektivität*. In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ wird eine projektive Abbildung π der Geraden α auf die Gerade β mit $(\alpha \cap \omega)^\pi = \beta \cap \omega$ eine *affine Projektivität* genannt.

§ 2. Koordinateneinführung, Definition des Ternärkörpers

In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ wähle man zwei eigentliche voneinander verschiedene Punkte O, E und zwei voneinander verschiedene uneigentliche Punkte $U, V \notin OE$. Die Gerade OV sei als y- und die Gerade OU als x-Achse bezeichnet. Dann kann man jedem Punkt P aus $\mathfrak{E}_\omega$ durch

$$(*) \qquad x_p = \big((VP \cap OE) \cup U\big) \cap OV, \quad y = UP \cap OV$$

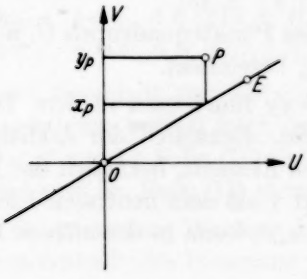


Fig. 1

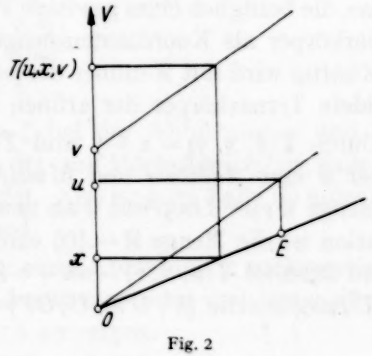


Fig. 2

zwei Punkte der Geraden OV eindeutig zuordnen. Umgekehrt entspricht jedem Paar (x_p, y_p) von Punkten x_p, y_p der Geraden OV auf Grund der Vorschrift (*) genau ein Punkt von $\mathfrak{E}_\omega$. Man kann also jeden Punkt von $\mathfrak{E}_\omega$ als (x_p, y_p) darstellen, daher wird im folgenden für P häufig (x_p, y_p) geschrieben; x_p, y_p heißen die *Koordinaten* des Punktes P. Der Punkt O wird mit 0 und $UE \cap OE$ mit 1 bezeichnet, so daß O, E die Koordinatenpaare (0, 0) bzw. (1, 1) haben. Die Punktmenge der Geraden OV nennt man die *Koordinatenmenge* $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ bezüglich der Punkte O, E, U, V.

Zwischen den Elementen von $\mathfrak{R}$ erklärt man eine *ternäre Verknüpfung* T durch die geometrische Vorschrift:

$T(u, x, v)$ ist die y-Koordinate des Schnittpunktes der Parallelen zu OV durch $Ux \cap OE$ mit der Parallelen zu $O \cup (Uu \cap EV)$ durch v.

Die geometrischen Eigenschaften der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ lassen sich nunmehr mit Hilfe der ternären Verknüpfung T als Eigenschaften der Koordinatenmenge $\mathfrak{R}$ ausdrücken:

(1) Zu $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{R}$ gibt es im Falle $u_1 \neq u_2$ genau ein $x \in \mathfrak{R}$ mit $T(u_1, x, v_1) = T(u_2, x, v_2)$.

(2) Zu $x, y, u \in \mathfrak{R}$ gibt es genau ein $v \in \mathfrak{R}$ mit $y = T(u, x, v)$.

(3) Zu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{R}$ gibt es im Falle $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ Elemente $u, v \in \mathfrak{R}$ mit $y_i = T(u, x_i, v)$, $i = 1, 2$.

(4) $v = T(0, x, v)$.

(5) $v = T(u, 0, v)$.

(6) $u = T(u, 1, 0)$.

(7) $x = T(1, x, 0)$.

Eine mindestens zwei verschiedene Elemente 0, 1 enthaltende Menge $\mathfrak{R}$, für deren Elemente eine den Bedingungen (1) bis (7) genügende Verknüpfung T definiert ist, nennt man einen *Ternärkörper*.

Jeder affinen Ebene läßt sich bezüglich eines nichtausgearteten Punktequadrupels O, E, U, V eindeutig ein Ternärkörper zuordnen; und umgekehrt bestimmt auch jeder Ternärkörper bis auf Isomorphismen eindeutig eine affine Ebene, die bezüglich eines gewissen Punktequadrupels einen zu ihm isomorphen Ternärkörper als Koordinatenmenge besitzt ([4], S. 38).

Künftig wird mit $\mathfrak{R}$ immer der bezüglich des Punktequadrupels O, E, U, V gebildete Ternärkörper der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ bezeichnet.

Durch $T(1, x, y) = x + y$ und $T(x, y, 0) = xy$ führt man in dem Ternärkörper $\mathfrak{R}$ eine *Addition* und *Multiplikation* ein. Bezüglich der Addition ist die Menge $\mathfrak{R}$ eine Loop mit 0 als dem neutralen Element, bezüglich der Multiplikation ist die Menge $\mathfrak{R} - \{0\}$ eine Loop mit 1 als dem neutralen Element. Genau dann ist $T(u, x, v) = ux + v$ für alle u, x, v, wenn in der affinen Ebene der Desarguessche $(V, UV; U, OV)$-Satz gilt.

§ 3. Definition der Anordnung, Zwischen- und Trennbeziehung[1])

Eine in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärte binäre Relation $<$ heißt *Anordnung* und $\mathfrak{M}$ dann *angeordnet*, wenn die folgenden drei Bedingungen für alle $a, b, c \in \mathfrak{M}$ erfüllt sind:

(1) $a \neq b$, wenn $a < b$.

(2) $a < c$, wenn $a < b$ und $b < c$.

(3) Entweder $a < b$ oder $b < a$, wenn $a \neq b$.

In einer angeordneten Menge $\mathfrak{M}$ kann man für alle Elemente von $\mathfrak{M}$ eine ternäre Relation ζ durch

(4) $\zeta(a, b, c)$ genau dann, wenn $a < b < c$ oder $c < b < a$

definieren. Man bezeichnet ζ als die zur Anordnung $<$ gehörige *Zwischenbeziehung*.

Umgekehrt kann man aus jeder in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärten Zwischenbeziehung auch eine Anordnung gewinnen, indem man für zwei Elemente — sie seien mit 0 und 1 bezeichnet — $0 < 1$ festsetzt und dann definiert:

$x < 0$ genau dann, wenn $\zeta(x, 0, 1)$;

[1]) Zu den Beweisen s. etwa [4], 9.1.

$x<y$ im Falle $x, y \neq 0$ genau dann, wenn $\zeta(0, x, y)$, $0<x$ oder $\zeta(0, y, x)$, $y<0$ oder $x<0$, $0<y$.

Zwischen ζ und $<$ besteht dann die Beziehung (4). Statt $<$ kann man natürlich auch die konverse Relation $>$ nehmen.

Erhält eine Abbildung φ die Relation ζ, so ist φ entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

Beweis. Gilt $\zeta(a, b, c)$, so ist wegen (4) $a<b<c$ oder $c<b<a$. Ich kann also $a<b<c$ voraussetzen. Im Bildbereich gilt $\zeta(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$, nach (4) also (I) $a^\varphi<b^\varphi<c^\varphi$, oder (II) $c^\varphi<b^\varphi<a^\varphi$. Für zwei beliebige Elemente x, y mit $x<y$, von denen mindestens eines von a, b verschieden sei, gibt es die folgenden Lagemöglichkeiten in bezug auf a, b:

1) $x<a$, $y \leqq a<b$, d.h. $\zeta(x, a, b)$ und $\zeta(x, y, b)$;
2) $x<a$, $a<y$, d.h. $\zeta(x, a, b)$ und $\zeta(x, a, y)$;
3) $a \leqq x$, $y<b$, d.h. $\zeta(a, y, b)$ und $\zeta(x, y, b)$;
4) $a \leqq x$, $b<y$, d.h. $\zeta(a, b, y)$ und $\zeta(x, b, y)$;
5) $a<x$, $y=b$, d.h. $\zeta(a, x, y)$ und $y=b$.

Wegen Invarianz der Zwischenrelation ζ bei der Abbildung φ und bei Berücksichtigung von (4) folgt, daß für jede der fünf Möglichkeiten im Falle (I) stets $x^\varphi<y^\varphi$ und im Falle (II) stets $y^\varphi<x^\varphi$ gilt. Also ist φ im Falle (I) monoton wachsend und im Falle (II) monoton fallend.

Um das monotone Wachsen bzw. Fallen einer Abbildung φ nachzuweisen, genügt es deshalb, die Invarianz von ζ bei Ausübung von φ und ferner $a^\varphi<b^\varphi$ bzw. $b^\varphi<a^\varphi$ für zwei spezielle a, b mit $a<b$ zu zeigen.

Unter einer in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärten *Trennbeziehung* versteht man eine quaternäre Relation $|$ mit den folgenden Eigenschaften für alle $a, b, c, d, e \in \mathfrak{M}$:

(1) a, b, c, d sind untereinander verschieden, wenn $ab|cd$.

(2) $ba|cd$ und $cd|ab$, wenn $ab|cd$.

(3) $ab|cd$ falsch, wenn $ac|bd$.

(4) $ab|cd$ oder $ca|bd$ oder $bc|ad$, wenn a, b, c, d untereinander verschieden.

(5) $cd|ea$, wenn $ab|cd$, $bc|de$
($ab|cd$ liest man „*ab trennt cd*").

Läßt man ein Element $u \in \mathfrak{M}$ fort, so kann man mittels der in $\mathfrak{M}$ definierten Trennbeziehung $|$ stets eine Zwischenrelation ζ für die Restmenge $\mathfrak{M}-\{u\}$ folgendermaßen erklären:

(*) $\zeta(a, b, c)$ genau dann, wenn $ac|bu$.

Umgekehrt kann man aus einer Zwischenbeziehung in $\mathfrak{M}-\{u\}$ stets eine Trennbeziehung in $\mathfrak{M}$ durch folgende Festsetzung gewinnen:

$ab|cu$, $ba|cu$, $ab|uc$ und $ab|cu$ für $a, b, c \neq u$ genau dann, wenn $\zeta(a, c, b)$.

$ab|cd$, $ba|cd$, $ab|dc$ und $ba|dc$ für $a, b, c, d \neq u$ genau dann, wenn

$$\begin{cases} \zeta(a,c,b),\ d \neq a,b \text{ und nicht } \zeta(a,d,b) \\ \text{oder} \\ \zeta(a,d,b),\ c \neq a,b \text{ und nicht } \zeta(a,c,b). \end{cases}$$

Zur Abkürzung wird im folgenden statt $\zeta(P, Q, R)$ nur noch PQR geschrieben.

§ 4. Angeordnete projektive Ebene, angeordnete affine Ebene

Eine *projektive Ebene* heißt *angeordnet*, wenn jede ihrer Geraden mindestens vier Punkte enthält und in jeder Punktreihe (das ist die Menge der Punkte auf einer Geraden) eine Trennbeziehung erklärt ist, welche bei jeder perspektiven Abbildung einer Punktreihe auf eine andere erhalten bleibt.

Eine *affine Ebene* heißt *angeordnet*, wenn jede ihrer Geraden mindestens drei Punkte enthält und in jeder Punktreihe eine Zwischenbeziehung erklärt ist[2]), welche bei jeder affinen projektiven Abbildung einer Punktreihe auf eine andere erhalten bleibt. Jede Anordnung einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ läßt sich zu einer Anordnung der zugehörigen projektiven Ebene fortsetzen ([4], S. 227), und aus jeder Anordnung einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ kann man mittels (*) des § 3, wobei u stets gleich dem Schnittpunkt der jeweiligen Geraden mit ω zu setzen ist, eine Anordnung einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ herstellen.

In einer angeordneten affinen Ebene gilt offenbar:

(1) $AB'C'$, wenn ABC, $AB' = AC' \neq AB$, $BB' \| CC'$[3]),

(2) $A_1'A_2'A_3'$, wenn $A_1A_2A_3$, $SA_i \| S'A_i'$ $(i=1, 2, 3)$, $SS' \neq A_1A_2 = A_1'A_2' \| SS'$,

(3) $B'AC'$, wenn BAC, $AB' = AC' \neq AB$, $BB' \| CC'$.

Unter Voraussetzung der kennzeichnenden Eigenschaften der Zwischenbeziehung folgt die Bedingung (3) bereits aus (1) ([4], S. 228). Später wird dasselbe auch für (2) gezeigt.

Aus (1) und (3) läßt sich das *Axiom von* PASCH herleiten ([4], S. 228):

Geht die Gerade α durch keinen der nichtkollinearen Punkte A, B, C, und enthält sie einen Punkt C' mit $BC'A$, so enthält sie auch einen Punkt B' mit $AB'C$ oder einen Punkt A' mit $CA'B$.

Ist $\alpha \| AC$ oder $\alpha \| BC$, so handelt es sich offenbar um die Bedingung (1). Man nennt diese deshalb *das kleine Axiom von* PASCH.

Nach [4], S. 228, wird eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung zu einer angeordneten affinen Ebene, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält, und die obigen Bedingungen (1) und (2) gelten. In dem folgenden Satz 1 wird bewiesen, daß (2) aus (1) folgt. Damit ist dann also gezeigt, daß eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung bereits dann angeordnet wird, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und das kleine Axiom von PASCH gilt.

---

[2]) Aus ABC folgt die Kollinearität der Punkte A, B, C.

[3]) Hier wie im folgenden wird mit P' stets das projektive Bild von P bezeichnet.

Für den Satz 1 wollen wir noch den folgenden Hilfssatz beweisen.

HILFSSATZ 1. *Ist in jeder Punktreihe einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ eine Zwischenbeziehung erklärt, so daß (1) gilt, und liegen auf jeder Geraden mindestens drei Punkte, so gibt es in $\mathfrak{E}_\omega$ zu zwei beliebigen Punkten A, B mit $A \neq B$ stets einen Punkt C mit ACB.*

Beweis. In $\mathfrak{E}_\omega$ existiert wegen (3'), § 1, ein Punkt $P \notin AB$. Durch diesen ziehen wir die Parallele α zu AB. Auf α gibt es drei Punkte A_1, A_2, A_3 mit $A_1A_2A_3$. Es sei A_2' der Schnittpunkt von A_1B mit der Parallelen zu A_3B durch A_2 und C der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu A_1A durch A_2'. Nach (1) folgt aus $A_1A_2A_3$ dann $A_1A_2'B$ und hieraus ACB.

SATZ 1. *Wenn in einer affinen Ebene in jeder Punktreihe mindestens drei Punkte liegen und eine Zwischenbeziehung so erklärt ist, daß (1) gilt, so ist auch (2) erfüllt.*

Beweis. Es wird gezeigt, daß aus $A_1 < A_2$ sogar $A_1' < A_2'$ folgt, aus $A_1 < A_2 < A_3$ also $A_1' < A_2' < A_3'$ und somit aus $A_1A_2A_3$ auch $A_1'A_2'A_3'$.

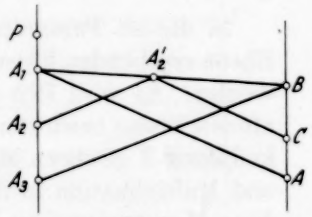


Fig. 3

Man setze $Q = SA_2 \cap S'A_1'$. Dieser Schnittpunkt Q existiert; denn wäre er nicht vorhanden, so wäre $S'A_1' \| SA_2$ und $S'A_1' \| SA_1$, nach (2'), § 1, somit $A_1 = A_2$ im Widerspruch zu $A_1 < A_2$. Wie vorhin erwähnt, folgt aus (1) die Bedingung (3).

Es werden nun die verschiedenen Lagemöglichkeiten des Bildpunktes A_1' in bezug auf die Urbildpunkte A_1, A_2 betrachtet; hieraus wird mit Hilfe von (1) und (3) auf die Lage von Q und damit wiederum auf die Lage von A_2' geschlossen.

I) $A_1 < A_2$ und $A_1 < A_1'$.

a) $A_1 < A_1' < A_2$. Wegen $A_1A_1'A_2$ folgt nach (1) SQA_2, hieraus nach (3) $S'QA_1'$ und nach (1) somit $A_2'A_2A_1'$. Da $A_1' < A_2$ ist, erhält man $A_1' < A_2'$.

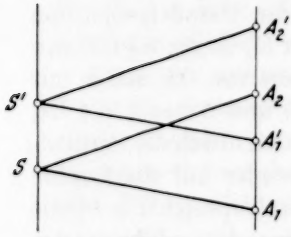


Fig. 4

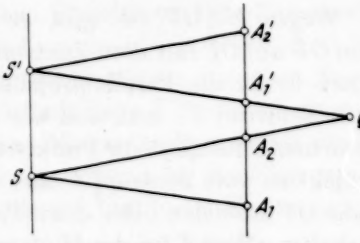


Fig. 5.

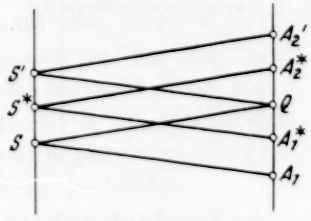


Fig. 6

b) $A_1 < A_2 < A_1'$. In diesem Fall gilt $A_1A_2A_1'$, daher nach (3) SA_2Q und nach (1) $S'A_1'Q$, nach (3) also $A_2'A_1'A_2$. Wegen $A_2 < A_1'$ ist somit $A_1' < A_2'$.

c) $A_2 = A_1' = Q$. Nach Hilfssatz 1 gibt es zu A_1Q einen Punkt A_1^* mit $A_1A_1^*Q$. Durch A_1^* ziehen wir die Parallele zu SA_1, die SS' in S^* schneidet, und durch S^* die Parallele zu SQ, die mit A_1Q den Schnittpunkt A_2^* hat. Für die Punkte A_1, A_2, A_1^* trifft der Fall I) zu, und wir erhalten deshalb

$A_1^* < A_2^*$; also liegt auch bei den Punkten A_1^*, A_2^*, A_1' Fall I) vor, und es folgt somit $A_1' < A_2'$.

II) $A_1 < A_2$ und $A_1' < A_1$.

Austauschen von $<$ gegen $>$ zeigt, daß man mit (I) auch den Fall $A_1 < A_2$, $A_2' < A_2$ beherrscht [man schreibt $x \dot{<} y$ genau dann, wenn $y < x$ ist; aus $A_1 < A_2$, $A_2' < A_2$ folgt also $A_2 \dot{<} A_1$, $A_2 \dot{<} A_2'$ und daher nach (I) $A_2' \dot{<} A_1'$, d.h. $A_1' < A_2'$]. Es bleibt also nur noch der Fall $A_1 < A_2$, $A_1' < A_1$, $A_2 < A_2'$, in dem trivialerweise $A_1' < A_2'$ folgt.

Aus dem Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar der

SATZ 2. *Sind in einer angeordneten affinen Ebene die Bedingungen* $SA_i \parallel S'A_i'$ $(i = 1, 2)$, $SS' \neq A_1A_2 = A_1'A_2' \parallel SS'$ *erfüllt, so folgt* $A_1' < A_2'$ *aus* $A_1 < A_2$.

§ 5. Einfluß der Anordnung einer affinen Ebene auf ihren Ternärkörper

In diesem Paragraphen sollen die sich aus der Anordnung einer affinen Ebene ergebenden Eigenschaften für den zugehörigen Ternärkörper untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß bezüglich der durch die Anordnung der affinen Ebene bewirkten Anordnung ihrer Koordinatenmenge die ternäre Verknüpfung T gewissen Monotoniegesetzen genügt. Falls T sich durch Addition und Multiplikation in der Form $T(u, x, v) = ux + v$ darstellen läßt, stimmen diese Monotoniegesetze mit den Monotoniegesetzen der Addition und Multiplikation überein.

HILFSSATZ 2. *In dem Ternärkörper* $\mathfrak{R}$ *gelten die beiden folgenden Aussagen:*

(1) $T(u, x_1, v)\ T(u, x_2, v)\ T(u, x_3, v)$, *falls* $x_1 x_2 x_3$ *und* $u \neq 0$.

(2) $T(u, x, v_1)\ T(u, x, v_2)\ T(u, x, v_3)$ *für* $v_1 v_2 v_3$.

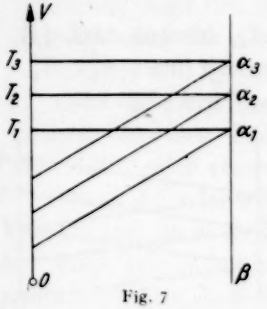


Fig. 7

Beweis. Zu (1): Zur Abkürzung werde $T_i = T(u, x_i, v)$ gesetzt und die durch $y = T(u, x, v)$ bestimmte Gerade mit α bezeichnet.

Wegen $U \notin OV, OE$ gibt es die Parallelprojektion von OV auf OE mit dem Zentrum U; wegen $\alpha \nparallel OV$ existiert ferner die Parallelprojektion von OE auf α mit dem Zentrum V, und weil $u \neq 0$ und daher $U \notin \alpha$ ist, kann man schließlich die Punktreihe α durch die Parallelprojektion vom Zentrum U aus wieder auf die Punktreihe OV abbilden. Bei einer Parallelprojektion bleibt die Zwischenbeziehung erhalten. Weil T_i bei der Hintereinanderausführung der oben angegebenen Parallelprojektionen das Bild von x_i ist, folgt somit die Aussage (1).

Zu (2): Es werde $y_i = T(u, x, v_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ gesetzt, die durch $y = T(u, x, v_i)$ bestimmten Geraden werden mit α_i und die Gerade der Punkte mit der Abszisse x wird mit β bezeichnet.

Wegen $u \in \mathfrak{R}$ ist $\alpha_i \nparallel OV$, $\alpha_i \nparallel \beta$ $(i = 1, 2, 3)$. Daher existiert die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$. Es sei σ_2 die Parallel-

projektion von β auf OV mit dem Zentrum U. Wegen Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen und $y_i = v_i^{\sigma_1\sigma_2}$ $(i = 1, 2, 3)$ erhält man somit die Aussage (2).

HILFSSATZ 3. *Gibt es ein* $x_s \in \mathfrak{R}$ *mit*

$$T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) = T(u_3, x_s, v_3),$$

so gilt

$$T(u_1, x, v_1)\, T(u_2, x, v_2)\, T(u_3, x, v_3) \quad \text{für } u_1 u_2 u_3,\ x \neq x_s.$$

Beweis. Es werde $S = (x_s, T(u_1, x_s, v_1))$, $y_i = T(u_i, x, v_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ und β gleich der Geraden der Punkte mit der Abszisse x gesetzt.

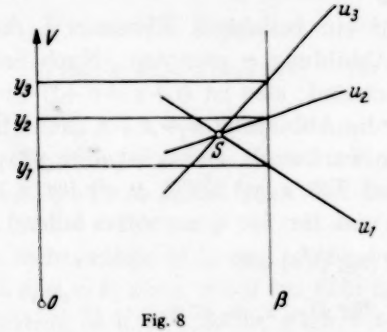


Fig. 8

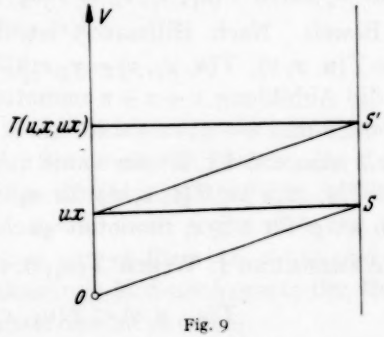


Fig. 9

Wegen $U \notin OV, EV$ gibt es die Perspektivität σ_1 von OV auf EV mit dem Zentrum U; da $O \notin EV, UV$, kann man die Punktreihe EV in der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ durch σ_2 ferner perspektiv vom Zentrum O aus auf UV abbilden. Wegen $x \neq x_s$ und $S = (x_s, T(u_1, x_s, v_1))$ ist $S \notin \beta$, $S \notin UV$; daher existiert die Perspektivität σ_3 von UV auf β mit dem Zentrum S. Wegen $\beta \| OV$ ist $U \notin \beta$, also gibt es die Perspektivität σ_4 von β auf OV mit dem Zentrum U. Setzt man $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, so ist σ eine projektive Abbildung in unserer Ebene $\mathfrak{E}$, und wegen $V^\sigma = V$ ist σ sogar eine affine Projektivität in $\mathfrak{E}_\omega$. Da bei einer affinen Projektivität die Zwischenbeziehung erhalten bleibt, gilt somit $u_1^\sigma u_2^\sigma u_3^\sigma$, und wegen $y_i = u_i^\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ besagt dies gerade $y_1 y_2 y_3$.

Es folgen nunmehr einige Sätze, die über das monotone Wachsen bzw. Fallen der ternären Verknüpfung T bezüglich eines oder mehrerer ihrer Argumente Auskunft geben. Hierzu muß zunächst einmal aus der in $\mathfrak{R}$ erklärten Zwischenrelation eine Anordnung für die Elemente von $\mathfrak{R}$ gewonnen werden; nach § 3 ist diese eindeutig durch die Festsetzung $0 < 1$ bestimmt.

SATZ 3. $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$, *wenn* $v_1 < v_2$.

Beweis. Nach Satz 3 (2) ist die durch $v^\varphi = T(u, x, v)$ erklärte Abbildung φ monoton. Um das monotone Wachsen von φ zu zeigen, genügt es daher, wie in § 3 nachgewiesen wurde, $T(u, x, v_1') < T(u, x, v_2')$ für zwei spezielle v_1', v_2' mit $v_1' < v_2'$ zu beweisen.

Im Falle $ux = 0$ ist $x = 0$ oder $u = 0$, also stets $T(u, x, v_i) = v_i$ und φ trivialerweise monoton wachsend. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $ux \neq 0$ voraussetzen.

Man setze $A_1=0$, $A_2=A_1'=ux$, $A_2'=T(u,x,ux)$, $S=\big(x,T(u,x,0)\big)$ und $S'=\big(x,T(u,x,ux)\big)$. Dann ist $SA_i\|S'A_i'$ $(i=1,2)$ und $SS'\neq A_1A_2=A_1'A_2'\|SS'$; die Voraussetzungen des Satzes 2 sind also erfüllt, und daher folgt $T(u,x,0)<T(u,x,ux)$ für $0<ux$ und $T(u,x,ux)<T(u,x,0)$ für $ux<0$, d.h. φ ist monoton wachsend.

SATZ 4. *Ist* $u_1<u_2$, *so gilt*

$$T(u_1,x,v_1)<T(u_2,x,v_2) \quad \textit{für } x_s<x,$$
$$T(u_1,x,v_1)>T(u_2,x,v_2) \quad \textit{für } x_s>x,$$

wobei x_s *durch* $T(u_1,x_s,v_1)=T(u_2,x_s,v_2)$ *bestimmt ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist die für ein beliebiges Element y_s durch $u^\varphi=T(u,x,v)$, $T(u,x_s,v)=y_s$ erklärte Abbildung φ monoton. Nach Satz 3 ist die Abbildung $v\to x+v$ monoton wachsend; also ist $0+v=v+0<v+v$ für $0<v$ und $0+v>v+v$ für $0>v$. Da die Abbildung $x\to x+v$ nach Hilfssatz 2 monoton ist, ist sie somit monoton wachsend. Daher ist $T(0,x,y_s)=y_s=T(1,x_s,v')<T(1,x,v')$ für $x_s<x$ und $T(0,x,y_s)>T(1,x,v')$ für $x_s>x$. Also ist φ für $x>x_s$ monoton wachsend und für $x<x_s$ monoton fallend.

ANMERKUNG 1. Wegen $T(u_1,0,v)=T(u_2,0,v)$ ist

$$T(u_1,x,v)<T(u_2,x,v) \quad \text{für } 0<x,\ u_1<u_2,$$
$$T(u_1,x,v)>T(u_2,x,v) \quad \text{für } 0>x,\ u_1<u_2.$$

Setzt man in Satz 4 $u_1=0$, $u_2=u$, so folgt $T(u,x_s,v)=v_1=T(0,x,v_1)<T(u,x,v)$ für $x_s<x$, $0<u$ und $T(u,x_s,v)>T(u,x,v)$ für $x_s>x$, $0<u$; entsprechend erhält man für $u_1=u$ und $u_2=0$, daß $T(u,x,v)<T(u,x_s,v)$ für $x_s<x$, $0>u$ und $T(u,x,v)>T(u,x_s,v)$ für $x_s>x$, $0>u$ ist. Da dies für jedes beliebige $x_s\in\mathfrak{R}$ gilt, ist die Abbildung $x\to T(u,x,v)$ für $0<u$ monoton wachsend und für $0>u$ monoton fallend.

§ 6. Angeordnete Ternärkörper

In diesem Paragraphen wird die Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{R}$ auf Grund der eben hergeleiteten Monotonieeigenschaften der ternären Relation T definiert und anschließend gezeigt, daß $\mathfrak{R}$ genau dann angeordnet ist, wenn die zugehörige affine Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ es ist.

DEFINITION 1. Ein *Ternärkörper* $\mathfrak{R}$ heißt *angeordnet*, wenn für seine Elemente eine Anordnung $<$ definiert ist, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(1) $T(u,x,v_1)<T(u,x,v_2)$ für $v_1<v_2$,

(2) $T(u_1,x,v_1)<T(u_2,x,v_2)$ für $u_1<u_2,\ x>x_s$,
$T(u_1,x,v_1)>T(u_2,x,v_2)$ für $u_1<u_2,\ x<x_s$,

wobei x_s durch $T(u_1,x_s,v_1)=T(u_2,x_s,v_2)$ bestimmt ist.

ANMERKUNG 2. Nach Definition 1 (1) ist die Abbildung $v \to T(1, 1, v) = 1 + v$ monoton wachsend; also ist diese Abbildung nicht die identische, und es folgt somit aus der Existenz zweier verschiedener Elemente (und diese gibt es, nämlich 0 und 1) eines angeordneten Ternärkörpers $\mathfrak{R}$, daß $\mathfrak{R}$ unendlich viele voneinander verschiedene Elemente enthält. Wie in Anmerkung 1 erwähnt, folgen aus (2) die Aussagen

$$\begin{aligned} &(2a) \quad T(u, x_1, v) < T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2,\ 0 < u, \\ &\qquad T(u, x_1, v) > T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2,\ 0 > u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(2b) \quad T(u_1, x, v) < T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2,\ 0 < x, \\ &\qquad T(u_1, x, v) > T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2,\ 0 > x. \end{aligned}$$

Mit $u = 1$, $x = c$, $v_1 = a$, $v_2 = b$ folgt aus (1) das rechtsseitige Monotoniegesetz der Addition, d.h. $c + a < c + b$ für $a < b$. Setzt man in (2a) $u = 1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $v = c$, so erhält man das linksseitige Monotoniegesetz der Addition: $a + c < b + c$ für $a < b$. Mit $u = c$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $v = 0$ ergibt sich aus (2a) das rechtsseitige (d.h. $ca < cb$ für $a < b$, $c > 0$. $ca > cb$ für $a < b$, $c < 0$) und mit $u_1 = a$, $u_2 = b$, $x = c$, $v = 0$ aus (2b) das linksseitige Monotoniegesetz der Multiplikation (d.h. $ac < bc$ für $a < b$, $c > 0$, $ac > bc$ für $a < b$, $c < 0$).

Aus der Gültigkeit von (1) bzw. (2) folgt natürlich auch die Gültigkeit der Umkehrung von (1) [d.h. $v_1 < v_2$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$] bzw. der Umkehrung von (2)

$$\left[\text{d.h.} \quad \begin{cases} u_1 < u_2,\ x > x_s & \text{oder} \quad u_1 > u_2,\ x < x_s \\ u_1 < u_2,\ x < x_s & \text{oder} \quad u_1 > u_2,\ x > x_s \end{cases}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für} & T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) \\ \text{für} & T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) \end{array}\right\}, \quad T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2);\Big]$$

denn wäre $v_1 \geqq v_2$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x\ v_2)$, so erhielte man wegen $v_1 \geqq v_2$ nach (1) die unsinnige Aussage $T(u, x, v_1) \geqq T(u, x, v_2)$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$; und aus der Annahme, $u_1 \geqq u_2$, $x \leqq x_s$ oder $u_1 \leqq u_2$, $x \geqq x_s$ für $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und $u_1 \leqq u_2$, $x \leqq x_s$ oder $u_1 \geqq u_2$, $x \geqq x_s$ für $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$, folgte nach (2), daß $T(u_1, x, v_1) \geqq T(u_2, x, v_2)$ für $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und $T(u_1, x, v_1) \leqq T(u_2, x, v_2)$ für $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ gälte.

SATZ 5. *Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei angeordnet. Erklärt man durch (α) und (β) eine Zwischenbeziehung auf den Geraden von $\mathfrak{E}_\omega$, so wird $\mathfrak{E}_\omega$ zu einer angeordneten affinen Ebene.*

(α) $(a, y_1)\,(a, y_2)\,(a, y_3)$ *genau dann, wenn* $y_1\, y_2\, y_3$.

(β) $(x_1, y_1)\,(x_2, y_2)\,(x_3, y_3)$ *mit* $y_i = T(u, x_i, v)$ $(i = 1, 2, 3)$ *genau dann, wenn* $x_1\, x_2\, x_3$.

Beweis. Wie mit dem Satz 1 bewiesen wurde, wird eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung angeordnet, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und das kleine Axiom von PASCH erfüllt ist. Da $\mathfrak{R}$ sogar unendlich viele Elemente enthält, liegen wegen (α) und (β) auch unendlich viele Punkte auf jeder Geraden.

Es wird nun die Invarianz der für jede Punktreihe erklärten Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen nachgewiesen. Da das kleine Axiom von PASCH aus der Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen folgt, ist damit dann die Gültigkeit des kleinen Axioms von PASCH in der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ gezeigt.

Wir beweisen zunächst den folgenden

HILFSSATZ 4. *Existieren* $\bar{u}, \bar{v} \in \mathfrak{R}$ *mit* $T(u, x_i, v_i) = T(\bar{u}, x_i, \bar{v})$ $(i = 1, 2, 3)$, *so gilt* $x_1 x_2 x_3$ *für* $v_1 v_2 v_3$.

Beweis. Nach (4), § 3, kann $v_1 < v_2 < v_3$ angenommen werden. Für $v_1 < v_2$ ist nach Definition 1 (1) $T(u, x_1, v_1) < T(u, x_1, v_2)$, wegen $T(\bar{u}, x_1, \bar{v}) = T(u, x_1, v_1)$ ist also (*) $T(\bar{u}, x_1, \bar{v}) < T(u, x_1, v_2)$; ferner ist $T(\bar{u}, x_2, \bar{v}) = T(u, x_2, v_2)$ und wegen $\bar{u} \in \mathfrak{R}$ auch $x_1 \neq x_2$. Nach der Umkehrung von Aussage (2) aus Definition 1 folgt daher aus (*), daß entweder $\bar{u} < u$, $x_1 > x_2$ oder $\bar{u} > u$, $x_1 < x_2$ gilt.

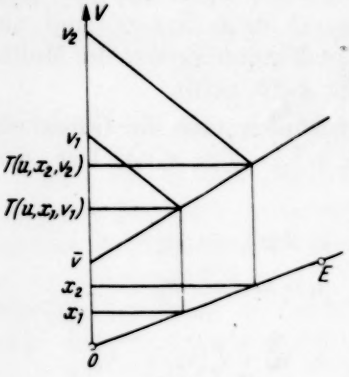


Fig. 10

Ersetzt man in der eben gemachten Überlegung die Indizes 1, 2 durch 2, 3, so erhält man wegen $v_2 < v_3$ die beiden Möglichkeiten $\bar{u} < u$, $x_2 > x_3$ und $\bar{u} > u$, $x_2 < x_3$. Also gilt im Falle $\bar{u} > u$ wie im Falle $\bar{u} < u$ stets $x_1 x_2 x_3$.

Wir kehren zu unserem Beweis der Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen zurück.

Die Urbildgerade bezeichnen wir mit α, ihre Punkte mit $P_i = (x_i, y_i)$, die Bildgerade mit α' und den Bildpunkt von P_i auf α' mit $P_i' = (x_i', y_i')$.

Ist V das Zentrum der Parallelprojektion, so kann weder α noch α' durch V gehen. Daher ist die Zwischenbeziehung auf α wie auf α' durch (β) erklärt. Aus $P_1 P_2 P_3$ folgt somit $x_1 x_2 x_3$, und hieraus erhält man wegen $P_i P_i' \| OV$, also $x_i' = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, dann $P_1' P_2' P_3'$.

Sei σ eine Parallelprojektion mit einem von V verschiedenen Zentrum Z. Mit τ_1 als der Parallelprojektion mit dem Zentrum Z von α auf OV und τ_2 als der Parallelprojektion mit dem Zentrum Z von OV auf α' (falls α bzw. α' gleich OV ist, sei τ_1 bzw. τ_2 gleich der Identität) ist $\sigma = \tau_1 \tau_2$. Bleibt die Zwischenbeziehung bei Ausübung von τ_1^{-1}, τ_2 invariant, so auch bei τ_1, τ_2 und somit auch bei σ. Daher genügt es, die Invarianz der Zwischenbeziehung bei einer Parallelprojektion von OV auf α' nachzuweisen.

λ sei die Parallele zu $P_i P_i'$ durch 0. Man setze $v_i = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und $u = ((\lambda \cap EV) \cup U) \cap OV$. Aus $v_1 v_2 v_3$ folgt nach Definition 1 (1)

$$T(u, x', v_1)\ T(u, x', v_2)\ T(u, x', v_3), \quad \text{d.h.} \quad P_1'\ P_2'\ P_3' \text{ für } V \in \alpha':$$

Ist $V \notin \alpha'$, so setze man $\bar{u} = ((\mu \cap EV) \cup U) \cap OV$, wobei μ die Parallele zu α' durch 0 ist, und $\bar{v} = \alpha' \cap OV$. Dann gilt nach dem eben bewiesenen Hilfssatz 4 $x_1' x_2' x_3'$, und dies besagt wegen (β) gerade wieder $P_1'\ P_2'\ P_3'$.

Aus jeder Anordnung der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ ergeben sich mittels der auf ihrer Punktreihe OV erklärten Zwischenbeziehung zwei Anordnungen ihrer Koordinatenmenge $\mathfrak{R}$. In dem einen Fall ist $0 < 1$, dann erhält man, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, eine Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{R}$. Im andern Fall ist $1 < 0$, daraus folgt aber z.B. $T(1, 1, 0) < T(1, 0, 0)$ für $u = 1 < 0$ und $x_1 = 1 < 0 = x_2$, d.h. die Bedingung (1) der Definition 1 ist nicht erfüllt. Die Anordnung mit $1 < 0$ macht $\mathfrak{R}$ also nicht zu einem angeordneten Ternärkörper. Aus jeder Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{R}$ kann aber, wie in Satz 5 gezeigt wurde, eine Anordnung der zugehörigen affinen Ebene gewonnen werden. Zusammenfassend erhält man also den

SATZ 6. *Den Ternärkörper $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ kann man auf genau eine Weise durch die Anordnung von $\mathfrak{E}_\omega$ anordnen, und umgekehrt läßt sich $\mathfrak{E}_\omega$ auf genau eine Weise durch eine Anordnung von $\mathfrak{R}$ anordnen.*

§ 7. Ternärkörper angeordneter affiner Ebenen, in denen gewisse Schließungssätze erfüllt sind

In diesem Paragraphen soll untersucht werden, wie sich die Monotoniegesetze für die ternäre Verknüpfung vereinfachen, wenn spezielle Desarguessche Sätze vorausgesetzt werden.

Als *affinen kleinen Satz von* DESARGUES bezeichnet man in der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ den folgenden Schließungssatz:

Aus $C, A_i, B_i \in \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $C \in \omega$, $C_{ik}, A_i, A_k \in \alpha_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3;\ i < k)$, $C_{ik}, B_i, B_k \in \beta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3;\ i < k)$, $C \neq A_i \neq B_i \neq C$, $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_1$, $\alpha_{12} \neq \alpha_{13}$, $\beta_{12} \neq \beta_{13}$ und $C_{12}, C_{13} \in \omega$ folgt $C_{23} \in \omega$.

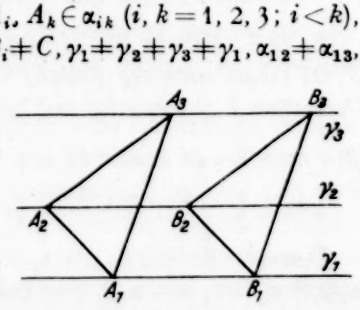


Fig. 11

Hierbei sind ω und C Festelemente und alle anderen in dem Schließungssatz auftretenden Punkte und Geraden Variable. Unter einem Paar zusammengehöriger Variabler versteht man die Paare A_1, β_{23} und C_{12}, γ_3 und jedes durch Permutation der Indizes oder Vertauschen der Buchstaben A, β mit B, α hieraus hervorgehende. Macht man ein Paar zusammengehöriger Variabler, es sei mit C' und γ' bezeichnet[3a]), weiterhin zu Festelementen, so erhält man den *Desarguesschen* $(C, \omega; C', \gamma')$-*Satz*. (Näheres hierüber findet man in [4].)

[3a]) Aber C' natürlich nicht die Variable C_{23}.

U, V, O, E sollen wieder die gleiche Bedeutung wie in § 2 haben. Der Desarguessche $(V, UV; U, OV)$-Satz ist gleichwertig mit der *ersten Zerlegbarkeitsbedingung*, die folgendes besagt: Für alle $u, x, v \in \mathfrak{R}$ gilt $T(u, x, v) = ux + v$.

Unter der *zweiten Zerlegbarkeitsbedingung* versteht man die Aussage:

Für alle $u, x, w \in \mathfrak{R}$ ist $T(u, x, uw) = u(x + w)$. Diese Bedingung ist gleichwertig mit dem Desarguesschen $(U, UV; V, OU)$-Satz.

SATZ 7. *Ist die erste oder die zweite Zerlegbarkeitsbedingung erfüllt, so läßt sich die erste Bedingung der Definition 1 durch* (α) $c + a < c + b$ *für* $a < b$ *ersetzen.*

Beweis. In Anmerkung 2 wurde gezeigt, daß (α) aus Definition 1 (1) folgt. Bei Voraussetzung der ersten Zerlegbarkeitsbedingung erhält man mit $c = ux$, $a = v_1$, $b = v_2$ aus (α) die Aussage (1) von Definition 1. Ist die zweite Zerlegbarkeitsbedingung erfüllt, so bestimme man w_1, w_2 durch $uw_i = v_i$, $i = 1, 2$. Wie in Anmerkung 2 erwähnt, folgen aus Definition 1 (2) die Monotoniegesetze der Multiplikation. Daher gilt $w_1 < w_2$ für $v_1 < v_2$, $u > 0$ und $w_1 > w_2$ für $v_1 < v_2$, $u < 0$. Da $T(u, x, v_i) = T(u, x, uw_i) = u(x + w_i)$ $(i = 1, 2)$ ist, erhält man somit wegen (α) und des rechtsseitigen Monotoniegesetzes der Multiplikation wieder Definition 1 (1).

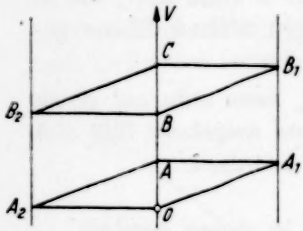


Fig. 12

Unter der *Bolschen V-Bedingung für O* im (U, V, W)-Gewebe versteht man den Schließungssatz:

Aus $A_2V = B_2V$, $OV = AV = BV = CV$, $A_1V = B_1V$; $OW = A_1W$, $BW = B_1W$, $B_2W = CW$, $A_2W = AW$; $AU = A_1U$, $CU = B_1U$, $A_2U = OU$ folgt $B_2U = BU$.

Diese Bedingung ist gleichwertig mit der Aussage (s. [4], S. 54):

(*) Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ gilt $x' + (x + y) = y$ für $x' + x = 0$[3b]).

SATZ 8. *Gilt in der affinen Ebene* $\mathfrak{E}_\omega$ *außer dem Desarguesschen* $(V, UV; U, OV)$*-Satz noch die Bolsche V-Bedingung für O im* (U, V, W)*-Gewebe, so ist Definition 1 gleichwertig mit* (α) *des Satzes 7 und der folgenden Bedingung*

(β) $ac + (-ad + e) < bc + (-bd + e)$ *für* $a < b$, $c > d$,

$ac + (-ad + e) > bc + (-bd + e)$ *für* $a < b$, $c < d$.

Beweis. Es sei $u_1x_s + v_1 = u_2x_s + v_2 = y_s$. Wegen (*) ist dann $-u_1x_s + (u_1x_s + v_1) = v_1 = -u_1x_s + y_s$ und entsprechend $-u_2x_s + y_s = v_2$. Hiermit wird Definition 1 (2) zu

(**) $u_1x + (-u_1x_s + y_s) < u_2x + (-u_2x_s + y_s)$ für $u_1 < u_2$, $x > x_s$,

$u_1x + (-u_1x_s + y_s) > u_2x + (-u_2x_s + y_s)$ für $u_1 < u_2$, $x < x_s$.

[3b]) Im Folgenden wird das durch $x' + x = 0$ bestimmte Element x' mit $-x$ bezeichnet und $(-x) + y = -x + y$, $y + (-x) = y - x$ gesetzt.

Mit $u_1 = a$, $u_2 = b$, $x = c$, $x_s = d$ [x_s kann in Definition 1 (2) beliebig vorgegeben werden] und $y_s = e$ ist (**) aber gerade die Bedingung (β). Also ist (β) mit Definition 1 (2) gleichwertig, und daher folgt unsere Behauptung nach Satz 7.

Wählt man $e = 0$, so folgt aus (β)

(β') $ac - ad < bc - bd$ für $a < b$, $c > d$,

$ac - ad > bc - bd$ für $a < b$, $c < d$.

Anmerkung 3. Ist $\mathfrak{K}$ eine Cartesische Gruppe, d.h. gilt der Desarguessche (V, UV)-Satz, so ist die Definition 1 gleichwertig mit (α) von Satz 7 und den folgenden Bedingungen[4])

(α') $a + c < b + c$ für $a < b$,

(γ) $ac - ad < bc - bd$ für $a < b$, $c > d$.

Beweis. Aus (β') von Satz 8 erkennt man, daß (γ) aus Definition 1 (2) folgt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß man auch (1) und (2) von Definition 1 aus (α), (α') und (γ) erhält. Nach (γ) ist $ad - ac < bd - bc$ für $a < b$, $d > c$. Wegen der Assoziativität der Addition folgt hieraus mit (α) und (α') $ad < bd - bc + ac$, $0 < bd - bc + ac - ad$, $-bd < -bc + ac - ad$ und schließlich $bc - bd < ac - ad$, d.h. $ac - ad > bc - bd$ für $a < b$, $c > d$. Also gilt bei Voraussetzung von (α), (α'), (γ) auch (β'), und auf Grund der Assoziativität der Addition ergibt sich hieraus (β). Nach Satz 8 folgen aus (α) und (β) die Bedingungen (1) und (2) von Definition 1.

Anmerkung 4[5]).

I) Ist $\mathfrak{K}$ ein Rechtsquasikörper, d.h. $\mathfrak{E}_\omega$ (UV, UV)-transitiv, so lassen sich die Bedingungen der Definition 1 durch (α) von Satz 7 und (α') $a + c < b + c$ für $a < b$, (δ') $ac < bc$ für $a < b$, $c > 0$; $ac > bc$ für $a < b$, $c < 0$ ersetzen.

II) Ist $\mathfrak{K}$ ein Linksquasikörper, d.h. $\mathfrak{E}_\omega$ (V, V)-transitiv, so sind die Bedingungen der Definition 1 gleichwertig mit (α) von Satz 7, (α') und (δ) $ca < cb$ für $a < b$, $c > 0$; $ca > cb$ für $a < b$, $c < 0$.

Beweis. Da ein Rechts- bzw. Linksquasikörper eine Cartesische Gruppe ist, folgen (α), (α'), (δ') und (δ) aus (1) und (2) von Definition 1. Wegen Anmerkung 3 ist also nur noch zu zeigen, daß (γ) im Falle I) aus (α), (α') und (δ') und im Falle II) aus (α), (α') und (δ) folgt. Bei Voraussetzung der Rechtsdistributivität ist $ac - ad = a(c - d)$, $bc - bd = b(c - d)$, nach (α') ist $c - d > 0$ für $c > d$ und nach (δ') somit $ac - ad < bc - bd$ für $a < b$, $c > d$. Ist in $\mathfrak{K}$ das linksdistributive Gesetz erfüllt, so ist wegen (α) und (δ) $(-b + a)c < (-b + a)d$ für $a < b$, $c > d$, d.h. $-bc + ac < -bd + ad$. Auf Grund der Assoziativität der Addition folgt hieraus nach (α) und (α') $ac = bc - bd + ac < bc - bd + ad$, $ac - ad < bc - bd + ad - ad = bc - bd$, d.h. ebenfalls ($\gamma$).

[4]) Siehe auch [4], S. 236, Satz 14 und 15.

[5]) Siehe auch [4], S. 237.

§ 8. Vollständige Ternärkörper

DEFINITION 2. Ein *Ternärkörper* $\mathfrak{R}$ heißt bezüglich der in ihm erklärten Anordnung *vollständig*[6]), wenn eine nach oben beschränkte nichtleere Menge stets auch eine obere Grenze hat. Eine linear angeordnete *Punktreihe* wird *vollständig* genannt, wenn jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge dieser Punktreihe eine obere Grenze hat.

Eine angeordnete *affine Ebene* heißt *vollständig*, wenn es in ihr eine vollständige angeordnete Punktreihe gibt.

ANMERKUNG. In einem vollständigen angeordneten Ternärkörper hat auch jede nach unten beschränkte nichtleere Menge eine untere Grenze. Zum Beweise betrachte man die durch $a^\varphi + a = 0$ erklärte Abbildung φ. Diese, wie auch die zu φ inverse Abbildung φ^{-1}, kehrt die Anordnung um; denn gäbe es zwei Elemente b, c, für die zugleich $b < c$ und $-b < -c$ gälte, so wäre nach den Monotoniegesetzen der Addition $-b + b = 0 < -c + b < -c + c = 0$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Durch φ kann man also jede nach unten beschränkte nichtleere Menge $\mathfrak{U}$ auf eine nach oben beschränkte nichtleere Menge $\mathfrak{U}^\varphi = \{u^\varphi; u \in \mathfrak{U}\}$ abbilden. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ existiert die obere Grenze g von $\mathfrak{U}^\varphi$. Dann ist $g^{\varphi^{-1}}$ die untere Grenze von $\mathfrak{U}$, denn wegen $u^\varphi \leqq g$ für alle $u^\varphi \in \mathfrak{U}^\varphi$ gilt einmal $u \geqq g^{\varphi^{-1}}$ für alle $u \in \mathfrak{U}$, und $g^{\varphi^{-1}}$ ist somit eine untere Schranke von $\mathfrak{U}$; gäbe es nun ein x mit $u \geqq x > g^{\varphi^{-1}}$ für alle $u \in \mathfrak{U}$, so wäre $u^\varphi \leqq x^\varphi < g$ für alle $u^\varphi \in \mathfrak{U}^\varphi$ und g folglich nicht die obere Grenze von $\mathfrak{U}^\varphi$; es kann also kein solches x geben, und $g^{\varphi^{-1}}$ ist daher die untere Grenze von $\mathfrak{U}$.

SATZ 9. *Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ sei bezüglich seiner Anordnung vollständig. Dann folgt die Bedingung* (2) *von Definition 1 aus Definition 1* (1) *und den folgenden beiden Bedingungen.*

$$\begin{aligned}
&(2a) \quad T(u, x_1, v) < T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2,\ u > 0,\\
&\qquad T(u, x_1, v) > T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2,\ u < 0,\\
&(2b) \quad T(u_1, x, v) < T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2,\ x > 0,\\
&\qquad T(u_1, x, v) > T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2,\ x < 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Ist $u_1 = 0 < u_2$, so folgt nach (2a) wegen $T(u_1, x, v) = T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$, daß $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ für $x > x_s$ und $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ für $x < x_s$ ist. Für $u_2 = 0$ erhält man wegen $T(u_2, x, v_2) = T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ ebenfalls Definition 1 (2). Im Falle $u_1 < 0 < u_2$ ist nach (2a) $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) < T(u_2, x, v_2)$ für $x > x_s$ und $T(u_1, x, v_1) > T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) > T(u_2, x, v_2)$ für $x < x_s$, d.h. es gilt auch hier die Bedingung (2).

Man kann daher für den weiteren Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $0 < u_1 < u_2$ oder $u_1 < u_2 < 0$ sei. Der Nachweis der Gültigkeit von Definition 1 (2) in diesen beiden Fällen verläuft folgendermaßen:

[6]) Die Bezeichnung ist der Verbandstheorie (nicht der Topologie) entnommen und müßte eigentlich „bedingt vollständig" heißen.

Im Teil I) wird bewiesen[6a]), daß $v_1 < v_2$ für $0 > x_s$ und $v_1 > v_2$ für $0 < x_s$ ist. In II) wird aus der Existenz von $a,\ a' \in \mathfrak{R}$ mit $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ auf Grund der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ die Existenz eines $\bar{a} \in \mathfrak{R}$ mit $T(u_1, \bar{a}, v_1) = T(u_2, \bar{a}, v_2)$ und $a\,\bar{a}\,a'$ gefolgert. Da es zu $u_1 \neq u_2$ aber genau ein x_s mit $T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$ gibt, muß daher für alle $x > x_s$ stets $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ oder stets $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und für alle $x < x_s$ stets $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ oder stets $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ sein. In III) schließlich wird die Unmöglichkeit von $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ für alle $x \neq x_s$ bzw. $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ für alle $x \neq x_s$ nachgewiesen. Aus II) und III) folgt, daß entweder

$$(*) \qquad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) & \text{für } x > x_s \\ T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) & \text{für } x < x_s \end{cases}$$

oder

$$(**) \qquad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) & \text{für } x > x_s \\ T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) & \text{für } x < x_s \end{cases}$$

sein muß.

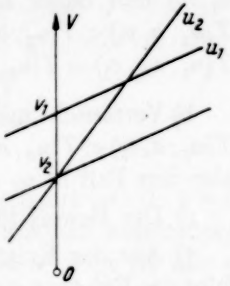


Fig. 13

Wegen I) und $T(u_i, 0, v_i) = v_i$ ist aber der Fall (**) unmöglich, d.h. es gilt (*) und somit die Bedingung (2) von Definition 1.

I) Man ziehe durch v_2 die Parallele zu der durch $y = T(u_1, x, v_1)$ bestimmten Geraden. Wegen (2b) ist $T(u_1, x_s, v_2) < T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ für $x_s > 0$ und $T(u_1, x_s, v_2) > T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ für $x_s < 0$. Nach Definition 1 (1) erhält man hieraus $v_2 < v_1$ für $x_s > 0$ und $v_2 > v_1$ für $x_s < 0$.

II) Es sei $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$ und $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

a) $0 < u_1, u_2, \quad a < a'$,

b) $0 < u_1, u_2, \quad a' < a$,

c) $u_1, u_2 < 0, \quad a < a'$,

d) $u_1, u_2 < 0, \quad a' < a$.

a) 1) Aus der Existenz eines x mit

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2), \qquad a \leqq x; \\ \text{zu } x \text{ gibt es kein } \bar{x} \text{ mit } a < \bar{x} < x \text{ und} \\ T(u_1, \bar{x}, v_1) \geqq T(u_2, \bar{x}, v_2) \end{cases}$$

folgt die Existenz eines x^* mit $x < x^*$ und der Eigenschaft (α): Man bestimme x^* durch $T(u_1, x^*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$. Wegen $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x^*, v_1)$, $u_1 > 0$ ist dann nach (2a) $x < x^*$ und daher $T(u_2, x, v_2) < T(u_2, x^*, v_2)$, also $T(u_1, x^*, v_1) < T(u_2, x^*, v_2)$. Angenommen, es existierte zu x^* ein $\bar{x}$ mit

[6a]) Und zwar ohne die vorausgesetzte Vollständigkeit zu verwenden.

$a<\bar{x}<x^*$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geqq T(u_2, \bar{x}, v_2)$. Da es zu x kein solches Element $\bar{x}$ gibt, muß $x<\bar{x}<x^*$ sein. Dann ist aber $T(u_1, x^*, v_1) > T(u_1, \bar{x}, v_1) \geqq T(u_2, \bar{x}, v_2) > T(u_2, x, v_2)$, was wegen $T(u_1, x^*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$ ein Widerspruch ist.

2) Aus der Existenz eines x mit

$$(\beta) \qquad T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2), \qquad a' \geqq x > a$$

folgt die Existenz eines x_* mit $x > x_*$ und der Eigenschaft (β): Man bestimme x_* durch $T(u_1, x_*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$. Dann ist $T(u_1, x_*, v_1) < T(u_1, x, v_1)$, $u_1 > 0$ und daher nach (2a) $x_* < x$. Wäre $x_* \leqq a$, so wäre $T(u_1, x_*, v_1) \leqq T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2) < T(u_2, x, v_2)$, was offenbar ein Widerspruch zu $T(u_1, x_*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$ ist.

b) Vertauscht man die Indizes 1 und 2 und a mit a', so erhält man $0 < u_1, u_2$, $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ und $a < a'$; man kann also den Fall b) so auf den Fall a) zurückführen.

c) Der Beweis für c) verläuft ganz entsprechend wie der für a).

1) Aus der Existenz eines x mit der in a 1) angegebenen Eigenschaft (α) folgt die Existenz eines x^* mit $x < x^*$ und der Eigenschaft (α): Man bestimme x^* durch $T(u_2, x^*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$. Wegen $T(u_2, x^*, v_2) < T(u_2, x, v_2)$, $u_2 < 0$ ist dann nach (2a) $x < x^*$ und daher $T(u_1, x^*, v_1) < T(u_2, x^*, v_2)$. Gäbe es zu x^* ein $\bar{x}$ mit $a < \bar{x} < x^*$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geqq T(u_2, \bar{x}, v_2)$, so müßte $x < \bar{x} < x^*$ sein und somit wäre $T(u_2, x^*, v_2) < T(u_2, \bar{x}, v_2) \leqq T(u_1, \bar{x}, v_1) < T(u_1, x, v_1)$, was der Bedingung $T(u_2, x^*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$ widerspräche.

2) Ist x ein Element mit der Eigenschaft (β), so bestimme man x_* durch $T(u_2, x_*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$. Wegen $T(u_2, x_*, v_2) > T(u_2, x, v_2)$, $u_2 < 0$ ist $x_* < x$, und da aus $x_* \leqq a$ aber die falsche Aussage $T(u_1, x, v_1) = T(u_2, x_*, v_2) \geqq T(u_2, a, v_2) > T(u_1, x, v_1)$ folgen würde, muß $x_* > a$ sein; also gilt $x > x_* > a$.

d) Durch Vertauschen der Indizes 1, 2 und der Elemente a, a' erhält man $u_1, u_2 < 0$, $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ mit $a < a'$; hat also diesen Fall auf den Fall c) zurückgeführt.

Es sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller x mit den folgenden Eigenschaften:

$$T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2), \qquad a \leqq x;$$

zu x existiert kein $\bar{x}$ mit $a < \bar{x} < x$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geqq T(u_2, \bar{x}, v_2)$.

Wegen $a \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X}$ nicht leer. Es ist a' eine obere Schranke der Menge $\mathfrak{X}$, wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ existiert daher die obere Grenze $\bar{a}$ von $\mathfrak{X}$. Es gilt $a \leqq \bar{a} < a'$. Angenommen, es wäre $T(u_1, \bar{a}, v_1) \neq T(u_2, \bar{a}, v_2)$. Dann wäre $T(u_1, \bar{a}, v_1) < T(u_2, \bar{a}, v_2)$ oder $T(u_1, \bar{a}, v_1) > T(u_2, \bar{a}, v_2)$. Im ersten Fall gäbe es nach 1) ein $\bar{a}^*$ mit $\bar{a} < \bar{a}^*$ und der Eigenschaft (α), d.h. es wäre $\bar{a}^* \in \mathfrak{X}$ und $\bar{a}^* > \bar{a}$ im Widerspruch dazu, daß $\bar{a}$ die obere Grenze von $\mathfrak{X}$ ist. Im zweiten Fall gäbe es nach 2) ein $\bar{a}_*$ mit der Eigenschaft (β) und $\bar{a} > \bar{a}_* > a$, weshalb $\bar{a}$ wiederum nicht die obere Grenze von $\mathfrak{X}$ sein könnte. Also gilt $T(u_1, \bar{a}, v_1) = T(u_2, \bar{a}, v_2)$.

II) Angenommen, für alle x sei $T(u_1, x, v_1) \geqq T(u_2, x, v_2)$ [für den Fall, daß $T(u_1, x, v_1) \leqq T(u_2, x, v_2)$ für alle x gilt, verläuft der Beweis entsprechend]. Dann ist auch $T(u_1, 0, v_1) \geqq T(u_2, 0, v_2)$, d.h. $v_1 \geqq v_2$. Nach (2a) ist $\bar{v} = T(1, 1, v_1) > T(1, 0, v_1) = v_1$; man ziehe durch $\bar{v}$ die Parallele zu der durch $y = T(u_1, x, v_1)$ bestimmten Geraden. Nach Definition 1 (1) ist dann $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x, \bar{v})$, und wegen unserer obigen Annahme folgt hieraus $T(u_2, x, v_2) < T(u_1, x, \bar{v})$ für alle x, was wegen $u_1 \neq u_2$ ein Widerspruch ist.

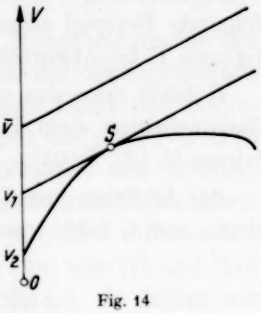


Fig. 14

Man könnte auf die Vermutung kommen, daß vielleicht jeder angeordnete Ternärkörper $\mathfrak{R}$ sich bei Erhaltung seiner Anordnung in einen vollständigen Ternärkörper einbetten lasse. Aus der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ folgt aber, daß $\mathfrak{R}$ archimedisch angeordnet ist. Beweis: Es ist zu zeigen, daß es zu Elementen a, b, a', b' mit $b' < a' < 0 < a < b$ stets natürliche Zahlen n, n' mit $n' \cdot a' < b'$, $b < n \cdot a$ gibt, wobei $n \cdot a$ folgendermaßen definiert ist: $0 \cdot a = 0$, $(n+1) \cdot a = a + n \cdot a$[7]). Angenommen, $\mathfrak{R}$ sei nichtarchimedisch angeordnet. Dann gäbe es also zwei Elemente a, b mit $0 < a < b$ und $n \cdot a < b$ für alle n. Das Element b ist eine obere Schranke der Menge $\{n \cdot a;\ n = 0, 1, \ldots\}$, und daher existiert deren obere Grenze $\bar{a}$. Es ist also $n \cdot a \leqq \bar{a}$ für jedes n und wegen der Monotonie der Addition auch $a + n \cdot a \leqq a + \bar{a}$ für jedes n; d.h. $a + \bar{a}$ ist eine obere Schranke der Menge $\{a + n \cdot a;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Sei c irgendeine obere Schranke von $\{a + n \cdot a;\ n = 0, 1, \ldots\}$. Man bestimme c' durch $c = a + c'$; dann ist $a + n \cdot a \leqq a + c'$ für jedes n und wegen der Monotonie der Addition somit auch $n \cdot a \leqq c'$ für jedes n, also $\bar{a} \leqq c'$ und daher auch $a + \bar{a} \leqq a + c' = c$; folglich ist $\bar{a}' = a + \bar{a}$ die obere Grenze von $\{a + n \cdot a;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Wegen $a + n \cdot a = (n+1) \cdot a$ hat diese Menge aber die obere Grenze $\bar{a}$, und es wäre somit $\bar{a} = a + \bar{a}$, also $a = 0$, was ein Widerspruch zu $a > 0$ ist. Genauso beweist man, daß die Annahme, es gäbe zwei Elemente a', b' mit $b' < a' < 0$ und $n' \cdot a' < b'$ für alle n', zu einem Widerspruch führt.

Läßt sich ein Ternärkörper $\mathfrak{R}$ bei Erhaltung seiner Anordnung in einen vollständigen Ternärkörper $\mathfrak{R}'$ einbetten, so ist $\mathfrak{R}'$ archimedisch angeordnet und daher auch $\mathfrak{R}$. Es können also nur archimedisch angeordnete Ternärkörper in vollständige eingebettet werden.

Der Hilbertsche Potenzreihenkörper[8]) in einer Unbestimmten t über dem rationalen Zahlkörper ist ein nichtarchimedisch angeordneter Ternärkörper; er ist also ein Beweis dafür, daß es durchaus angeordnete Ternärkörper gibt, die sich nicht in vollständige Ternärkörper bei Erhaltung ihrer Anordnung einbetten lassen.

Wir haben gesehen, daß sich in vollständigen wie auch in Quasikörpern die Bedingung (2) der Definition 1 aus den Anordnungsgesetzen (1), (2a) und

[7]) Wie man sofort erkennt, bleibt der folgende Beweis auch gültig, wenn man statt dessen $(n+1) \cdot a = n \cdot a + a$ setzt.

[8]) Siehe [1], S. 107.

(2b) herleiten läßt. Der eben angeführte Hilbertsche Potenzreihenkörper ist ein angeordneter Ternärkörper, in dem die Bedingung (2) nicht auf Grund der Vollständigkeit aus (1), (2a) und (2b) folgt, aber dieser Ternärkörper ist ein Quasikörper. Daher liegt die Frage nahe, ob es einen angeordneten Ternärkörper gibt, der weder ein Quasikörper noch vollständig ist. Das folgende Beispiel einer nichtarchimedisch angeordneten echten Cartesischen Gruppe C beantwortet diese Frage bejahend.

C bilde man aus einem nichtarchimedisch angeordneten Schiefkörper K (beispielsweise dem Hilbertschen Potenzreihenkörper) durch folgendes Verfahren (s. [4], S. 93):

Als Addition von C nehme man die Addition von K; die neue Multiplikation $\circ$ von C bilde man folgendermaßen aus der alten Multiplikation $\cdot$ von K:

$$a \circ b = \begin{cases} ab & \text{für } a \geqq 0 \quad \text{oder} \quad b \geqq 0, \\ akb & \text{für } a, b < 0, \end{cases}$$

wobei k ein positives, von 1 verschiedenes Element aus K ist. Daß die so erhaltene algebraische Struktur C eine echte Cartesische Gruppe ist, ist in [4], S. 93–94, bewiesen.

Die Anordnung in C sei genauso wie die Anordnung in K erklärt. Da die Addition von C mit der Addition von K übereinstimmt, und K ein angeordneter Schiefkörper ist, gelten auch in C die Monotoniegesetze der Addition. Somit ist nur noch die Gültigkeit von

$$(*) \quad a \circ c - a \circ d < b \circ c - b \circ d \quad \text{für } a < b,\ c > d$$

nachzuweisen. Wir zeigen hierzu, daß die Abbildung $x \to x \circ c - x \circ d$ für $c > d$ monoton wachsend ist; denn dann folgt aus $a < b$, daß $a \circ c - a \circ d < b \circ c - b \circ d$ ist, also gerade unsere Ungleichung (*). Im Falle $c > d$ gilt

$$x \circ c - x \circ d = \begin{cases} x(c-d) & \text{für } d \geqq 0 \\ x(c-kd) & \text{für } x < 0,\ c \geqq 0,\ d < 0 \\ xk(c-d) & \text{für } x < 0,\ c < 0,\ d < 0 \\ x(c-d) & \text{für } x \geqq 0 \end{cases},$$

und daher ist die Abbildung $x \to x \circ c - x \circ d$ für $c > d$ tatsächlich monoton wachsend. Nach Anmerkung 3 von § 7 ist C also eine angeordnete Cartesische Gruppe, und ihre Anordnung ist nichtarchimedisch, weil K nichtarchimedisch angeordnet ist.

§ 9. Ternärkörper, in denen gewisse Monotoniegesetze nicht erfüllt sind

Es interessiert nun die Frage, wieweit die einzelnen Monotoniegesetze voneinander unabhängig sind; d.h. gibt es Ternärkörper, in denen eine lineare Anordnung erklärt ist, für die gewisse Monotoniegesetze erfüllt, andere jedoch verletzt sind?

Daß Definition 1 (1) von Definition 1 (2) unabhängig ist, leuchtet unmittelbar ein; denn man braucht ja nur von einem Körper K mit der Anordnung $<$ auszugehen und in diesem eine neue Anordnung $\dot{<}$ durch die folgende Vorschrift einzuführen:

$$a \dot{<} b \text{ genau dann, wenn } a > b.$$

Dann gelten natürlich auch für die Anordnung $\dot{<}$ die Monotoniegesetze der Addition, wegen $0 \dot{>} 1$ aber nicht die Monotoniegesetze der Multiplikation; d.h. die Bedingung (1) von Definition 1 ist erfüllt, aber nicht die Bedingung (2). Bei einem Quasikörper folgt aus der Gültigkeit des additiven und des einen multiplikativen Monotoniegesetzes die Gültigkeit des anderen multiplikativen Monotoniegesetzes. Das folgende Beispiel einer Cartesischen Gruppe M, in der die Bedingungen (1) und (2b) gelten, (2a) aber nicht erfüllt ist, beweist, daß bei einem Ternärkörper die Bedingung (2a) von (1) und (2b) [bzw. (2b) von (1) und (2a)] im allgemeinen unabhängig ist. M bilden wir wieder durch Abänderung der Multiplikation aus dem Hilbertschen Potenzreihenkörper K in einer Unbestimmten t über dem rationalen Zahlkörper. Die Elemente von K seien in der Form $a = a_\alpha t^\alpha + a_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \cdots$ (α = kleinster Exponent, $a_\alpha \neq 0$) geschrieben.

w_0 sei eine p-adische Bewertung des rationalen Zahlkörpers. Dann ist die durch $\begin{cases} w(a) = w_0(a_\alpha) & \text{für } a \neq 0 \\ w(0) = \infty \end{cases}$ definierte Funktion w eine Bewertung des Hilbertschen Potenzreihenkörpers; denn es ist

$$w(ab) = w\big((a_\alpha t^\alpha + \cdots)(b_\beta t^\beta + \cdots)\big) = w(a_\alpha b_\beta t^{\alpha+\beta} + \cdots) = w_0(a_\alpha b_\beta)$$
$$= w_0(a_\alpha) + w_0(b_\beta) = w(a) + w(b) \quad \text{und} \quad w(a+b) \geqq \operatorname{Min}\big(w(a), w(b)\big).$$

Durch $\begin{cases} v(a) = \alpha & \text{für } a \neq 0 \\ v(0) = \infty \end{cases}$ wird eine weitere Bewertung v für K erklärt. $\mathfrak{W}$ sei die Menge der von w angenommenen, von 0 und ∞ verschiedenen Funktionswerte, $\mathfrak{V}$ die Menge der von v angenommenen, von 0 und ∞ verschiedenen Funktionswerte und k ein Element aus K mit $w(k) = v(k) = 0$, $k > 0$, $k \neq 1$. Als Elemente von M wählen wir die Elemente von K; die neuen Verknüpfungen $+$ und $\circ$ von M gewinnen wir folgendermaßen aus den alten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von K:

$$a \dot{+} b = a + b, \quad a \circ b = \begin{cases} akb & \text{für } v(a) \in \mathfrak{V} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{W}, \\ ab & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{W}. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $0 \circ a = 0a = 0 = a0 = a \circ 0$ und $1 \circ a = 1a = a = a1 = a \circ 1$ für alle a. Um zu zeigen, daß M eine Cartesische Gruppe ist, sind also nur noch die beiden folgenden Eigenschaften nachzuweisen:

(1) Zu Elementen $a, b, c \in M$ mit $a \neq b$ existiert genau ein $x \in M$ mit $x \circ a - x \circ b = c$.

(2) Zu Elementen $a, b, c \in M$ mit $a \neq b$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $-a \circ y + b \circ y = c$.

Beweis von (1): Wir setzen $x \circ a \leftarrow x \circ b = xq_1a - xq_2b$, wobei

$$q_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(x) \in \mathfrak{V} \text{ und } w(a) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(x) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(a) \notin \mathfrak{W} \end{cases},$$

$$q_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(x) \in \mathfrak{V} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(x) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{W} \end{cases}$$

ist. Wir beweisen für die gesuchte Lösung x zunächst die folgende Gleichung:

$$v(x) + v(a - b) = v(c).$$

Im Falle $w(a) = w(b)$ ist $q_1 = q_2$ und daher $v(x) + v(a - b) = v(c)$.

Ist $w(a) \neq w(b)$, so auch $w(q_1a) \neq w(q_2b)$ und somit $|a_\alpha| \neq |b_\beta|$, $|q_1a_\alpha| \neq |q_2b_\beta|$. Es ist also $a_\alpha - b_\beta \neq 0$ und $q_1a_\alpha - q_2b_\beta \neq 0$. Daher ist für $\alpha = \beta$ $v(a - b) = \text{Min}\,(v(a), v(b))$, $v(q_1a - q_2b) = \text{Min}\,(v(q_1a), v(q_2b)) = \text{Min}\,(v(a), v(b))$, also $v(x) + v(a - b) = v(c)$. Für $\alpha \neq \beta$ ist $v(q_1a) \neq v(q_2b)$ und deshalb ist auch in diesem Fall $v(q_1a - q_2b) = v(a - b) = \text{Min}\,(v(a), v(b))$ und somit $v(x) + v(a - b) = v(c)$. Es gilt also stets $v(x) = v(c) - v(a - b)$. Daher ist $v(x)$, folglich auch q_1, q_2 und damit x eindeutig bestimmt.

Beweis von (2): Entsprechend dem Beweis von (1) setzen wir $-a \circ y + b \circ y = -ah_1y + bh_2y$, wobei

$$h_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(a) \in \mathfrak{V}, \quad w(y) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(y) \notin \mathfrak{W} \end{cases},$$

$$h_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(b) \in \mathfrak{V}, \quad w(y) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(b) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(y) \notin \mathfrak{W} \end{cases}$$

ist, und zeigen, daß die gesuchte Lösung y der folgenden Gleichung genügen muß:

$$w(-a + b) + w(y) = w(c).$$

Im Falle $v(a) = v(b)$ ist $h_1 = h_2$ und daher $w(-a + b) + w(y) = w(c)$. Im Falle $v(a) \neq v(b)$ ist $\alpha \neq \beta$, und man erhält deshalb

$$w(-a + b) = \begin{cases} w(a) & \text{für } \alpha < \beta \\ w(b) & \text{für } \beta < \alpha \end{cases},$$

$$w(-h_1a + h_2b) = \begin{cases} w(a) & \text{für } \alpha < \beta \\ w(b) & \text{für } \beta < \alpha \end{cases},$$

also wieder $w(-a + b) + w(y) = w(c)$. Nach dieser Gleichung ist $w(y)$ und somit auch y eindeutig bestimmt. M ist also eine Cartesische Gruppe.

Die Anordnung in M sei genauso wie die Anordnung in K erklärt. Da die Addition in M mit der Addition in K übereinstimmt, ist Definition 1 (1) erfüllt. Es soll nun die Gültigkeit des linksseitigen Monotoniegesetzes der Multiplikation, also die Bedingung (2b) für eine Cartesische Gruppe, nachgewiesen werden: Sei $a < b$, $a \circ c = am_1c$ mit

$$m_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(a) \in \mathfrak{V} \text{ und } w(c) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(c) \notin \mathfrak{W} \end{cases}$$

und $b \circ c = bm_2c$ mit

$$m_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(b) \in \mathfrak{V} \text{ und } w(c) \in \mathfrak{W} \\ 1 & \text{für } v(b) \notin \mathfrak{V} \text{ oder } w(c) \notin \mathfrak{W}. \end{cases}$$

Da in K die Bedingung (2b) erfüllt ist, genügt es, die Beziehung

(*) $\operatorname{sgn}(a-b) = \operatorname{sgn}(am_1 - bm_2)$ herzuleiten.

Für $m_1 = m_2$ erhält man (*) wegen $m_1 > 0$. Ist $m_1 \neq m_2$, so ist $w(c) \in \mathfrak{W}$, $v(a) \neq v(b)$, d.h. $\alpha \neq \beta$; daher ist

$$\operatorname{sgn}(a-b) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a & \text{für } \alpha < \beta \\ b & \text{für } \beta < \alpha \end{cases}$$

und

$$\operatorname{sgn}(am_1 - bm_2) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a & \text{für } \alpha < \beta \\ \operatorname{sgn} b & \text{für } \beta < \alpha \end{cases};$$

also gilt auch in diesem Falle (*).

Um zu erkennen, daß das rechtsseitige Monotoniegesetz der Multiplikation dagegen im allgemeinen nicht erfüllt ist, wähle man z.B. $0 < k < 1$, $a = a_\alpha < b_\beta = b$, $w(a_\alpha) \notin \mathfrak{W}$, $w(b_\beta) \in \mathfrak{W}$, $kb < a < b$ und ein c mit $v(c) \in \mathfrak{V}$. Dann ist aber $c \circ a = ca > ckb = c \circ b$ für $a < b$, $c > 0$ und $c \circ a = ca < ckb = c \circ b$ für $a < b$, $c < 0$. M ist also eine Cartesische Gruppe, in der die Monotoniegesetze (1) und (2b) gelten, (2a) aber nicht erfüllt ist.

§ 10. Über den Zusammenhang zwischen angeordneten affinen Ebenen und affinen Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist

Der Begriff der Ordnungsfunktion ist von E. SPERNER eingeführt worden[9]). Er bezeichnet als *Ordnungsfunktion* einer affinen Ebene eine Abbildung o aller Paare (ξ, X) mit $X \notin \xi$ in die Menge der ganzen Zahlen $\{1, -1\}$.

Einer jeden Ordnungsfunktion o kann man eine *Quasizwischenbeziehung* ϱ durch die folgende Vorschrift zuordnen:

(A) $\varrho(X, \xi, Y)$ genau dann, wenn $(\xi, X)^o (\xi, Y)^o = -1$.

Die Quasizwischenbeziehung ϱ ist also eine ternäre Relation mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(B) $X, Y \notin \xi$, wenn $\varrho(X, \xi, Y)$.

(B′) Wenn $X_i \notin \xi$ $(i = 1, 2, 3)$, so gilt $\varrho(X_i, \xi, X_k)$ für keins oder für genau zwei der Paare (i, k) mit $i < k$.

Die Bedingung (B′) ist für nichtkollineare X_i gerade das Axiom von PASCH. Es fragt sich nun, wann sich bei einer Quasizwischenbeziehung ϱ die Abhängigkeit von ξ allein durch den Schnittpunkt von ξ mit der Verbindungs-

[9]) Siehe [5].

geraden des ersten und dritten Argumentes ausdrückt. Hierzu muß offenbar die folgende Bedingung erfüllt sein:

(C) $(\xi, X)^o (\xi, Y)^o (\eta, X)^o (\eta, Y)^o = 1$, falls $X, Y \notin \xi, \eta$ sowie $XY \cap \xi = XY \cap \eta$.

(C) heißt die *Geradenrelation* einer Ordnungsfunktion o. In [5] ist bewiesen, daß die Geradenrelation für eine Ordnungsfunktion o notwendig und hinreichend dafür ist, daß die durch sie bestimmte Quasizwischenbeziehung ϱ (mittleres Argument Gerade, die beiden äußeren Argumente Punkte) durch

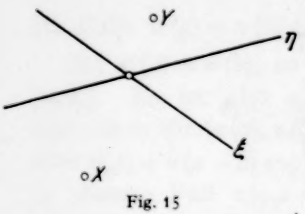


Fig. 15

(D) $\varrho^*(X, Z, Y)$ gleichbedeutend mit $\varrho(X, \xi, Y)$, falls $XZ = YZ$, $X, Y \notin \xi$, $Z \in \xi$, und $XZ = YZ$, falls $\varrho^*(X, Z, Y)$

eine *ternäre Relation* ϱ^* in der Menge der Punkte liefert.

Wegen (B) und (B') erfüllt die durch (D) ϱ zugeordnete ternäre Relation ϱ^* die beiden folgenden Bedingungen:

(E) $X, Y \neq Z$, wenn $\varrho^*(X, Z, Y)$.

(E') Wenn $X_i \neq Z$ $(i = 1, 2, 3)$, so gilt $\varrho^*(X_i, Z, X_k)$ für keins oder für genau zwei der Paare (i, k) mit $i < k$.

Eine jede in einer affinen Ebene mit (B) und (B') erklärte Quasizwischenbeziehung ϱ kann man, wie in [5], S. 110, bewiesen ist, durch eine solche Ordnungsfunktion o beschreiben, daß o dann in der in (A) angegebenen Weise mit ϱ zusammenhängt. Man kann also in einer angeordneten affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ eine solche Ordnungsfunktion o' erklären, daß o' durch (D) und (A) gerade die für jede Punktreihe von $\mathfrak{E}_\omega$ definierte Zwischenrelation liefert.

Ist in einer Punktmenge eine Zwischenbeziehung erklärt, so liegt von drei voneinander verschiedenen Punkten genau einer zwischen den beiden anderen, d.h. aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$ folgt, daß genau eine der drei Relationen

(F_0) $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_1 A_3$, $A_2 A_3 A_1$

richtig ist. Aus (F_0) erhält man für o' die folgende Aussage:

Aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$, $A_1, A_2, A_3 \in \beta$, $A_i \in \alpha_i \neq \beta$ $(i = 1, 2, 3)$ folgt, daß genau einer der drei Werte

(F) $(\alpha_2, A_1)^{o'} (\alpha_2, A_3)^{o'}$, $(\alpha_1, A_2)^{o'} (\alpha_1, A_3)^{o'}$, $(\alpha_3, A_1)^{o'} (\alpha_3, A_2)^{o'}$

gleich -1 ist.

Allgemein bezeichnet man bei einer Ordnungsfunktion die Anzahl der Werte von (F), die gleich -1 sind, mit Z. Eine Ordnungsfunktion, bei der Z für alle möglichen linearen Tripel denselben Wert hat, heißt *einfach*.

Unter der *Parallelenbedingung* für eine Ordnungsfunktion o versteht man die folgende Aussage:

(G) $(\xi, X)^o = (\xi, Y)^o$, wenn $XY \| \xi$.

Die hier gebrachten Beweismethoden des Satzes 1 und der Sätze über monotones Fallen bzw. Wachsen für Ternärkörper angeordneter affiner Ebenen

lassen sich nicht auf Ternärkörper affiner Ebenen mit Ordnungsfunktionen übertragen, da hierbei die Voraussetzung $Z=1$ wesentlich benutzt wurde. Es gilt jedoch, daß die einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und Parallelenbedingung zugeordnete ternäre Relation gegenüber Parallelprojektionen invariant ist; hiermit lassen sich solche Monotoniegesetze in dem durch O, U, V, E bestimmten Ternärkörper einer affinen Ebene herleiten, daß in einer affinen Ebene genau dann eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und Parallelenbedingung erklärt ist, wenn in ihrem zugehörigen Ternärkörper durch (E) und (E') eine ternäre Relation definiert werden kann, welche diesen Monotoniegesetzen genügt (Satz 10 und 11).

Von F. Bachmann und W. Klingenberg ist der folgende Satz (H) bewiesen:

(H) Eine in jeder Punktreihe einer affinen Ebene erklärte ternäre Relation ϱ^* geht genau dann gemäß (D) aus einer Quasizwischenbeziehung ϱ mit

$$\varrho(X, \xi, Y) \quad \text{falsch, wenn } XY \| \xi$$

hervor, wenn sie bei Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum erhalten bleibt und die Eigenschaft besitzt:

(I) $X \neq Y \neq Z \neq X$, wenn $\varrho^*(X, Z, Y)$;

(I') im Falle $Z \neq X_i$ $(i=1, 2, 3)$ gilt $\varrho^*(X_i, Z, X_k)$ für keins oder für genau zwei der Paare (i, k) mit $i<k$.

Die Quasizwischenbeziehung ϱ ist dann durch ϱ^* eindeutig bestimmt. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir die Sätze 10 und 11 beweisen.

Satz 10. *In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei eine Ordnungsfunktion o mit Geradenrelation und Parallelenbedingung erklärt. Dann gelten in dem durch O, U, V, E bestimmten Ternärkörper $\mathfrak{K}$ bezüglich der durch o hervorgerufenen ternären Relation ϱ^* die drei folgenden Aussagen:*

(1) $\varrho^*\big(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3)\big)$ *genau dann, wenn* $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.

(2) *Existieren* $\bar{u}, \bar{v} \in \mathfrak{K}$ *mit* $T(u, x_i, v_i) = T(\bar{u}, x_i, \bar{v})$ $(i=1, 2, 3)$, *so gilt* $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ *genau dann, wenn* $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ *gilt.*

(3) $\varrho^*\big(T(u, x_1, v), T(u, x_2, v), T(u, x_3, v)\big)$ *genau dann, wenn* $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ *und* $u \neq 0$.

Beweis. Nach Satz (H) ist die durch (A) und (D) für die Punkte einer jeden der Punktreihen von $\mathfrak{E}_\omega$ gegebene ternäre Relation ϱ^* gegenüber Parallelprojektionen invariant. Auf Grund dieser Invarianz von ϱ^* bei affinen Perspektivitäten ergeben sich die Monotonieaussagen (1), (2) und (3).

Zu (1): Wir bezeichnen die durch $y = T(u, x, v_i)$ $(i=1, 2, 3)$ bestimmten Geraden mit α_i und die Gerade der Punkte mit Abszisse x mit β. Wegen $\alpha_i \nparallel OV, \beta$ existieren die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$ und die zu σ_1 inverse Parallelprojektion σ_1^{-1}. Es sei σ_2 die Parallel-

projektion von β auf OV mit dem Zentrum U und σ_2^{-1} die zu σ_2 inverse Parallelprojektion. Da die ternäre Relation ϱ^* gegenüber affinen Perspektivitäten invariant ist, folgt $\varrho^*(v_1^{\sigma_1\sigma_2}, v_2^{\sigma_1\sigma_2}, v_3^{\sigma_1\sigma_2})$, d.h. $\varrho^*\big(T(u,x,v_1), T(u,x,v_2), T(u,x,v_3)\big)$, aus $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ und ebenso $\varrho^*\big(T(u,x,v_1)^{\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}, T(u,x,v_2)^{\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}, T(u,x,v_3)^{\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}\big)$, d.h. $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$, aus $\varrho^*\big(T(u,x,v_1), T(u,x,v_2), T(u,x,v_3)\big)$.

Zu (2): Die durch $y = T(u, x_i, v_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ gegebenen Geraden nennen wir α_i, und die durch $y = T(\bar{u}, x, \bar{v})$ bestimmte Gerade bezeichnen wir mit β. Wegen $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ sind die v_i verschieden und daher ist $u \neq \bar{u}$, also $\alpha_i \nparallel \beta$. Folglich existieren die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$ und ihre Inverse σ_1^{-1}. Ferner gibt es die Parallelprojektion σ_2 von β

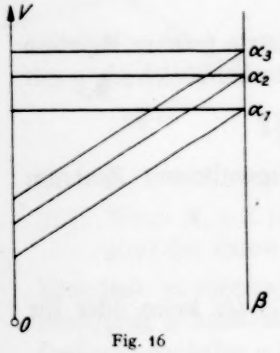


Fig. 16

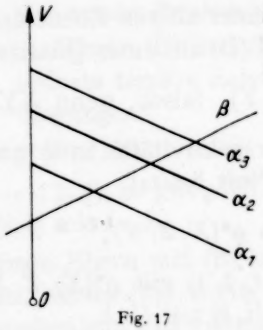


Fig. 17

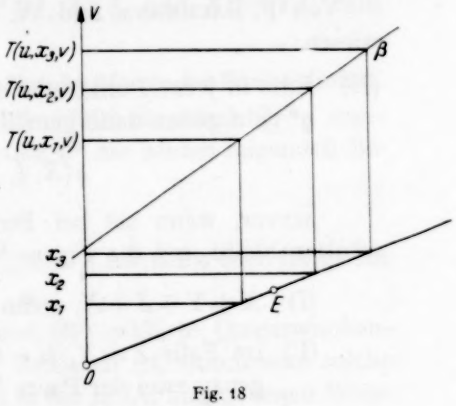


Fig. 18

auf OE mit dem Zentrum V, die Parallelprojektion σ_3 von OE auf OV mit dem Zentrum U und die zu diesen beiden inversen σ_2^{-1}, σ_3^{-1}.

Wegen der Invarianz von ϱ^* bei Parallelprojektionen erhält man aus $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ somit $\varrho^*(v_1^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, v_2^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, v_3^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3})$, also $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$, und aus $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ folgt $\varrho^*(x_1^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}, x_2^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}, x_3^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}})$, d.h. $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.

Zu (3): Die durch $y = T(u, x, v)$ bestimmte Gerade bezeichnen wir mit β. Es sei σ_1 die Parallelprojektion von OV auf OE mit dem Zentrum U, σ_2 die Parallelprojektion von OE auf β mit dem Zentrum V, ferner σ_3 die Parallelprojektion von β auf OV mit dem Zentrum U und σ_1^{-1}, σ_2^{-1}, σ_3^{-1} seien die Inversen zu diesen Parallelprojektionen. Wegen $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ und der Invarianz von ϱ^* bei Parallelprojektionen gilt somit $\varrho^*(x_1^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, x_2^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, x_3^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3})$, d.h. $\varrho^*\big(T(u, x_1, v), T(u, x_2, v), T(u, x_3, v)\big)$, und umgekehrt erhält man

$$\varrho^*\big(T(u,x_1,v)^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}},\ T(u,x_2,v)^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}},\ T(u,x_3,v)^{\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}\big),$$

also $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$, aus $\varrho^*\big(T(u, x_1, v), T(u; x_2, v), T(u, x_3, v)\big)$.

SATZ 11. *Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ enthalte mindestens drei verschiedene Elemente, und für seine Elemente sei eine ternäre Relation ϱ^* mit* (E) *und* (E′) *definiert, bezüglich der die ternäre Verknüpfung T die Monotoniegesetze* (1), (2), (3) *von Satz 10 erfüllt. Dann existiert in $\mathfrak{E}_\omega$ eine Ordnungsfunktion o mit Geradenrelation und Parallelenbedingung, die in $\mathfrak{R}$ gerade die ternäre Relation ϱ^* mittels* (A) *und* (D) *hervorruft.*

Beweis. Für jede der Punktreihen von $\mathfrak{E}_\omega$ erklären wir folgendermaßen eine ternäre Relation ϱ^*:

(α) $\varrho^*\big((a, y_1), (a, y_2), (a, y_3)\big)$ genau dann, wenn $\varrho^*(y_1, y_2, y_3)$.

(β) $\varrho^*\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$ mit $y_i = T(u, x_i, v)$ $(i = 1, 2, 3)$ genau dann, wenn $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$.

Der Nachweis, daß ϱ^* gegenüber Parallelprojektionen invariant ist, verläuft wie in Satz 5: Die Urbildgerade wird mit α, ihre Punkte werden mit $P_i = (x_i, y_i)$, die Bildgerade wird mit α' und der Bildpunkt von P_i auf α' mit $P_i' = (x_i', y_i')$ bezeichnet. Falls V das Zentrum der Parallelprojektion ist, kann weder α noch α' durch V gehen, und ϱ^* ist daher auf α wie auf α' durch (β) gegeben. Aus $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$ folgt somit $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ und hieraus $\varrho^*(P_1', P_3', P_2')$.

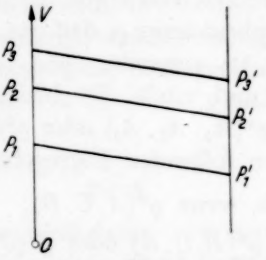


Fig. 19

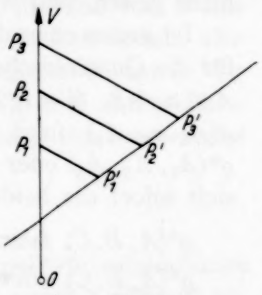


Fig. 20

Um die Invarianz von ϱ^* bei einer Parallelprojektion mit einem von V verschiedenen Zentrum nachzuweisen, genügt es, wie in Satz 5 bewiesen wurde, die Invarianz von ϱ^* bei einer Parallelprojektion von OV auf α' wie bei der zu dieser Parallelprojektion inversen zu zeigen.

Ist $V \in \alpha'$, so setze man $v_i = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und $u = \big((\lambda \cap EV) \cup U\big) \cap OV$, wobei λ die Parallele zu $P_i P_i'$ durch 0 sei. Dann gilt $\varrho^*\big(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3)\big)$, d.h. $\varrho^*(P_1', P_2', P_3')$, genau für $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.

Ist $V \notin \alpha'$, so setze man $\bar{u} = \big((\mu \cap EV) \cup U\big) \cap OV$, wobei μ die Parallele zu α' durch 0 sei, und $\bar{v} = \alpha' \cap OV$. Nach Satz 10(2) erhält man $\varrho^*(x_1', x_2', x_3')$ genau dann, wenn $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$, d.h. $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$, gilt. Aus $\varrho^*(x_1', x_2', x_3')$ folgt wegen (β) $\varrho^*(P_1', P_2', P_3')$, und umgekehrt folgt aus $\varrho^*(P_1', P_2', P_3')$ auch $\varrho^*(x_1', x_2', x_3')$. Somit gilt $\varrho^*(P_1', P_2', P_3')$ genau für $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$. Die durch (α) und (β) für eine jede Punktreihe von $\mathfrak{E}_\omega$ erklärte ternäre Relation ϱ^* bleibt also bei Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum erhalten und erfüllt wegen (E) und (E') auch die unter (H) angegebenen Bedingungen (I) und (I'), folglich geht sie nach diesem Satz aus einer Quasizwischenbeziehung ϱ hervor, welche die Eigenschaft hat:

(*) (X, ξ, Y) falsch, wenn $XY \| \xi$.

Nach (H) ist diese Quasizwischenbeziehung ϱ durch ϱ^* sogar eindeutig bestimmt. Wie auf S. 458 angegeben, kann man in $\mathfrak{E}_\omega$ eine solche Ordnungsfunktion o erklären, daß o die Quasizwischenbeziehung ϱ gerade mittels (A) liefert. Wegen der Eigenschaft (*) von ϱ und (A) ist $(\xi, X)^o (\xi, Y)^o = 1$ für $XY \| \xi$, d.h. o erfüllt die Parallelenbedingung.

In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei nun eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und $Z = 1$ erklärt. Dann ist also genau einer der drei Werte von (F) gleich

-1. Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall unsere ternäre Relation ϱ^* eine Zwischenbeziehung ist.

Zunächst leiten wir $\varrho^*(C, B, A)$ aus $\varrho^*(A, B, C)$ her, ohne dabei die Voraussetzung $Z = 1$ zu benutzen:

Wegen $\varrho^*(A, B, C)$ sind nach (E) $A, C \neq B$. Angenommen, es wäre $A = C$. Dann gälte mit $Z = B$, $X_1 = X_2 = X_3 = A$ aber $\varrho^*(X_1, Z, X_2)$, $\varrho^*(X_1, Z, X_3)$ und $\varrho^*(X_2, Z, X_3)$, und die Bedingung (E') wäre somit verletzt; es muß also $A \neq C$ sein. Ich betrachte nun die Punkte $Y_1 = C$, $Y_2 = A$, $Y_3 = C$, $Z = B$. Es ist $Z \neq Y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und nach Voraussetzung gilt $\varrho^*(Y_2, Z, Y_3)$. Nach (E') folgt daher $\varrho^*(Y_1, Z, Y_2)$ oder $\varrho^*(Y_1, Z, Y_3)$. Wegen $Y_1 = Y_3$ kann aber $\varrho^*(Y_1, Z, Y_3)$ nicht gelten, und wir erhalten deshalb $\varrho^*(Y_1, Z, Y_2)$, d.h. $\varrho^*(C, B, A)$.

Ist genau einer der drei Werte von (F) gleich -1, so besagt dies wegen (A) für die Quasizwischenbeziehung ϱ, daß aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$, $A_1, A_2, A_3 \in \beta$, $A_i \in \alpha_i \neq \beta$ $(i = 1, 2, 3)$ entweder $\varrho(A_1, \alpha_2, A_3)$ oder $\varrho(A_2, \alpha_1, A_3)$ oder $\varrho(A_1, \alpha_3, A_2)$ folgt, und nach (D) bedeutet dies für ϱ^*, daß entweder $\varrho^*(A_1, A_2, A_3)$ oder $\varrho^*(A_2, A_1, A_3)$ oder $\varrho^*(A_1, A_3, A_2)$ gilt. Hieraus ergeben sich sofort die beiden folgenden Eigenschaften für ϱ^*:

$\varrho^*(A, B, C)$ falsch, wenn $\varrho^*(A, C, B)$;

$\varrho^*(A, B, C)$ oder $\varrho^*(B, C, A)$ oder $\varrho^*(C, A, B)$, wenn $A \neq B \neq C \neq A$.

Gilt $\varrho^*(A, B, C)$ und $D \neq A, B, C$, so wegen (E') auch $\varrho^*(D, B, C)$ oder $\varrho^*(A, B, D)$. Im Falle $Z = 1$ besitzt ϱ^* also gerade die in [4], S. 222, angegebenen kennzeichnenden Eigenschaften einer Zwischenbeziehung.

Erfüllt die diese Zwischenbeziehung durch (A) und (D) bestimmende Ordnungsfunktion o' ferner die Parallelenbedingung (G) in $\mathfrak{E}_\omega$, so bleibt die durch o' in den Punktreihen von $\mathfrak{E}_\omega$ gegebene Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen invariant. Eine affine Ebene, in der eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z = 1$ erklärt ist, ist also eine angeordnete affine Ebene. Umgekehrt kann man in jeder angeordneten affinen Ebene eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z = 1$ erklären. Die angeordneten affinen Ebenen sind somit gerade die affinen Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z = 1$ erklärt ist.

Literatur

[1] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl. Stuttgart 1956. — [2] KARZEL, H.: Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien. Math. Z. **62**, 268–291 (1955). — [3] NAUMANN, H.: Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Math. Z. **60**, 120–141 (1954). — [4] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [5] SPERNER, E.: Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107–130 (1949).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 7. März 1958)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 463–465 (1958)

Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen

HELMUT HASSE zum 60. Geburtstag am 25. August 1958

Von

HELMUT WIELANDT

Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir bezeichnen mit $s\,\mathfrak{G}$ die Gesamtheit der subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ (das sind diejenigen, die sich von $\mathfrak{G}$ aus durch eine absteigende Normalkette endlicher Länge erreichen lassen, also die Normalteiler von $\mathfrak{G}$, die Normalteiler der Normalteiler von $\mathfrak{G}$, usw.). Wir bezeichnen mit $N\,\mathfrak{A}$ den Normalisator einer Untergruppe $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und erklären eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$, den *Normalisator der subnormalen Untergruppen*, durch

$$N_s\,\mathfrak{G} = \bigcap_{\mathfrak{A} \in s\,\mathfrak{G}} N\,\mathfrak{A}.$$

Die Größe dieser Gruppe ist ein Maß dafür, „wie normal" die subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ in ihrer Gesamtheit sind: Genau wenn $N_s\,\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ ist, fällt Subnormalität in $\mathfrak{G}$ mit Normalität zusammen. Wir stellen die Frage, wann $N_s\,\mathfrak{G}$ nicht trivial ist, d.h. nicht nur aus dem neutralen Element 1 besteht. Hierfür genügen, wie im folgenden gezeigt wird, überraschend schwache Voraussetzungen; z.B. ist für eine endliche Gruppe $\mathfrak{G} \neq 1$ auch stets $N_s\,\mathfrak{G} \neq 1$. Unser Hauptergebnis für beliebige Gruppen lautet:

(1) $N_s\,\mathfrak{G}$ *enthält*

(a) *jede einfache nichtabelsche subnormale Untergruppe von* $\mathfrak{G}$,

(b) *jeden minimalen Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, *dessen subnormale Untergruppen die Minimalbedingung erfüllen.*

Wir gewinnen diese Aussagen aus schärferen. Zunächst leiten wir (1a) aus dem folgenden, für endliche Gruppen schon bekannten[1]) Satz ab:

(2) *Sei* $\mathfrak{A} \in s\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E} \in s\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} = 1$, $\mathfrak{E}$ *einfach und nichtabelsch. Dann sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{E}$ *elementweise vertauschbar, d.h. es ist die Kommutatorgruppe* $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E} = 1$.

Daß hieraus (1a) folgt, ist leicht zu sehen: Ist $\mathfrak{A} \in s\,\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E} \in s\,\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} \in s\,\mathfrak{E}$ (loc. cit., Satz 2). Wenn nun also $\mathfrak{E}$ einfach ist, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ oder $= 1$. Im ersten Fall haben wir $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A} \leqq N\,\mathfrak{A}$; im zweiten Fall ist $\mathfrak{E} \leqq N\,\mathfrak{A}$ nach (2).

Dem Beweis von (2) schicken wir zwei auch sonst nützliche Bemerkungen voraus.

[1]) In einer endlichen Gruppe sind je zwei subnormale Untergruppen mit dem Durchschnitt 1, welche keine Primzahl als Kompositionsfaktor gemeinsam haben, elementweise vertauschbar. Diese Aussage und Verschärfungen davon finden sich als Satz 17–19 bei H. WIELANDT: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).

(3) *Sei* $\mathfrak{A} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{M}$ *eine Teilmenge von* $\mathfrak{G}$. *Wir bilden das Erzeugnis der Konjugierten von* $\mathfrak{A}$ *unter* $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}^M \qquad (\mathfrak{A}^M = M^{-1}\mathfrak{A}M).$$

Ist dann $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$, *so ist* $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A}$.

Beweis. Setzen wir $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, so wird $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} \cup \mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} \leqq \mathfrak{F}$. Also ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$; andererseits ist $\mathfrak{A} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{F}$. Beides verträgt sich nur dann, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ ist (woraus dann $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A}$ folgt). Dies ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

(4) *Für jede subnormale Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *bezeichne* $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$ *die Länge einer kürzesten von* $\mathfrak{G}$ *nach* $\mathfrak{A}$ *führenden Normalkette* (*so daß* $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = 0$ *so viel besagt wie* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$). *Dann ist für* $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{A}$ *stets* $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| + 1$.

Beweis: Ist $\mathfrak{H}$ das größte von $\mathfrak{G}$ verschiedene Glied einer kürzesten Normalkette von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \leqq \mathfrak{H}$, daher $|\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| \leqq |\mathfrak{H} - \mathfrak{A}| \leqq |\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| - 1$. Andererseits ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ normal in $\mathfrak{G}$, daher $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| \leqq |\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| + 1$.

Wir kommen zum Beweis von (2). Wir verbinden ihn zweckmäßig mit dem Beweis des folgenden Hilfssatzes:

(5) *Sei* $\mathfrak{E} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$ *einfach und nichtabelsch. Dann ist die normale Hülle* $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ *von* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{G}$ *ein minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

Den Beweis von (2) und (5) führen wir gemeinsam durch Induktion bezüglich $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$. Für $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}| = 0$ ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$, also ist $\mathfrak{G}$ einfach und beide Sätze sind trivialerweise richtig. Weiter sei $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}| > 0$, also $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$. Unter den in (2) und (5) gemachten Voraussetzungen behaupten wir der Reihe nach:

(α) *Ist* $G \in \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}^G \neq \mathfrak{E}$, *so ist* $\mathfrak{E} \circ \mathfrak{E}^G = 1$.

Nach (4) ist $|\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{E}| < |\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$. Nach Induktionsvoraussetzung kann (2) schon auf die drei Gruppen $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^G$ angewandt werden und liefert die Behauptung.

(β) $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ *ist ein minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. Mit anderen Worten: *Ist* $\mathfrak{N}$ *ein Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *und ist* $1 \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$, *so ist* $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} \leqq \mathfrak{N}$.

Nach Definition von $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ liegt N im Erzeugnis von endlich vielen geeignet gewählten Konjugierten $\mathfrak{E}_\varrho$ von $\mathfrak{E}$. Dieses Erzeugnis ist nach (α) ein direktes Produkt. Bei passender Bezeichnung ist also

$$N = N_1 N_2 \dots N_r, \qquad 1 \neq N_\varrho \in \mathfrak{E}_\varrho, \qquad \mathfrak{E}_\varrho \circ \mathfrak{E}_\sigma = 1 \qquad (\varrho \neq \sigma).$$

Für jedes $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ enthält $\mathfrak{N}$ den Kommutator $N \circ E_1 = N_1 \circ E_1$. Da $\mathfrak{E}_1$ einfach und nichtabelsch ist, erzeugen die Kommutatoren $N_1 \circ E_1$ ($E \in \mathfrak{E}_1$) die ganze Gruppe $\mathfrak{E}_1$. Daher haben wir $\mathfrak{E}_1 \leqq \mathfrak{N}$ und wegen der Normalität von $\mathfrak{N}$ weiter $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} \leqq \mathfrak{N}$.

(γ) *Es ist* $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E} = 1$. Zum Beweis bilden wir $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{E} = \mathfrak{H}$. Da $|\mathfrak{H} - \mathfrak{E}| \leqq |\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$ ist, haben wir auch für $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{G}$ das Ergebnis (β) zur Verfügung: $\mathfrak{E}^{\mathfrak{H}}$ ist ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Daraus folgt $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} = 1$. Denn sonst wäre $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}}$; die letzte Gruppe stimmt aber wegen $\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}^{\mathfrak{E}}$ überein;

wir hätten also $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{E}}$, daher $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}$ nach (3), entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} = 1$. Nun kommen wir ans Ziel: Es ist

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \circ \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} = 1.$$

Damit ist der Beweis von (2), (5) und (1a) beendet. Wir kommen zu (1b). Die Behauptung besagt: *Ist $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist in* s $\mathfrak{N}$ *die Minimalbedingung erfüllt, so ist* $\mathfrak{N} \leqq \mathrm{N}\,\mathfrak{A}$ *für jedes* $\mathfrak{A} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{G}$.

Wir führen den Beweis durch Induktion bezüglich $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$. Ist $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = 0$, so ist $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G} = \mathfrak{A} = \mathrm{N}\,\mathfrak{A}$, also ist die Behauptung richtig. Weiter sei $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| > 0$; dann gehen wir von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ über. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ und der Normalität von $\mathfrak{G}_1$ ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1 = 1$ oder $= \mathfrak{N}$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1 = 1$ und wir sind fertig. Im zweiten Fall haben wir $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G}_1$. Da wir in s $\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung vorausgesetzt haben, gibt es in $\mathfrak{N}$ einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{G}_1$, und in s $\mathfrak{N}_1$ ist wieder die Minimalbedingung erfüllt. Wählen wir nun $G \in \mathfrak{G}$ beliebig, so ist $\mathfrak{N}_1^G$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$, und nach (4) haben wir $|\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{A}| < |\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{N}_1^G \leqq \mathrm{N}\,\mathfrak{A}$. Folglich gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1^{\mathfrak{H}} \leqq \mathrm{N}\,\mathfrak{A}$, wie behauptet. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet.

Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler und in s $\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung erfüllt ist, hat übrigens zur Folge, daß $\mathfrak{N}$ das direkte Produkt von endlich vielen einfachen Gruppen ist (die überdies in $\mathfrak{G}$ konjugiert gewählt werden können). Man zeigt dies leicht mit Hilfe der Bemerkung, daß nach Satz 1 jedenfalls $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{N} \neq 1$, also wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ genauer $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist.

Satz 1 gibt die Möglichkeit, zu der aufsteigenden Zentralreihe nilpotenter Gruppen ein Analogon in recht allgemeinen Fällen zu bilden:

(6) *Wenn für die subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ die Minimalbedingung und für die charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist (z.B.: wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt), dann führt die durch*

$$\mathfrak{N}_0 = 1, \quad \mathfrak{N}_{\varkappa+1}/\mathfrak{N}_\varkappa = \mathrm{Ns}\,(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_\varkappa)$$

erklärte aufsteigende Reihe charakteristischer Untergruppen in endlich vielen Schritten von 1 bis $\mathfrak{G}$: $1 = \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1 < \cdots < \mathfrak{N}_k = \mathfrak{G}$.

Für jedes $\mathfrak{A} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{G}$ *ist* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_0 \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_1 \leqq \cdots \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_k = \mathfrak{G}$ *eine Normalkette; insbesondere ist* $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| \leqq k$.

Beweis: Für $\mathfrak{G} = 1$ ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{G} \neq 1$, so enthält $\mathfrak{G}$ minimale Normalteiler, und Satz 1 ergibt $\mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1$. Ist $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{G}$, so gehen wir zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ über und finden ebenso $\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2$, usw.; wegen der Maximalbedingung bricht das Verfahren ab, d.h. $\mathfrak{G}$ wird erreicht. Ist ferner $\mathfrak{A} \in \mathrm{s}\,\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch mod $\mathfrak{N}_\varkappa$ subnormal, also normal unter $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$; daher ist $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_\varkappa$ normal in $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 466–479 (1958)

Corps maximaux et complets par des valuations de Krull

Par

P. RIBENBOIM*

Cet article se place dans notre programme d'étude systématique des corps munis de valuations de KRULL, c'est-à-dire, ayant rang quelconque. Dans cette ligne nous avons déjà publié le travail intitulé «Le Théorème d'Approximation pour les Valuations de KRULL»[1]).

Nous étudions ici certaines questions relatives aux corps valués complets et maximaux. D'abord nous enregistrons plusieurs résultats faciles; par exemple, nous trouvons des conditions suffisantes et nécessaires pour que le corps valué soit complet ou maximal, moyennant des valuations obtenues par décomposition de la valuation donnée. Il résulte par induction (comme il était déjà connu pour le rang fini), que tout corps valué discret complet de rang bien ordonné est maximal. Nous examinons aussi une notion de corps faiblement maximal et donnons le rapport entre cette notion et celle de corps maximal.

Notre principal résultat est une caractérisation des corps valués complets. Comme il est bien connu, un corps valué K est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de K admet une pseudo-limite dans K. Nous définissons alors les suites pseudo-convergentes *distinguées*, comme étant les suites pseudo-convergentes $(a_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments $a_\tau \in A$ (anneau de la valuation) qui possèdent largeur égale à un idéal premier non maximal de A. Le théorème obtenu affirme qu'un corps valué est complet si et seulement si toute suite pseudo-convergente distinguée du corps possède une pseudo-limite dans ce corps.

Nous terminons en généralisant un résultat de F. K. SCHMIDT sur les corps poly-complets et nous donnons une démonstration d'un résultat indiqué incorrectement par SCHILLING dans un de ses articles.

1.

Nous conservons ici la terminologie et notations introduites dans notre précedent travail déjà cité. En particulier, nous utiliserons les théorèmes de composition et décomposition de valuations dont les enoncés y figurent.

Pour rendre plus facile la lecture et fixer la terminologie, nous rappelerons quelques définitions et résultats connus, en ommettant les démonstrations.

*) Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

[1]) Math. Z. **68**, 1–18 (1957).

Définition. Soient K, K' deux corps munis respectivement des valuations w, w', et supposons que $K \subseteq K'$. On dit que w' est un prolongement de w (ou w est la restriction de w') lorsque $w'(x) = w(x)$ pour tout $x \in K$. Alors $A' \cap K = A$, où A, A' désignent respectivement les anneaux des valuations w, w'.

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w et K' un surcorps de K muni de la valuation w' qui prolonge la valuation w de K. On dit que K' est une extension immédiate de K lorsque les corps des restes ainsi que les groupes de valuation de K et de K' coïncident.

Lemme 1. Soit K', muni de w', une extension de K, muni de w, de façon que ces valuations possèdent le même rang, donc ses sous-groupes isolés se correspondent biunivoquement. Alors il existe une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de l'anneau A' de la valuation w' et les idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w. Précisement, $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}$ se correspondent lorsqu'ils correspondent biunivoquement à des sous-groupes isolés correspondants des groupes des valeurs de w et w'; alors, on a $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ est l'idéal premier de A' engendré par $\mathfrak{p}$; en outre, la valuation $w'_{\mathfrak{p}'}$ prolonge à K' la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K. En particulier les hypothèses de ce lemme se vérifient lorsque K', muni de w', est une extension immédiate de K, muni de w.

Définition. Un corps K, muni de la valuation w, est dit maximal (relativement à w) lorsqu'il ne possède aucune extension immédiate distincte de K lui-même.

Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 1. *Tout corps valué K (muni de w) possède une extension immédiate $\hat{K}$ (munie de $\hat{w}$) qui est un corps maximal.*

En utilisant les notions de suites pseudo-convergentes, de pseudo-limite d'une suite pseudo-convergente, on peut caractériser les corps valués maximaux [SCHILLING[2])].

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w, soit $T = \{1, 2, \ldots, \tau, \ldots\}$ un ensemble bien ordonné d'indices, sans dernier élément, et $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite d'éléments de K. On dit que $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente (selon w) lorsqu'on a $w(a_\tau - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''})$ quand $\tau < \tau' < \tau''$ dans T.

Notons $\gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Gamma$ (groupe de valeurs de w), où $\tau < \tau'$ dans T (remarquons que γ_τ ne dépend pas de τ'). Alors la suite $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ est strictement croissante dans Γ.

Lemme 2. Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K, selon w. Alors: i) ou bien $\big(w(a_\tau)\big)_{\tau \in T}$ est une suite strictement croissante d'éléments de Γ, ii) ou bien il existe un indice $\tau_0 \in T$ tel que

$$w(a_1) < w(a_2) < \cdots < w(a_{\tau_0}) \geqq w(a_{\tau_0+1}) = \cdots = w(a_\tau) = \cdots$$

et on a $w(a_{\tau'}) < w(a_\tau)$ lorsque $\tau' < \tau_0 < \tau$ dans T.

Remarquons que si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est pseudo-convergente alors $a_\tau \neq 0$ sauf eventuellement pour l'indice $\tau_0 \in T$. Si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente

[2]) SCHILLING, F.: Valuation Theory. Amer. Math. Soc. (1950).

et si $a \in K$, $w(a) < w(a_1)$ lorsque $\tau_0 \neq 1$, ou $w(a) < w(a_2)$ lorsque $\tau_0 = 1$, alors $(a^{-1} \cdot a_\tau)_{\tau \in T}$ est aussi une suite pseudo-convergente, avec $w(a^{-1} \cdot a_\tau) > 0$ quelque soit $\tau \in T$.

Remarquons aussi que si T' est un sous-ensemble cofinal de l'ensemble bien ordonné d'indices T, alors si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est pseudo-convergente, il en est de même de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$.

Définition. Soit K', muni de w', une extension immédiate de K, muni de w. Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K (selon w). On dit que $a \in K'$ est une pseudo-limite (selon w') de (a_τ) lorsqu'on a $w'(a - a_\tau) = w(a_{\tau'} - a_\tau) = \gamma_\tau$ ($\tau < \tau'$ dans T) pour tout $\tau \in T$.

Selon que $(a_\tau)_{\tau \in T}$ soit du type i) ou ii) indiqués au lemme 2, on a respectivement: i) $w(a_\tau) < w'(a)$ quelque soit $\tau \in T$, ii) $w(a_\tau) = w'(a)$ quelque soit $\tau \in T$, $\tau_0 < \tau$.

Il est clair que si T' est un sous-ensemble cofinal de T et si a est pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T}$ alors a est aussi pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ et vice-versa. Cela permettra de nous restreindre aux suites pseudo-convergentes du type i) ou bien celles du type ii) pour lesquelles $w(a_\tau)$ est constant.

Définition. Si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente d'éléments du corps K, muni de w, si K', muni de w', est une extension immédiate de K, muni de w, alors l'ensemble $\mathfrak{b} = \{x \in K' \mid w'(x) > \gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'})$ pour tout $\tau \in T$, $\tau < \tau'\}$ est un idéal fractionnaire de K' (relativement à l'anneau de la valuation w') appelé la *largeur* de $(a_\tau)_{\tau \in T}$ dans le corps K'.

Il est alors clair que si $a \in K'$ est pseudo-limite de la suite pseudo-convergente $(a_\tau)_{\tau \in T}$ alors $a + \mathfrak{b}$ est l'ensemble des pseudo-limites de cette suite qui appartiennent à K'. En particulier, une suite pseudo-convergente ayant largeur nulle possède au plus une seule pseudo-limite.

Lemme 3. Soit K', muni de la valuation w', une extension immédiate du corps K, muni de la valuation w. Alors, tout élément a' de K' n'appartenant pas à K, est pseudo-limite d'une suite pseudo-convergente d'éléments de K, qui ne possède pas de pseudo-limite dans K. En particulier, si $a' \in A'$ (anneau de la valuation w') alors on peut choisir une suite pseudo-convergente dont les éléments sont dans l'anneau A de la valuation w.

Lemme 4. Si K est un corps muni de la valuation w, si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente d'éléments de K n'ayant pas de pseudo-limite dans K, il est possible de construir une extension immédiate $K(a)$ de K (munie d'une valuation w') telle que a soit une pseudo-limite de (a_τ) selon w'.

Théorème 2. *Un corps K, muni de la valuation w, est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de K admet au moins une pseudo-limite dans K.*

En vertu de la remarque qui suit le lemme 2, le théorème 2 admet l'enoncé équivalent suivant:

Théorème 2'. *Un corps K, muni de la valuation w, est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de l'anneau A de la valuation w possède au moins une pseudo-limite dans A.*

Il est utile de remarquer qu'on ne connaît pas des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux extensions immédiates maximales d'un corps valué K soient isomorphes en tant que corps valués [cf. KAPLANSKY[3]) et MACLANE[4])].

Le résultat suivant sera utile dans un travail postérieur:

Lemme 5. Soit K un corps valué (muni de w) et $\hat{K}$, muni de $\hat{w}$, une extension immédiate maximale de K. Si $w_\mathfrak{p}$ est une valuation moins fine que w, il existe un corps $\hat{K}_\mathfrak{p}$ tel que $K \subseteq \hat{K}_\mathfrak{p} \subseteq \hat{K}$ et que, muni de la valuation induite par $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, il soit une extension immédiate maximale de K, muni de $w_\mathfrak{p}$ (où $\hat{\mathfrak{p}}$ est l'idéal premier de l'anneau de la valuation $\hat{w}$ qui correspond biunivoquement à $\mathfrak{p}$ par le lemme 1).

Démonstration. En effet, soit l'ensemble Φ des corps L, contenus dans $\hat{K}$, valués par la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ et qui sont des extensions immédiates de K, muni de $w_\mathfrak{p}$. Φ n'est pas vide, car $K \in \Phi$, puisque $w_\mathfrak{p}$ est la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ (lemme 1). Puisque Φ est inductif, par le théorème de ZORN il existe une élément maximal $L \in \Phi$, donc L, muni de la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, est une extension immédiate de K, muni de $w_\mathfrak{p}$.

Montrons que le corps valué L est maximal par la valuation induite par $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$. Sinon, par le théorème 2, il existerait une suite $(a_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments de L, pseudo-convergente selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ et sans pseudo-limite dans L. On peut prendre sans perte de généralité une suite (a_τ) telle qu'on ait $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}(a_\tau) > 0$ pour tout indice $\tau \in T$, en vertu du lemme 2. De l'hypothèse, il résulte que (a_τ) est pseudo-convergente selon $\hat{w}$ et alors il existe une pseudo-limite $a \in \hat{K}$ de (a_τ) selon $\hat{w}$; donc a est aussi pseudo-limite de (a_τ) selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, et ainsi $a \notin L$; or, $a \equiv a_\tau \pmod{\hat{\mathfrak{p}}}$ car on a $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}(a - a_\tau) = \hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}(a_\tau - a_{\tau'}) > 0$ (lorsque $\tau < \tau'$), donc $\hat{w}(a - a_\tau) \notin \Delta$ (sous-groupe isolé correspondant à l'idéal premier $\hat{\mathfrak{p}}$). Or, cela entraîne que tout élément de $L(a) \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ est congru modulo $\hat{\mathfrak{p}}$ à un élément de $L \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$. En effet, tout élément du type $f(a)$ (où f est un polynôme à coefficients dans $L \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$) est congru à un élément de $L \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, modulo $\hat{\mathfrak{p}}$; si on prend maintenant un élément du type $f(a)/g(a) \in L(a) \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, si φ est l'homomorphisme canonique de $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ sur $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}/\hat{\mathfrak{p}}$, alors $\varphi(f(a))$, $\varphi(g(a))$ appartiennent au corps des restes de $L \cap \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$, donc aussi $\varphi(f(a)/g(a)) = \varphi(f(a))/\varphi(g(a))$. Il résulte que $L(a)$, muni de la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ possède le même corps des restes que L, muni de la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$. Donc $L(a)$ est une extension immédiate de K, c'est-à-dire, $L(a) \in \Phi$, absurde!

Corollaire. Si K est un corps valué muni de w, et si $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$ sont des idéaux premiers de l'anneau de valuation de w, où $\mathfrak{p}^0$ est l'idéal maximal, alors il existe des extensions immédiates maximales de K, à savoir $\hat{K}_\mathfrak{p}$ (munie de la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$), $\hat{K}_{\mathfrak{p}'}$ (munie de la restriction de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}'}$) telles que $K = \hat{K}_{(0)} \subseteq \hat{K}_\mathfrak{p} \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}'} \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}^0} = \hat{K}$.

[3]) KAPLANSKY, I.: Maximal Fields with Valuations, I. Duke Math. J. 9, 303–321 (1942)

[4]) MACLANE, S.: The Uniqueness of Power Series Representations of certain Fields with Valuations. Ann. of Math. 39, 370–382 (1938).

Lemme 6. Si K, muni de w, est un corps maximal, alors pour tout couple $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$, d'idéaux premiers de A, $(0) \subseteqq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p}^0$, le corps $\mathscr{K} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est un corps valué maximal; en particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le corps K muni de la valuation $w_\mathfrak{p}$ est maximal.

Démonstration. En effet, soit $(b_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de $\mathscr{K}$, relativement à la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$; donc, si $\tau < \tau' < \tau''$ alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(b_\tau - b_{\tau'}) < w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(b_{\tau'} - b_{\tau''})$. Si $a_\tau \in A_\mathfrak{p}$ désigne un répresentant de la classe b_τ mod. $\mathfrak{p}$, alors d'après le théorème 2 de notre travail cité en (1), on a $\Theta(w(a_\tau - a_{\tau'})) < \Theta(w(a_{\tau'} - a_{\tau''}))$ où Θ est l'homomorphisme canonique de Δ sur Δ/Δ'. Il résulte que $w(a_\tau - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''})$ et (a_τ) est une suite pseudo-convergente d'éléments de K relativement à la valuation w. Par le théorème 2 il existe une pseudo-limite $a \in K$ de la suite ci-dessus et ainsi $w(a - a_\tau) = w(a_\tau - a_{\tau'})$, donc $\Theta(w(a - a_\tau)) = \Theta(w(a_\tau - a_{\tau'}))$. Or, de $(a - a_\tau)/(a_\tau - a_{\tau'}) \in A$, $a_\tau - a_{\tau'} \in A_\mathfrak{p}$ il vient $a - a_\tau \in A_\mathfrak{p}$, donc $a \in A_\mathfrak{p}$; ainsi, nous pouvons écrire $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(b - b_\tau) = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(b_\tau - b_{\tau'})$ lorsque $\tau < \tau'$ et alors $b \in \mathscr{K}$ est une pseudo-limite de la suite pseudo-convergente (b_τ). Cela montre que $\mathscr{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$, est un corps maximal.

Le lemme précedent admet la réciproque suivante:

Lemme 7. Soit K un corps muni de la valuation w et supposons qu'il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de la valuation w tel que: 1) K, muni de $w_\mathfrak{p}$, est maximal; 2) $\mathscr{K} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ est maximal. Alors, K, muni de w, est un corps maximal.

Démonstration. En effet, supposons que K', muni de w', soit une extension immédiate de K, muni de w; soit $\mathfrak{p}'$ (resp. $\mathfrak{p}'^0$) l'idéal premier de A' (anneau de la valuation w') qui correspond biunivoquement à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}^0$) de A, et de même $\mathscr{K}' = A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'$, $\mathscr{K}'^0 = A'_{\mathfrak{p}'^0}/\mathfrak{p}'^0$; alors $\mathscr{K}'^0 = \mathscr{K}^0$. Si on avait $\mathscr{K} < \mathscr{K}'$ alors $\mathscr{K}'$, muni de $w'_{\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'^0}$ serait une extension immédiate de $\mathscr{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, ce qui est absurde. Donc $\mathscr{K} = \mathscr{K}'$ et alors K', muni de $w'_{\mathfrak{p}'}$ serait une extension immédiate de K, muni de $w_\mathfrak{p}$, donc $K' = K$.

2.

En examinant la définition de corps maximal K (relativement à une valuation w), nous remarquons qu'il n'est question que d'une condition relative au groupe de valuation Γ et au corps des restes $\mathscr{K}^0$, défini par l'idéal *maximal* $\mathfrak{p}^0$ de la valuation w.

Il serait intéressant d'introduire une notion de maximalité qui prenne en considération aussi les autres idéaux premiers de l'anneau de la valuation. Ainsi, soit K un corps, muni de la valuation w, et soit $\mathfrak{p}_0$ un idéal premier non nul de l'anneau A de la valuation w.

Définition. Un corps K', muni de la valuation w', est une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ du corps K, muni de la valuation w, lorsque K' est une extension du corps K, w' prolonge w, les groupes des valeurs Γ'' de w' et Γ de w coïncident et enfin, pour tout couple $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ d'idéaux premiers correspondants des anneaux A, A' des valuations w, w', tels que $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}' \supseteqq \mathfrak{p}'_0$ (où $\mathfrak{p}'_0$ correspond à $\mathfrak{p}_0$) les corps $\mathscr{K}$ et $\mathscr{K}'$ coïncident.

Ainsi, K', muni de w', est extension immédiate de K, muni de w (au sens usuel) exactement lorsque il l'est de classe $\mathfrak{p}^0$ (idéal maximal de l'anneau de la valuation w). Si $\mathfrak{p}_0 \subseteqq \mathfrak{p}_1$ et si K', muni de w', est extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K, muni de w, alors il l'est aussi de classe $\mathfrak{p}_1$.

Définition. Un corps K, muni de la valuation w, est dit un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, lorsque il n'admet aucune extension immédiate K' de classe $\mathfrak{p}_0$, telle que $K \neq K'$.

Ainsi, K, muni de w, est un corps maximal (au sens usuel) exactement lorsque il l'est de classe $\mathfrak{p}^0$. Si $\mathfrak{p}_0 \subseteqq \mathfrak{p}_1$ et si K, muni de w, est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_1$, alors il l'est aussi de classe $\mathfrak{p}_0$.

Lemme 8. K, muni de la valuation w, est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, si et seulement si K, muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est un corps maximal (au sens usuel).

Démonstration. En effet, si K', muni de v', est une extension immédiate de K, muni de $v = w_{\mathfrak{p}_0}$, alors $\mathscr{K}_0 = A_{\mathfrak{p}_0}/\mathfrak{p}_0 = \mathscr{K}_0'$ (corps des restes de K', muni de v'). Sur le corps K_0 soit la valuation $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$ dont le corps des restes est $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$. La valuation de K composée de $v = w_{\mathfrak{p}_0}$ et de $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$ (d'après le théorème des valuations composées) est égale à w. D'autre part, la valuation de K', composée de v' et de $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$, est une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K, muni de w, donc $K' = K$ et alors K, muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est un corps maximal au sens usuel. Réciproquement, soit K', muni de w', une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K, muni de w. Donc, on a $\mathscr{K}_0 = A_{\mathfrak{p}_0}/\mathfrak{p}_0 = \mathscr{K}_0' = A_{\mathfrak{p}_0'}'/\mathfrak{p}_0'$ (où A', $\mathfrak{p}_0'$, désignent l'anneau de la valuation w' et l'idéal premier de A' correspondant à $\mathfrak{p}_0$). Ainsi, K', muni de $w'_{\mathfrak{p}_0'}$, est une extension immédiate (au sens usuel) de K, muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$. Donc $K' = K$ et K est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$.

Nous complétons ces considérations en introduisant la définition suivante.

Définition. Un corps K, muni d'une valuation w, est dit faiblement maximal lorsque il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}_0$ de l'anneau de valuation w tel que K est maximal de classe $\mathfrak{p}_0$.

De cette définition il résulte:

Lemme 9. Si l'anneau de la valuation w de K possède un idéal premier minimal $\mathfrak{p}_1$ (non nul) alors K, muni de w, est faiblement maximal si et seulement si K, muni de $w_{\mathfrak{p}_1}$, est maximal (au sens usuel).

Démonstration. En effet, si K, muni de w, est faiblement maximal, il existe $\mathfrak{p}_0$, tel que K, muni de w, est maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, c.a.d., d'après le lemme 8, K, muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est maximal; donc, de $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_0$ il vient $w_{\mathfrak{p}_0} \geqq w_{\mathfrak{p}_1}$ et par le lemme 6 K, muni de $w_{\mathfrak{p}_1}$, est maximal. La réciproque est triviale.

Remarque. Dans le cas où l'idéal nul de l'anneau de la valuation w du corps K est intersection d'idéaux premiers non nuls, il est possible de montrer l'existence d'un corps non faiblement maximal. Pour cela, soit Γ un groupe abélien additif totalement ordonné réunion d'une famille de sous-groupes isolés, $\Gamma = \cup \Delta_\iota$, où $\Gamma \neq \Delta_\iota$, et soit k un corps quelconque. Si K désigne le corps des fractions rationnelles à une indeterminée, coefficients dans k et exposants dans Γ, muni de la valuation w définie par $w(\sum a_\alpha X^\alpha) = \min \{\alpha \in \Gamma \mid a_\alpha \neq 0\}$, alors K n'est pas faiblement maximal. En effet, si $\mathfrak{p}$ est

un idéal premier non nul de l'anneau A de la valuation w, alors il est clair que K, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$, n'est pas maximal.

3.

Définition. Un corps K, muni de la valuation w, est dit complet (relativement à w) lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:

c1) si $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ sont deux idéaux premiers successifs de l'anneau A de la valuation w, alors le corps $\mathscr{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$, muni de la valuation de rang 1 $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$ est complet (par rapport à la topologie définie par cette valuation)

c2) si $(\mathfrak{p}_\tau)_{\tau \in T}$ est une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de A, si pour tout $\tau \in T$, $a_\tau \in A$ et $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supsetneqq \mathfrak{p}_{\tau'}$, alors il existe $x \in A$ tel que $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\mathfrak{p}_\tau$.

La condition c2) est trivialement vérifiée lorsque l'anneau A ne possède pas d'idéal premier limite, par exemple, lorsque w est de rang fini. Remarquons à ce propos qu'on peut avoir une valuation w, dont le rang n'est pas fini et dont l'anneau de valuation ne possède aucun idéal premier limite, et dans ce cas le rang n'est pas bien ordonné [cf. RIBENBOIM[5])].

Lemme 10. Tout corps valué maximal est complet.

Lemme 11. Soit K, muni de la valuation w, un corps complet. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau de la valuation w, le corps K muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ est complet.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A et montrons que K, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$, est complet.

c1) Soient les idéaux premiers successifs $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, de $A_{\mathfrak{p}}$, $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \mathfrak{p}$, et soit $\mathscr{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$; si on pose $v = w_{\mathfrak{p}}$ alors on a $v_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2} = w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$, donc par l'hypothèse sur w, la condition c1) est vérifiée par la valuation $w_{\mathfrak{p}}$.

c2) Soit $(\mathfrak{p}_\tau)_{\tau \in T}$ une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$, et pour tout $\tau \in T$ soit $a_\tau \in A_{\mathfrak{p}}$ de façon que $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supsetneqq \mathfrak{p}_{\tau'}$. Si Δ désigne le sous-groupe isolé de Γ (groupe de la valuation w) qui correspond à $\mathfrak{p}$, et de même Δ_τ celui qui correspond à $\mathfrak{p}_\tau$ (pour tout $\tau \in T$), alors on a $\Delta \subsetneqq \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_\tau \subset \cdots$, $w(a_\tau) \in \Delta + \Gamma^+$ (pour $\tau \in T$). S'il existe un indice $\tau \in T$ tel que $w(a_\tau) < 0$ alors de $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ il vient $w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_\tau$, donc de $\Delta \subsetneqq \Delta_\tau$ il résulte que $w(a_\tau - a_{\tau'}) \geqq 0$ et alors $w(a_{\tau'}) = w(a_\tau)$ lorsque $\tau < \tau'$ dans T. Ceci entraîne l'existence d'un élément $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, tel que $w(a \cdot a_\tau) \geqq 0$ pour tout $\tau \in T$. Puisque on a $a \cdot a_\tau \equiv a \cdot a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supsetneqq \mathfrak{p}_{\tau'}$, avec $a \cdot a_\tau \in A$ pour tout $\tau \in T$, il résulte de l'hypothèse l'existence de $x \in A$ tel que $x \equiv a \cdot a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$. Donc $a(xa^{-1} - a_\tau) = x - aa_\tau \in \mathfrak{p}_\tau$, où $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, donc $a \notin \mathfrak{p}_\tau$ et ainsi de $xa^{-1} - a_\tau \in A_{\mathfrak{p}}$ il vient $xa^{-1} - a_\tau \in \mathfrak{p}_\tau$. Donc $xa^{-1} \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$, avec $xa^{-1} \in A_{\mathfrak{p}}$. Cela démontre la condition c2).

Lemme 12. Si le corps K, muni de la valuation w est complet, et si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, sont des idéaux premiers de l'anneau de la valuation w, $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subsetneqq \mathfrak{p}^0$, alors le corps $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$, est complet.

[5]) RIBENBOIM, P.: Sur les Groupes Totalement Ordonnés et l'Arithmetique des Anneaux de Valuation. À paraître dans Summa Bras. Math.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathscr{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ est complet, car $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ étant une valuation moins fine que $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, il résultera du lemme 11 que $\mathscr{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est aussi complet.

c 1) Soient $\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{q}_2$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau $A/\mathfrak{p}$ de la valuation $v = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K}$, donc $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 \subseteqq \mathfrak{p}^0$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ idéaux premiers successifs de A. Par l'hypothèse, $\mathscr{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$ est complet selon la valuation de rang 1 $w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$, ayant anneau $A_{\mathfrak{p}_2}/\mathfrak{p}_1$. Or, par le corollaire au théorème 2 de notre précedent travail on a $v_{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2} = w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$, donc la condition c 1) est vérifiée par la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$.

c 2) Considérons une suite totalement ordonnée décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_\tau/\mathfrak{p}$ de l'anneau $B = A/\mathfrak{p}$ de la valuation $v = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K}$ (où nécessairement $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_\tau \subseteqq \mathfrak{p}^0$). Soit (b_τ) une famille d'éléments de B, telle que $b_\tau \equiv b_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau/\mathfrak{p}}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supseteqq \mathfrak{p}_{\tau'}$; montrons l'existence de $y \in B$ tel que $y \equiv b_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau/\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}_\tau$. On a $b_\tau = \bar{a}_\tau$ (classe mod. $\mathfrak{p}$) où $a_\tau \in A$, donc $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ et il existe par hypothèse un élément $x \in A$ tel que $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\mathfrak{p}_\tau$, donc si $y = \bar{x}$ (classe mod. $\mathfrak{p}$) alors $y \in B$, $y \equiv b_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau/\mathfrak{p}}$, et ainsi la condition c 2) est vérifiée par la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$.

Le résultat suivant est analogue au lemme 7:

Lemme 13. Soit K un corps muni de la valuation w et supposons qu'il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de la valuation w tel que: 1) K, muni de $w_{\mathfrak{p}}$, est complet; 2) $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, est complet. Alors, K, muni de w, est complet.

Démonstration. En effet, vérifions les conditions c 1) et c 2)

c 1) Soient $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau A, $(0) \subseteqq \mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 \subseteqq \mathfrak{p}^0$. Ou bien on a $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 \subseteqq \mathfrak{p}$ et alors $\mathscr{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$, muni de $w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2} = (w_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$ est complet d'après 1); ou bien on a $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2$ et alors si $v = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}$, le corps $K_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$, muni de $v_{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2} = w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$ est complet, d'après 2).

c 2) Soit $(\mathfrak{p}_\tau)$ une famille totalement ordonnée décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de l'anneau A, soient $a_\tau \in A$ et $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supseteqq \mathfrak{p}_{\tau'}$, un système compatible de congruences. Si l'ensemble $P = \{\mathfrak{p}_\tau \mid \mathfrak{p}_\tau \subseteqq \mathfrak{p}\}$ n'est pas vide, le système de congruences $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_{\tau'} \subseteqq \mathfrak{p}_\tau \subseteqq \mathfrak{p}$ admet une solution $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \in P$, en vertu de 1); alors si $\mathfrak{p}_{\tau'} \notin P$ et $\mathfrak{p}_\tau \in P$ on a $x - a_{\tau'} = (x - a_\tau) + (a_\tau - a_{\tau'}) \in \mathfrak{p}_\tau + \mathfrak{p}_{\tau'} = \mathfrak{p}_{\tau'}$, donc x est une solution du système de congruences. Si par contre l'ensemble P est vide, alors $(\mathfrak{q}_\tau)$, où $\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{p}_\tau/\mathfrak{p}$, est une famille totalement ordonnée bien ordonnée décroissante d'idéaux premiers de l'anneau $A/\mathfrak{p}$ de la valuation $v = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, et le système de congruences $\bar{a}_\tau \equiv \bar{a}_{\tau'} \pmod{\mathfrak{q}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_{\tau'} \subseteqq \mathfrak{p}_\tau$ (où $\bar{a}_\tau \in A/\mathfrak{p}$ est la classe modulo $\mathfrak{p}$ de $a_\tau \in A$) est compatible, donc par 2) il admet une solution $\bar{x} \equiv \bar{a}_\tau \pmod{\mathfrak{q}_\tau}$ et alors $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ car $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_\tau$.

Nous allons maintenant considérer de plus près les relations qui existent entre les corps complets et maximaux. Pour cela nous définirons la notion de suite pseudo-convergente distinguée.

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w. On dit que la suite pseudo-convergente $(a_\tau)_{\tau\in T}$ d'éléments de K est *distinguée* lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites: i) $a_\tau\in A$ pour tout $\tau\in T$; ii) la largeur de $(a_\tau)_{\tau\in T}$ dans le corps K est un idéal premier distinct de l'idéal maximal de l'anneau A.

Dans le cas où la valuation w possède rang 1, nous pouvons faire les considérations suivantes, fondées sur l'existence de base dénombrable de voisinages pour le groupe des valeurs de w (considére comme sous-groupe de celui des nombres réels). Si $(a_\tau)_{\tau\in T}$ est une suite pseudo-convergente, soit γ (réel ou infini) la borne supérieure de l'ensemble $(\gamma_\tau)_{\tau\in T}$. Soit $\gamma'_1<\gamma'_2<\cdots<\gamma'_n<\cdots$ une suite ordinaire (c'est-à-dire, dont l'ensemble d'indices possède type d'ordre ω) de nombres réels qui converge vers γ. Soit $\tau_1\in T$ le plus petit des indices tels que $\gamma'_1<\gamma_{\tau_1}$, soit n_1 le plus petit entier tel que $\gamma_{\tau_1}<\gamma'_{n_1}$ et posons $\gamma''_2=\gamma'_{n_1}$; de même, soit $\tau_2\in T$ le plus petit des indices tels que $\gamma''_2<\gamma_{\tau_2}$, soit n_2 le plus petit entier tel que $\gamma_{\tau_2}<\gamma'_{n_2}$ et posons $\gamma''_3=\gamma'_{n_2}$. En poursuivant indéfiniment, on obtient la suite ordinaire $\gamma_{\tau_1}<\gamma_{\tau_2}<\cdots<\gamma_{\tau_n}<\cdots$ qui converge vers γ; alors la suite ordinaire $(a_{\tau_n})_{n=1,2,\ldots}$ est pseudo-convergente et ses pseudo-limites coincident avec ceux de la suite $(a_\tau)_{\tau\in T}$, et ainsi elles ont la même largeur. Remarquons que lorsque $(a_\tau)_{\tau\in T}$ possède largeur nulle alors $(a_{\tau_n})_{n=1,2,\ldots}$ est une suite de CAUCHY (relativement à la structure uniforme définie par la valuation de rang 1 w de K) et réciproquement.

Théorème 3. *Un corps K, muni de la valuation w, est complet si et seulement si toute suite pseudo-convergente distinguée dans K possède au moins une pseudo-limite dans K.*

Démonstration. Soit K, muni de w, un corps complet. Soit $(a_\iota)_{\tau\in T}$ une suite pseudo-convergente distinguée dans K, donc $a_\tau\in A$ pour tout $\tau\in T$ et sa largeur est un idéal premier $\mathfrak{p}$ distinct de l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$ de l'anneau A. Soit Δ le sous-groupe isolé de Γ qui correspond à $\mathfrak{p}$. Deux cas sont alors possibles.

Premier cas. Il existe $\mathfrak{p}_1$, idéal premier de A, successif à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_1$; soit Δ_1 le correspondant sous-groupe isolé, $\Delta_1<\Delta$. Du fait que $\mathfrak{p}$ soit la largeur de (a_τ) il résulte que $w(a_\tau-a_{\tau'})=\gamma_\tau\in\Delta$, $w(a_\tau)\in\Delta$ (en vertu de lemme 2), donc $a_\tau\notin\mathfrak{p}$, $a_\tau-a_{\tau'}\notin\mathfrak{p}$, quelques soient τ, $\tau'\in T$, $\tau<\tau'$.

Soit $\mathscr{K}=A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ et posons $w'=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$; notons $\mathfrak{p}'_1=\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, donc K est complet par rapport à la valuation de rang 1 $w'_{\mathfrak{p}'_1}=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}$. Notons $\varphi: A_\mathfrak{p}\to\mathscr{K}$ l'homomorphisme canonique et écrivons $\varphi(a_\tau)=b_\tau\in A/\mathfrak{p}\subseteq\mathscr{K}$ pour tout $\tau\in T$. En vertu du théorème 2 de notre travail cité en[1]), il résulte que $w'(b_\tau-b_{\tau'})=w(a_\tau-a_{\tau'})=\gamma_\tau\in\Delta$, donc $(b_\iota)_{\tau\in T}$ est une suite pseudo-convergente distinguée dans $\mathscr{K}$ (selon w') ayant largeur nulle; alors il existe un sous-ensemble d'indices $T'\subseteq T$, tel que $(b_\tau)_{\tau\in T}$, soit une suite pseudo-convergente distinguée dans $\mathscr{K}$ selon la valuation moins fine $w'_{\mathfrak{p}'_1}$, et dont la largeur est nulle. Donc, par l'hypothèse il existe $y\in\mathscr{K}$, pseudo-limite (d'ailleurs unique) de $(b_\tau)_{\tau\in T'}$ selon $w'_{\mathfrak{p}'_1}$. Supposons maintenant que, dans une extension immédiate maximale $\hat{\mathscr{K}}$ de $\mathscr{K}$ selon w', l'élément $z\in\hat{\mathscr{K}}$ soit une pseudo-limite (d'ailleurs unique) de

$(b_\tau)_{\tau\in T}$ selon w'; alors $z\in\widehat{\mathscr{K}}$ est aussi pseudo-limite de $(b_\tau)_{\tau\in T'}$ selon $w'_{\mathfrak{p}'_1}$ et puisque cette suite possède largeur nulle, alors $z=y\in\mathscr{K}$; cela montre d'après le théorème 2 que $y\in\mathscr{K}$ est pseudo-limite de $(b_\tau)_{\tau\in T}$ selon w'. Prenons maintenant $x\in A_\mathfrak{p}$ tel que $\varphi(x)=y$. Si $y=0$ alors $x\in\mathfrak{p}$ donc $w(x)\notin\Delta$ et $w(x-a_\tau)=w(a_\tau)=w'(b_\tau)=w'(b_\tau-b_{\tau'})=w(a_\tau-a_{\tau'})$ par le lemme 2, quelques soient $\tau,\tau'\in T$, $\tau<\tau'$. Si par contre $y\neq 0$, alors on a de même, $w(x-a_\tau)=w(a_\tau-a_{\tau'})$ quelques soient $\tau,\tau'\in T$, $\tau<\tau'$ car $x-a_\tau\notin\mathfrak{p}$ quelque soit $\tau\in T$. Cela montre l'existence d'une pseudo-limite $x\in K$ de la suite pseudo-convergente distinguée donnée $(a_\tau)_{\tau\in T}$.

Second cas. $\mathfrak{p}$ est un idéal premier limite, c'est-à-dire il existe une suite bien ordonnée strictement décroissante $(\mathfrak{p}_\sigma)_{\sigma\in S}$ d'idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}=\bigcap_{\sigma\in S}\mathfrak{p}_\sigma$. Notons Δ_σ le sous-groupe isolé correspondant à $\mathfrak{p}_\sigma$, donc $\Delta=\bigcup_{\sigma\in S}\Delta_\sigma$, $\Delta\neq\Delta_\sigma$.

Pour tout $\sigma\in S$ soit $T(\sigma)=\{\tau\in T\,|\,\gamma_\tau\in\Delta_{\sigma+1},\ \gamma_\tau\notin\Delta_\sigma\}$. Alors si $\sigma<\sigma'$ dans S il résulte que $\tau<\tau'$ dans T, lorsque $\tau\in T(\sigma)$, $\tau'\in T(\sigma')$. Soit $S'=\{\sigma\in S\,|\,T(\sigma)\neq\emptyset\}$; alors $T=\bigcup_{\sigma\in S'}T(\sigma)$. De même, il est clair que S' est cofinal dans S, donc si $\tau(\sigma)$ est le premier élément de $T(\sigma)$ lorsque $\sigma\in S'$ il résulte que $T'=\{\tau(\sigma)\,|\,\sigma\in S'\}$ est cofinal dans T (car S' n'a pas un dernier élément). En outre les ensembles bien ordonnés T' et S' sont isomorphes et peuvent être identifiés. Cela signifie qu'on peut considérer un sous-ensemble cofinal T' de T et S, de façon que $w(a_\tau-a_{\tau'})=\gamma_\tau\in\Delta_{\tau'}$, $\gamma_\tau\notin\Delta_\tau$, lorsque $\tau,\tau'\in T'$, $\tau<\tau'$, où on a $\mathfrak{p}=\bigcap_{\tau\in T'}\mathfrak{p}_\tau$; donc on a le système compatible de congruences $a_\tau\equiv a_{\tau'}\pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau\supseteqq\mathfrak{p}_{\tau'}$ $(\tau,\tau'\in T')$, avec $a_\tau\in A$ pour tout $\tau\in T'$.

Par l'hypothèse que K, muni de w est complet, il existe $x\in A$ tel que $x\equiv a_\tau\pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau\in T'$. Puisque $a_\tau\not\equiv a_{\tau'}\pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$ lorsque $\tau<\tau'$ alors $x\not\equiv a_\tau\pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$ donc $w(x-a_\tau)\in\Delta_{\tau'}$, $w(x-a_{\tau'})\notin\Delta_{\tau'}$ et alors $w(x-a_\tau)<w(x-a_{\tau'})$ lorsque $\tau<\tau'$. Cela entraîne que $\gamma_\tau=w(a_\tau-a_{\tau'})=w[(x-a_{\tau'})-(x-a_\tau)]=w(x-a_\tau)$, donc x est une pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau\in T'}$ dans K et par une remarque déjà faite, x est pseudo-limite de la suite $(a_\tau)_{\tau\in T}$.

Supposons réciproquement que toute suite pseudo-convergente distinguée dans K possède au moins une pseudo-limite dans K. Montrons que K est complet.

c1) Soient $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_1$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau A de la valuation w de K, soient $\Delta\supset\Delta_1$ les correspondants sous-groupes isolés et montrons que $\mathscr{K}=A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation de rang 1 $w'=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}$ est complet.

Prenons d'abord une suite de CAUCHY $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ d'éléments de $A/\mathfrak{p}\subset\mathscr{K}$; on peut supposer sans perte de généralité que $b_n\neq 0$ et si $\gamma'_n=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}(b_n-b_{n+1})\in\Delta/\Delta_1$, alors $0\leqq\gamma'_1<\gamma'_2<\cdots<\gamma'_n<\cdots$; en outre (γ'_n) est cofinal à Δ/Δ_1.

Soit, pour tout indice n, $a_n\in A$ tel que $\varphi(a_n)=b_n\neq 0$ donc $a_n\notin\mathfrak{p}$ et $a_n-a_{n'}\notin\mathfrak{p}$ lorsque $n<n'$; [si $a_n-a_{n'}\in\mathfrak{p}$ alors $b_n=b_{n'}$ et $\gamma'_n=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}(b_n-b_{n'})=\infty$ absurde!]. Alors la suite (a_n) est pseudo-convergente distinguée dans K, selon w, car $\Theta\circ w(a_n-a_{n'})=w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}(b_n-b_{n'})=\gamma'_n$, lorsque $n<n'$; donc si

$\gamma_n = w(a_{n'} - a_{n''})$ alors (γ_n) est une suite strictement croissante et cofinale à Δ. Par l'hypothèse, il existe $x \in K$ qui soit pseudo-limite de (a_n), donc $w(x - a_n) = w(a_{n'} - a_{n''}) = \gamma_{n'}$ (lorsque $n < n'$) donc $x \in A$ car $\gamma_n \geqq 0$, $w(a_n) \geqq 0$.

Si $x \in \mathfrak{p}$ alors $w(x - a_n) = w(a_n) = \gamma_n$, donc $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n) = \Theta \circ w(a_n) = \Theta(\gamma_n) = \Theta \circ w(a_n - a_{n'}) = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n - b_{n'}) = \gamma'_n$ et ainsi 0 est limite de la suite de Cauchy donnée.

Si $x \notin \mathfrak{p}$ et si $y = \varphi(x)$ alors $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(y - b_n) = \Theta \circ w(x - a_n) = \Theta \circ w(a_n - a_{n'}) = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n - b_{n'}) = \gamma'_n$ donc y est la limite de la suite de Cauchy donnée.

Si la suite de CAUCHY (b_n) n'a pas tous ses éléments dans $A/\mathfrak{p}$, comme (b_n) est aussi une suite pseudo-convergente ayant largeur nulle selon la valuation plus fine $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, par multiplication avec un élément $b \in \mathscr{K}$, $b \neq 0$, il est possible obtenir une suite de CAUCHY $(b \cdot b_n)$, selon $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}$, où $b \cdot b_n \in A/\mathfrak{p}$. Alors si $y' \in \mathscr{K}$ est la limite de $(b \cdot b_n)$, il résulte que $y' \cdot b^{-1} = y$ est la limite de (b_n).

c 2) Soit $(\mathfrak{p}_\tau)_{\tau \in T}$ une famille bien ordonnée strictement décroissante d'idéaux premiers, telle que si $\mathfrak{p} = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{p}_\tau$ alors $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\tau$ pour tout $\tau \in T$. Soit le système compatible de congruences $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau > \mathfrak{p}_{\tau'}$, où $a_\tau \in A$, pour τ, $\tau' \in T$, $\tau < \tau'$.

Supposons d'abord qu'il existe un indice $\tau_0 \in T$ tel que $a_{\tau_0} \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ quelque soit $\tau \in T$. Dans ce cas, a_{τ_0} est solution du système de congruences. Ainsi, nous pouvons désormais supposer qu'il n'existe aucun tel indice τ_0.

Il est alors facile de considérer un sous-ensemble T' cofinal à T, de façon que $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$, $a_\tau \not\equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$ lorsque $\tau, \tau' \in T'$, $\tau < \tau'$ [voir SCHILLING [2]), p. 48, remarque 2]. Donc $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ est une suite pseudo-convergente distinguée car $w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Delta_{\tau'}$, $w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_\tau$ et $\Delta = \bigcup_{\tau \in T'} \Delta_\tau$ (où Δ_τ est le sous-groupe isolé correspondant à $\mathfrak{p}_\tau$). Par l'hypothèse, il existe $x \in K$ pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ donc $w(x - a_\tau) = w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_\tau$, c'est-à-dire $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T'$. Alors on a aussi $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$, car si $\tau \in T$ et si on prend $\tau' \in T'$, $\tau < \tau'$ (un tel τ' existe) alors $x \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$, $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$, $\mathfrak{p}_{\tau'} \subset \mathfrak{p}_\tau$, donc $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$.

Remarque. Du théorème 2' et de ce qui nous venons de montrer, il résulte la validité du lemme 10.

La réciproque du lemme 10 n'est pas vraie en général; en effet, on connaît des exemples de corps valués complets mais non maximaux, même relativement à une valuation de rang 1. Cette valuation ne peut pas être discrète; car si K est un corps muni d'une valuation discrète de rang 1 par rapport à laquelle il est complet, alors il est aussi maximal. Le lemme suivant généralise cette dernière affirmation [cf. MACLANE [4])].

Lemme 14. Soit K un corps muni d'une valuation discrète w de rang bien ordonné, par rapport à laquelle il est complet. Alors K, muni de w, est un corps maximal.

Démonstration. *Premier cas:* Il existe un idéal premier minimal $\mathfrak{p} \neq (0)$. Soit $\mathscr{K} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ et $w' = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, donc le groupe de valeurs de w' est égal au sous-groupe isolé Δ de Γ qui correspond à $\mathfrak{p}$; ainsi, w' est discrète et possède rang

strictement inférieur à celui de w. Puisque K, muni de w, est complet, alors $\mathscr{K}$, muni de w', est aussi complet; le lemme étant valable pour des valuations de rang 1, on déduit par induction que $\mathscr{K}$, muni de w', est maximal. D'autre part, K, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de rang 1 est discret et complet, donc aussi maximal. Par un résultat précedent, K, muni de w, est maximal.

Deuxième cas: l'idéal premier (0) est un idéal premier limite, c'est-à-dire, $\Gamma = \cup \Delta_2$ (où $\Delta_2 \neq \Gamma$ sont des sous-groupes isolés principaux). Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de l'anneau A de w et $\gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'})$ lorsque $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$. Si la suite strictement croissante $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ est cofinale à Γ, alors c'est une suite pseudo-convergente distinguée, donc il existe une pseudo-limite $a \in K$, car K, muni de w, est complet. Si, par centre, $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ n'est pas cofinale à Γ, alors de $\Gamma = \cup \Delta_2$ $\Delta_2 \neq \Gamma$, il résulte qu'il existe un sous-groupe isolé $\Delta \neq \Gamma$ tel que $\gamma_\tau \in \Delta$ quelque soit $\tau \in T$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de l'anneau A qui correspond à Δ, donc $\mathfrak{p} \neq (0)$, et considérons le corps des restes $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, de K, muni de w. Pour tout $\tau \in T$ notons b_τ la classe de a_τ, modulo $\mathfrak{p}$; puisque $0 \leqq w(a_\tau) \leqq \gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Delta$ alors $a_\tau \notin \mathfrak{p}$, donc $b_\tau \neq 0$ quelque soit $\tau \in T$. Alors, si on note $w' = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, on a $w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_\tau - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''}) = w'(b_{\tau'} - b_{\tau''})$, pour $\tau, \tau', \tau'' \in T$, $\tau < \tau' < \tau''$, donc $(b_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente de $\mathscr{K}$, muni de la valuation discrète w', dont le groupe des valeurs est Δ. Puisque $\mathscr{K}$, muni de w', est un corps complet et le rang de Δ est strictement inférieur à celui de Γ, le lemme étant vrai pour les valuations de rang 1, on déduit par induction que $\mathscr{K}$, muni de w', est un corps maximal; il existe alors au moins une pseudo-limite $b \in \mathscr{K}$ de $(b_\tau)_{\tau \in T}$, c'est-à-dire, $w'(b - b_\tau) = w'(b_\tau - b_{\tau'})$ lorsque $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$ (et nécessairement $b \neq b_\tau$). Soit $a \in A_{\mathfrak{p}} \subseteq K$, dont la classe modulo $\mathfrak{p}$ est égale à b; alors $a \not\equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}}$ quelque soit $\tau \in T$, donc $w(a - a_\tau) = w'(b - b_\tau) = w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_\tau - a_{\tau'})$ (car $a_\tau \not\equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}}$), pour $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, et ainsi $a \in K$ est une pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T}$. Donc, K, muni de w, est un corps maximal.

4.

Le résultat suivant généralise aux valuations de rang fini un théorème de F. K. SCHMIDT[6]), pour les valuations de rang 1.

Lemme 15. Supposons que le corps K soit complet relativement à une valuation discrète w ayant rang fini. Si w' est une valuation discrète de K de même rang que w, alors w' et w coincident. De même, si K est complet par rapport à une valuation w' ayant même rang que w, alors w' et w coïncident.

Démonstration. Nous démontrerons le lemme par induction sur le rang de w, lequel est supposé fini. Remarquons que le lemme est vrai lorsque la valuation w possède rang 1. Supposons donc que le rang de w soit strictement supérieur à 1 et que le lemme soit vrai pour toute valuation ayant rang strictement inférieur à celui de w. Ainsi, il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de la valuation w, tel que $(0) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^0$. Il

[6]) SCHMIDT, F. K.: Mehrfach perfekte Körper. Math. Ann. **108**, 1–25 (1933).

résulte du lemme 11 que K est complet par la valuation discrète $w_{\mathfrak{p}}$; de même, par le lemme 12, $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ est complet par la valuation discrète $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$; en plus, les valuations $w_{\mathfrak{p}}$ et $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ ont rang strictement inférieur à celui de w. Soit maintenant w' une valuation de K ayant le même rang que w et notons $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'^0$, les idéaux premiers de l'anneau A' de la valuation w', correspondants par le lemme 1 respectivement aux idéaux $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^0$. Si w' est discrète, alors $w'_{\mathfrak{p}'}$ est une valuation discrète de $\mathscr{K}$ ayant même rang que $w_{\mathfrak{p}}$, donc par induction, $w'_{\mathfrak{p}'} = w_{\mathfrak{p}}$ c'est-à-dire, $A'_{\mathfrak{p}'} = A_{\mathfrak{p}}$ et alors $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, donc $\mathscr{K}' = A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}' = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = \mathscr{K}$. De même, $w'_{\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'^0}$ est une valuation discrète de $\mathscr{K}$ ayant le même rang que $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, donc par induction, on déduit que $w'_{\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'^0} = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$. Il résulte alors du théorème des valuations composées que $w' = w$.

Supposons maintenant que K soit complet par rapport à une valuation w' de même rang que w; on démontre analoguement que $w' = w$.

5.

Définition. Un corps K muni de la valuation w est dit Henselien (ou relativement complet) lorsqu' il vérifie le «lemme de HENSEL»:

Soit $f(X) \in A[X]$ un polynôme primitif (où A est l'anneau de la valuation w de K) et soit $f(X) \equiv g_0(X) \cdot h_0(X) \pmod{\mathfrak{p}^0}$ avec $g_0(X)$, $h_0(X) \in A[X]$, premier coefficient de $g_0(X)$ égal à une unité de A et $pgcd\,(g_0(X), h_0(X)) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^0}$. Alors, il existe des polynômes $g(X), h(X) \in A[X]$ tels que $g(X) \equiv g_0(X)$, $h(X) \equiv h_0(X) \pmod{\mathfrak{p}^0}$, $g(X)$ ayant le même degré que $g_0(X)$, et $f(X) = g(X) \cdot h(X)$.

Il est bien connu que tout corps valué complet est Henselien. NAGATA[7]) démontre pour les corps valués Henseliens les résultats correspondants aux lemmes 11, 12 et 13.

Nous démontrerons ensuite un résultat indiqué incorrectement par SCHILLING[8]) dans une forme particulière:

Lemme 16. Si le corps K est complet relativement à deux valuations distinctes ayant le même rang w, w', telles que leurs anneaux de valuation ne possèdent aucun idéal premier limite (par exemple, lorsque ces valuations possèdent rang fini), alors K est algébriquement clos ou possède un corps des restes algébriquement clos.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{p}$ soit le plus grand idéal premier (éventuellement nul) commun aux anneaux A, A' des valuation w, w'; alors $w \wedge w' = w_{\mathfrak{p}} \wedge w'_{\mathfrak{p}}$, donc $A_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}}$. Le corps des restes de K, muni de $w_{\mathfrak{p}}$, est $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = A'_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. Dans le corps $\mathscr{K}$ considérons les valuations $v = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ et $v' = w'_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'^0}$ (où $\mathfrak{p}^0$, $\mathfrak{p}'^0$ sont resp. les idéaux maximaux de A, A'); alors, d'après le lemme 6, $\mathscr{K}$ est complet relativement à v, v'. D'autre part, il n'existe aucun idéal premier non nul commun aux anneaux $A/\mathfrak{p}$, $A'/\mathfrak{p}$ des valuations v, v'.

---

[7]) NAGATA, M.: On the Theory of Henselian Rings. Nagoya Math. J. **5**, 45–57 (1953).

[8]) SCHILLING, F. G.: Arithmetic in Fields of Formal Power Series in several Variables. Ann. of Math. **38**, 551–576 (1937), p. 555, theorem 1.

Si $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{p}'_1/\mathfrak{p}$ sont respectivement les idéaux premiers minimaux de $A/\mathfrak{p}$, $A'/\mathfrak{p}$ (dont l'existence découle de l'hypothèse sur le rang des valuations données) alors $\mathscr{K}$ est complet relativement aux valuations distinctes de rang 1 $v_{\mathfrak{q}_1} = w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1}$ et $v'_{\mathfrak{q}'_1} = w'_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'_1}$; alors par un résultat de F. K. SCHMIDT[6]) $\mathscr{K}$ est algébriquement clos; en particulier, si $\mathfrak{p} = (0)$ on peut conclure que K est algébriquement clos.

Remarque. Si $\mathscr{K}$ est un corps algébriquement clos, muni de deux valuations (non discrètes) de rang 1, w'_1, w'_2, par rapport auxquelles il est complet, si K est un corps non algébriquement clos, valué discret complet selon la valuation v, et ayant corps des restes $\mathscr{K}$, et enfin, si w'_1, w_2 sont les valuations de K, plus fines que v et obtenues en composant v avec respectivement w'_1, w'_2, alors w'_1 et w_2 sont distinctes et K est complet relativement à ces valuations de même rang, en vertu du lemme 13. Il résulte qu'on ne peut pas affirmer dans le lemme 16 que K soit algébriquement clos.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil

(Eingegangen am 8. Februar 1958)